5. Límites de funciones y continuidad

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Veremos los importantes conceptos de límite de una función y de función continua, y aprenderemos a relacionarlos. Estudiaremos también importantes resultados sobre el comportamiento de las funciones continuas.

Índice

1. Límites de funciones reales de una variable real

1.1. Puntos de acumulación

Puntos de acumulación y puntos aislados

Manejaremos en este tema los diferentes tipos de límite de una función. La noción intuitiva de este concepto consiste simplemente en el número al que se aproxima el valor $f(x)$ de una función f cuando la variable x se va acercando a un determinado punto a, pero sin llegar a él.

Observamos, sin embargo, que esto puede no tener sentido en cualquier punto del dominio de f, ya que no todos los puntos a sirven para "ir acercándonos" a ellos. Por ejemplo, si el dominio de f es el conjunto unitario $\{0\}$, es evidente que no podemos "ir acercándonos" al punto 0 (al menos sin salirnos del dominio de f). Esto puede ocurrir incluso en conjuntos más complicados: por ejemplo, si definimos una función en el dominio $A = [0, 1] \cup \{2\}$, tampoco nos es posible "acercarnos" al punto 2 a través de puntos de A.

Estas consideraciones nos llevan al importante concepto de *punto de acumulación*.

Definición 5.1. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$.

(I) Se dice que a es un *punto de acumulación* de A si para todo $\delta > 0$ existe un $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$.

(II) Si $a \in A$ y a no es un punto de acumulación de A, se dice que es un *punto aislado* de A.

(III) El conjunto de los puntos de acumulación de A se llama *conjunto derivado* de A, y se denota A'.

Informalmente, un punto a es un punto de acumulación de A (es decir, $a \in A'$) si, y solo si, hay puntos de A, distintos de a, arbitrariamente próximos al punto a.

Observemos también que, si a es un punto de acumulación del conjunto A, dada una distancia $\delta > 0$, no habrá un único punto $x \in A$ tal que $0 < |x - a| < \delta$, sino que podremos encontrar una cantidad infinita de puntos en estas mismas condiciones. En efecto, si $x \in A$ cumple esto, empecemos por definir $\delta_1 = |x - a|$. Observamos inmediatamente que $\delta_1 < \delta$. Además, como a es un punto de acumulación de A, existirá otro punto $y \in A$ tal que, $|y - a| < \delta_1$, y, por tanto, también será $|y - a| < \delta$. Es decir, dado un punto x de A que está a una distancia de a menor que δ, podemos encontrar otro y diferente que no solo está también en esta situación, sino que está de hecho aún más cerca de a que x.

Así pues, existen infinitos puntos de A que están muy cerca de a. Dicho de otra forma, intuitivamente un punto a es un *punto de acumulación* de A si los demás puntos de A se "arremolinan" (o se "acumulan") alrededor de a.

Otra cosa a observar es que, aunque en la definición la condición debe cumplirse para todo $\delta > 0$, en realidad basta verificarla para $\delta > 0$ "suficientemente pequeño", ya que si se cumple para los δ "pequeños", también se cumplirá automáticamente para los δ "grandes".

Veamos a continuación algunos ejemplos.

Ejemplos.

- Si A es finito, $A' = \varnothing$.

  Supongamos que
  $$A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}.$$
  Dado un $a \in \mathbb{R}$, definamos
  $$\delta = \text{mín}\{\, |x_k - a| \mid k = 1, \ldots, n, \quad x_k \neq a \,\}.$$
  Es decir, δ es la mínima distancia de a a un punto de A *diferente* de a. (Podríamos tener la mala suerte de que a fuera precisamente uno de los x_k, con lo que si no exigimos que $x_k \neq a$ en la definición de δ, podría resultar que $\delta = 0$; pero tal como lo hemos hecho, es evidente que $\delta > 0$.)

  Supongamos ahora que x es tal que $0 < |x - a| < \delta$. ¿Puede ser que $x \in A$? No. En primer lugar, si $x_k = a$, entonces $|x - a| = 0$, y no se cumple la condición pedida. Por otro lado, si $x_k \neq a$, tampoco se verifica la condición, porque entonces, según la forma en que hemos definido δ, debe ser $|x_k - a| \geqslant \delta$.

