EJERCICIOS TEMA 5

COMBINATORIA

5.1. Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en el interior de un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$

5.2. ¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).

5.3. ¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\sqrt{2}/n$?

5.4. Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a 1/3

5.5. Se eligen 11 elementos del conjunto {1, 2, 3, ... , 30}. Demostrar que existen dos cuya diferencia es menor o igual que 2.

5.6. Dado el conjunto A = {1, 2, 3, ... , 39, 40}, demostrar que en cualquier subconjunto de A de cardinal 21 siempre existen dos elementos tales que uno es múltiplo del otro.

5.7. Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras seguidas de 3 números. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?

5.8. ¿Cuántos números naturales menores que 10000 tienen todas sus cifras distintas?

5.9. ¿Cuántos números hay de tres cifras con todas ellas impares y distintas?, ¿y pares?

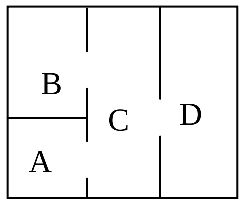
5.10. ¿Cuántos números del 1 al 1000 no son divisibles por 3?

5.11. ¿Cuántos divisores positivos tiene el número 29338848000 = $2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?

5.12. Calcula el número de divisores de 112.000. ¿Cuántos son impares?

5.13. Se extraen, con reemplazamiento y ordenadamente, cinco cartas de una baraja. ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey o un as?

5.14. Se han de pintar las habitaciones de la casa que se muestra en la figura, de forma que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores distintos. ¿De cuántas maneras puede pintarse si se dispone de n colores?



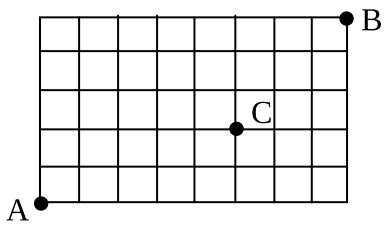
5.15. Dadas 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no pueden figuran dos consonantes seguidas?

5.16. ¿Cuántas sucesiones binarias (de ceros y unos) de longitud n contienen exactamente tres veces el cero? ¿Y cuántas tienen al menos dos ceros?

5.17. En una estantería hay siete libros encuadernados en azul, cinco en negro y tres en blanco, aunque todos son títulos distintos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden colocar si los del mismo color han de situarse juntos?

5.18. Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones {1, 0}, ¿cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores? ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?

5.19. La cuadrícula de la figura representa las calles de un barrio. Todo camino de longitud mínima entre A y B consta de 8 tramos horizontales y 5 verticales. ¿Cuántos caminos mínimos se pueden trazar? ¿Cuántos de ellos pasan por C?



5.20. Se extraen 5 cartas de una baraja de 40, ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse? Se deben distinguir las dos situaciones posibles: (a) con reemplazamiento, es decir, cada carta extraída se vuelve a introducir en la baraja, y (b) sin reemplazamiento (aquí el orden de aparición es irrelevante)

5.21. El número de manos de 5 cartas de una baraja española de 40 cartas que contienen al menos tres oros, no es $\binom{10}{3}\times\binom{37}{2}$ ¿Por qué? ¿Cuál es la respuesta correcta?

5.22. ¿De cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de una baraja de 40 cartas de modo que se tenga al menos una carta de cada palo?

5.23. ¿Cuál es el número de cuaternas (a, b, c, d) de números enteros que satisfacen la relación $0 < a < b < c < d < 20$?

5.24. Seis amigos se reúnen para cenar en una mesa circular. ¿De cuántas formas diferentes se pueden sentar? ¿Y si dos de ellos, A y B, insisten en sentarse juntos?

5.25. Se considera el código, sobre el alfabeto B = {0, 1}, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?

5.26. Un banco tiene que elegir 5 cargos directivos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres {A, E, O} y 5 mujeres {X, Y, Z, V, W} ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:
a) Los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección.
b) Se eligen los tres hombres.
c) Se eligen tres mujeres y dos hombres.
d) Se eligen al menos tres mujeres.

5.27. Dados n puntos sobre una circunferencia, se trazan todos los segmentos que determinan entre sí. ¿Cuántos hay? Suponiendo que no hay tres segmentos con un punto en común, ¿cuál es el número de puntos de intersección en el interior de la circunferencia?