  Así pues, para este $\delta > 0$ no existe ningún $x \in A$ tal que $0 < |x-a| < \delta$. Por tanto, a no es un punto de acumulación. Como esto es cierto para cualquier $a \in \mathbb{R}$, lo que hemos probado en realidad es que A no tiene ningún punto de acumulación, es decir, $A' = \varnothing$.

  Otra forma alternativa (y más directa) de atacar este problema sería la siguiente: Según hemos observado anteriormente, si a es un punto de acumulación de A, entonces todo intervalo de la forma $(a-\delta, a+\delta)$ debe contener infinitos puntos de A. Es claro que esto no se puede conseguir si A es finito, de manera que $A = \varnothing$.

- $\mathbb{N}' = \mathbb{Z}' = \varnothing$.

  Probemos que $\mathbb{Z}' = 0$. Sea $a \in \mathbb{R}$. Sabemos que existe un $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leqslant a < m + 1$. Pueden darse dos casos:

  Si $a \in \mathbb{Z}$ entonces $a = m$. Escojamos $\delta = 1$. Si $x \in \mathbb{Z}$, $x > m$, será $x \geqslant m + 1$, de donde
  $$|x - a| = x - m \geqslant (m + 1) - m = 1.$$

Si $x \in \mathbb{Z}$, $x < m$, será $x \leqslant m-1$, y así,

$$|x-a| = m-x \geqslant m-(m-1) = 1.$$

Por tanto, no existe ningún $x \in \mathbb{Z}$ que cumpla $0 < |x-a| < 1$. En consecuencia, ningún entero a es punto de acumulación de $\mathbb{A}$.

Si $a \notin \mathbb{Z}$, entonces $m < a < m+1$. Definamos

$$\delta = \text{mín}\{\, a-m, m+1-a \,\}.$$

Sea $x \in \mathbb{Z}$, $x \neq a$. Si $x \leqslant m$, entonces $|x-a| = a-x \geqslant a-m \geqslant \delta$. Si, por el contrario, $x > m$, será $x \geqslant m+1$, de donde $|x-a| = x-a \geqslant m+1-a \geqslant \delta$. Es decir, no existe ningún $x \in \mathbb{Z}$ tal que $0 < |x-a| < \delta$. Por tanto, ningún $a \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de $\mathbb{Z}$, o sea, $\mathbb{Z}' = \varnothing$.

Como $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, tampoco existirá ningún $x \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, así que hemos probado también de paso que $\mathbb{N}' = \varnothing$.

- $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

  Este conjunto, como se ve, es bastante diferente de los ejemplos anteriores, en cuanto a sus puntos de acumulación. Veamos por qué es esto.

  Sea $a \in \mathbb{R}$, y veremos que a es siempre un punto de acumulación de $\mathbb{Q}$. Para ello, sea $\delta > 0$. Por la Propiedad Arquimediana, existe un $x \in \mathbb{Q}$, tal que $a < x < a+\delta$. Clarísimamente, este x verifica que $0 < |x-a| < \delta$. Concluimos así que a es un punto de acumulación de $\mathbb{Q}$.

  Observemos además que en este ejemplo, existen puntos de acumulación que pertenecen al conjunto estudiado, pero también existen puntos de acumulación (los irracionales) que no pertenecen a él.

- $(a,b)' = [a,b]' = (a,b]' = [a,b)' = [a,b]$, si $a < b$. *(¿Qué pasa si $a = b$?)*

  Veremos que $(a,b)' = [a,b]$. (El resto se hace de forma similar.)

  Sea $z > b$. Mostraremos que z no es punto de acumulación de (a,b). En efecto, tomemos $\delta = z-b$. Si $|x-z| < \delta$, entonces

  $$x > z-\delta = z-(z-b) = b,$$

  así que $x \notin (a,b)$.

  De forma similar, podemos probar que si $z < a$ entonces z tampoco es un punto de acumulación de (a,b) (tomando en esta ocasión $\delta = a-z$).

  Nos queda por probar que los puntos restantes (es decir, los z que pertenecen a $[a,b]$), sí que son puntos de acumulación de (a,b).

Supongamos primero que $z \in [a, b)$. Consideremos un δ, $0 < \delta < b - z$. Podemos escoger un x tal que $z < x < z + \delta$. Entonces $0 < x - z < \delta$ de donde $0 < |x - z| < \delta$. Por otra parte, $a \leqslant z < x < z + \delta = b$, de donde $x \in (a, b)$. Esto garantiza que z es en este caso un punto de acumulación de (a, b).