5.28. El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas {P1, P2, P3, P4, P5}. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse pero sí puede votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?

5.29. Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas? Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar con la condición anterior?

5.30. En una heladería se sirven helados de 8 tipos diferentes. Se compran 22 helados para una fiesta, ¿cuántas compras diferentes pueden efectuarse? ¿Y si la mitad son de fresa? ¿Y si queremos al menos uno de cada tipo?

5.31. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas ellas de distintos colores?

En los ejercicios siguientes, del 32 al 41, se considera el orden lexicográfico para ordenar los objetos combinatorios.

5.32. ¿Cuál es la permutación siguiente a 5147632? ¿Y la anterior?

5.33. ¿Cuál es la permutación siguiente a 5174362? ¿Y la anterior?

5.34. Se considera el conjunto X = {1,2,3,4,5,6,7}. ¿Cuál es la combinación sin repetición de tamaño 4 siguiente a 3467? ¿Y la anterior?

5.35. ¿Y la combinación con repetición que sigue a 22666? Escribe las tres anteriores y las tres posteriores

5.36. Considera las listas de tamaño 5 que se forman con los elementos de {1,2,3,4,5,6,7}. Si puede haber repetición, ¿cuáles son la primera y la última?, ¿cuál es la siguiente a 55216? ¿Y la anterior?

5.37. Las mismas preguntas para 22317, 41333.
5.38. Ahora no se permite repetición. Las mismas preguntas para 52167, 43176, 34516, 35124
5.39. Enumerar todos los subconjuntos de X={A, B, C, D, E} utilizando la biyección con las sucesiones binarias de longitud 5.
5.40. Se considera el conjunto X={1,2,3,4,5,6,7,8}.
a) Escribe las tres permutaciones siguientes a 51487632 y las tres anteriores
b) Escribe las tres combinaciones con repetición de tamaño 5 siguientes a 11288 y las tres anteriores.
5.41. Elegir dos ejemplos de cada uno de los objetos combinatorios no incluidos en el ejercicio anterior (listas, combinaciones sin repetición) y calcular su anterior y posterior en el orden lexicográfico.
5.42. ¿Cuántas palabras de 13 letras pueden formarse con las letras de la palabra CLASIFICACIÓN?
5.43. Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 aes, 5 bes y 8 ces. ¿Y si no puede haber dos bes consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?
5.44. ¿De cuántas formas se pueden elegir 4 parejas entre 30 personas? (Se han de distinguir dos casos, según que importe o no el orden de la elección de las parejas)
5.45. Demostrar las siguientes identidades con números combinatorios:

(a) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (b) $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k}$

(c) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + \cdots + 2^n\binom{n}{n} = 3^n$ (Ind.: $(2+1)^n = 3^n$)

(d) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$ (Ind.: Utilizar el apartado (a))

5.46. Hallar el coeficiente de x^6y^2 en el desarrollo de $(x - 2y)^8$. Calcular la suma de todos los coeficientes en el desarrollo anterior.
5.47. Calcular el término donde no figure x en el desarrollo de $\left(x - \frac{5}{x}\right)^{14}$
5.48. En un tablero de ajedrez de 8×8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal ni se puedan comer entre ellas?
5.49. Se tienen 5 sobres y 5 cartas y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y para que haya dos coincidencias? ... ¿Y para que haya cinco?
5.50. ¿Cuántos números hay menores que 1000 con la propiedad de que la suma de sus cifras sea 15?
5.51. (a) ¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 cumplen que la suma de sus cifras es 9?
(b) ¿Cuántos números enteros de los hallados en (a) tienen todas sus cifras distintas de cero?
5.52. En un centro de enseñanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10. ¿Cuántos expedientes académicos diferentes se pueden recibir? ¿Cuántos de ellos tienen de nota media 7?
5.53. Se lanzan tres dados distintos de forma simultánea. ¿En cuántas tiradas la suma de puntuaciones es 10?
5.54. Determinar el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ en los siguientes casos:
a) $x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$ b) $x_i > 0 \quad 1 \leq i \leq 4$
c) $x_1, x_2 \geq 5; \quad x_3, x_4 \geq 7$ d) $x_i \geq 8 \quad 1 \leq i \leq 4$
e) $x_i \geq -2 \quad 1 \leq i \leq 4$ f) $x_1, x_2, x_3 > 0; \quad 0 < x_4 \leq 25$

5.55. Hallar el número de listas de 20 términos que se pueden formar con los símbolos 0, 1 y 2 y tales que contienen, al menos, un “cero”, al menos un “uno” y al menos un “dos”.