Nos resta el caso en que $z = b$. Consideremos de nuevo un δ, $0 < \delta < b - a$. Podemos escoger un x tal que $b - \delta < x < b$. Mediante consideraciones similares a las del caso $z \in [a, b)$, podemos demostrar que $x \in (a, b)$ y $0 < |x - z| < \delta$, lo que prueba que z es también en este segundo caso un punto de acumulación de (a, b).

- Si $A = \{ 1/n \mid n \in \mathbb{N} \}$, entonces $0 \in A'$ (aunque $0 \notin A$) y $1 \notin A'$ (aunque $1 \in A$).

  Veamos primero que 0 es un punto de acumulación. En efecto, si $\delta > 0$, la Propiedad Arquimediana nos dice que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/n < \delta$. Así tenemos que $1/n \in A$ y $|1/n - 0| = 1/n < \delta$.

  En cambio, 1 no es punto de acumulación de A, sino uno de sus puntos aislados. Sea $\delta = 1/2$. Entonces, no existe ningún elemento de $x \in A$ (salvo el propio 1), tal que $|x - 1| < \delta$. En efecto, si se cumpliera $|1/n - 1| < \delta$, para algún $n \in \mathbb{N}$, se tendría $1/n > 1 - \delta = 1/2$. Esta condición obviamente solo se cumple para $n = 1$.

  Se puede probar (utilizando el mismo proceso aplicado con los conjuntos finitos) que 0 es el único punto de acumulación de A.

Vuelta al Teorema de Bolzano-Weierstrass

Podemos ahora dar una nueva versión de nuestro ya conocido Teorema de Bolzano-Weierstrass. Esta asegura que los puntos de acumulación de un conjunto existen, con muy pocas exigencias.

Teorema 5.2 (de Bolzano-Weierstrass, para conjuntos infinitos)**.** *Todo conjunto infinito y acotado de números reales tiene un punto de acumulación.*

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto infinito y acotado. Como A es infinito, podremos escoger infinitos elementos $x_1, x_2, x_3, \ldots \in A$, todos ellos distintos. Estos elementos formarán una sucesión (x_n), que será acotada por serlo también A. La versión para sucesiones del Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que (x_n) tiene una subsucesión (x_{i_n}) que converge a un número l. Podemos suponer, sin falta de generalidad, que x_{i_n} es siempre distinto de l. Veamos que l es un punto de acumulación de A. Para ello, consideremos un $\delta > 0$. Como (x_{i_n}) converge a l, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{i_n} - l| < \delta$ si $n \geqslant n_0$. Como $x_{i_n} \in A \backslash \{a\}$, resulta que es cierto que existe un $x \in A$ tal que $0 < |x - l| < \delta$. Es decir, l es un punto de acumulación. $\square$

1.2. Un ejemplo notable: el Conjunto de Cantor

Construcción geométrica del Conjunto de Cantor

Haremos a continuación un alto en el camino para introducir un conjunto muy especial. El Conjunto de Cantor, también llamado a veces “Polvo de Cantor”, es muy famoso y fue construido por Georg Cantor en 1883. Es un subconjunto del intervalo $[0, 1]$, que tiene algunas propiedades bastante interesantes: en especial, según cómo lo consideremos, este conjunto se puede ver como muy pequeño o como muy grande. Primero mostraremos cómo se construye este conjunto, y luego probaremos algunas cosas sobre él.

Sea $C_0 = [0, 1]$. Descartemos el intervalo abierto central $(1/3, 2/3)$, y definamos

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Ahora descartemos los intervalos abiertos centrales en cada uno de los dos segmentos obtenidos y definamos

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

En el siguiente paso, y descartando los intervalos abiertos centrales de los que forman C_2, obtenemos el conjunto

$$C_3 = \left[0, \frac{1}{27}\right] \cup \left[\frac{2}{27}, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right] \cup \left[\frac{8}{27}, \frac{1}{3}\right] \\ \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{19}{27}\right] \cup \left[\frac{20}{27}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, \frac{25}{27}\right] \cup \left[\frac{26}{27}, 1\right]$$

Continuemos así indefinidamente, descartando siempre el tercio central, para obtener los conjuntos $C_4, C_5, \ldots$

Obsérvese que $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, y que para cada $k \in \mathbb{N}$, C_k es la unión de 2^k intervalos, cada uno de los cuales tiene longitud 3^{-k}.