5.56. ¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos pueden formarse con 4 A, 4 B, 4 C y 4 D si cada símbolo debe aparecer, al menos, dos veces?

5.57. Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se puede detener en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?

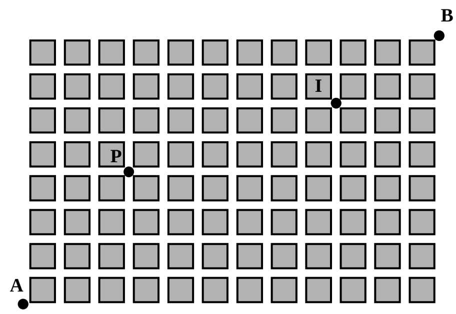
5.58. Tres matrimonios se sientan en una mesa circular. ¿De cuántas formas se pueden sentar de forma que se sienten juntos los dos miembros del matrimonio? ¿Y si no se pueden sentar juntos los dos miembros del matrimonio?

5.59. a) En las aulas 3203, 3204, 3303 y 3304 de la Facultad de Informática, se van a examinar 192 alumnos de la asignatura Matemática Discreta. Si no hubiera limitación en la capacidad de las aulas, ¿de cuántas formas se podría efectuar la distribución de los alumnos en las aulas?
b) Como la capacidad de las aulas sí es limitada, se introducen, entre todas las aulas, un total de 54 sillas auxiliares para la realización del examen. Si en cada aula no caben más de 20 sillas, ¿de cuántas formas se puede efectuar el reparto de sillas en las aulas?

5.60. En una bolsa hay caramelos de varios sabores: fresa, naranja, limón y menta, 20 de cada sabor. Extraemos 11 caramelos de la bolsa.
(a) ¿Cuántas extracciones diferentes hay con al menos dos caramelos de fresa?
(b) ¿Y si sacamos a lo más 4 de cada sabor?

5.61. Los diez dígitos 0, 1, 2, … , 9 se disponen circularmente. Demostrar que siempre habrá tres dígitos consecutivos cuya suma sea al menos 15.

5.62. La cuadrícula de la figura representa las calles de una ciudad. ¿Cuántos caminos distintos puede seguir un ladrón que roba un banco situado en la esquina A para ir a su casa, situada en la esquina B, teniendo que cuenta que pretende ir por uno de los caminos más cortos y que debe evitar pasar por las esquinas P e I en las que se encuentran las dos comisarías de policía de la ciudad?



5.63. (Ejercicio segundo control curso 13-14)
(a) En la asignatura X hay 98 alumnos matriculados y sus edades suman 2013. Demostrar que existe un conjunto de siete alumnos cuyas edades suman al menos 144.
(b) Los siete alumnos anteriores han asistido esta semana a tutorías. Cada uno de ellos sólo ha ido a una de las cuatro horas de tutorías de su profesor. ¿De cuántas formas distintas pueden haber acudido los alumnos?
(c) ¿Y si el profesor ha recibido alumnos en cada una de las cuatro horas?

5.64. (Ejercicio recuperación segundo control curso 13-14)
(a) La empresa PizzaNet tiene una oferta: Compra 3 pizzas grandes y podrás elegir de forma gratuita entre 6 ingredientes adicionales. ¿Cuántas compras diferentes se pueden realizar?
(b) ¿Cuántos números de 1 hasta 1000000 tienen al menos dos cifras impares? ¿Cuántos tienen todas sus cifras distintas y exactamente tres impares?
En la segunda pregunta considerar, para simplificar la respuesta, que números con menos de 6 cifras significativas no pueden tener un 0. Por ejemplo, los números 021307, 004351, 009107 ó 000391 no cumplirían las condiciones.