Sea $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$. Entonces C es el Conjunto de Cantor.

Observemos en primer lugar que $C \neq \varnothing$: al menos 0 y 1 están en este conjunto, ya que no son descartados en ninguno de los pasos. Más en general, y por la misma razón, los extremos de los intervalos cerrados que forman cada uno de los C_n están también en C. Sin embargo, existen elementos en el Conjunto de Cantor que no son extremos de estos intervalos.

Por ejemplo, sean

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right], \quad I_2 = \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \quad I_3 = \left[\frac{2}{9}, \frac{7}{27}\right],$$

y, en general, para $n \geqslant 2$ definamos el intervalo I_n suprimiendo el tercio central de I_{n-1} y quedándonos con un tercio restante: el de la derecha o el de la izquierda según que n sea par o impar. Los intervalos I_n que hemos construido constituyen una sucesión anidada y además su longitud tiende a 0. El Teorema de los Intervalos Encajados nos asegura que la intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ consta exactamente de un punto, que llamaremos c. Como además $I_n \subset C_n$, se tendrá que $c \in \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C$. Veamos a continuación quién es c.

No es difícil ver que

$$I_n = \begin{cases} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{3^{n-1}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots - \frac{1}{3^{n-1}} + \frac{1}{3^n}\right], & n \text{ impar}, \\ \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n}, \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}\right], & n \text{ par}. \end{cases}$$

Por tanto, para todo n par deberemos tener

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} - \frac{1}{3^n} \leqslant c \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}}.$$

El miembro izquierdo de estas desigualdades es igual a

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (-1/3)^n}{1 - (-1/3)} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Por tanto, $c \geqslant 1/4$. En cuanto al miembro de la derecha, es igual

$$\begin{aligned} \frac{1}{3}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (-1/3)^{n-1}}{1 - (-1/3)} \\ &= \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right) \to \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

De aquí se sigue que $c \leqslant 1/4$. Es decir, c es $1/4$, y probamos así que $1/4 \in C$. Observemos que $1/4$ no es ninguno de los extremos de los intervalos suprimidos en la construcción de C, ya que estos son siempre fracciones cuyo denominador es una potencia de 3.

Caracterización aritmética del Conjunto de Cantor

Si consideramos el conjunto C_1 de la construcción anterior, vemos que es la unión de los intervalos $[0, 1/3]$ y $[2/3, 1]$. Expresemos los extremos de estos intervalos en base 3. Obtenemos $0 = (0{,}0)_3$, $1/3 = (0{,}1)_3 = (0{,}022222\ldots)_3$, $2/3 = (0{,}2)_3$, $1 = (1{,}0)_3 = (0{,}2222\ldots)_3$ De aquí obtenemos que los elementos de $[0, 1/3]$ tienen todos una expresión en base 3 con la forma $(0, 0\ldots)_3$, mientras que los de $[2/3, 1]$ se pueden escribir en base 3 como $(0{,}2\ldots)_3$ Concluimos que los elementos de C_1 se pueden escribir en base 3 con una expresión en que la primera cifra a la derecha de la coma es un 0 o un 2. Por el contrario, los elementos de $(1/3, 2/3)$ tienen que tener un 1 en la primera cifra.

Demos ahora un segundo paso, para estudiar la expresión en base 3 de los elementos de C_2. Este conjunto es la unión de los intervalos $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$ y $[8/9, 1]$. Las expresiones en base 3 de los extremos de estos intervalos son $0 = (0{,}00)_3$, $1/9 = (0{,}01)_3 = (0{,}0022\ldots)_3$, $2/9 = (0{,}02)_3$, $1/3 = (0,1)_3 = (0, 022\ldots)_3$, $2/3 = (0{,}20)_3$, $7/9 = (0{,}21)_3 = (0{,}20222\ldots)_3$, $8/9 = (0{,}22)_3$, $1 = (0{,}222\ldots)_3$. Así que los elementos de $[0, 1/9]$ se pueden siempre escribir en base 3 en la forma $(0{,}00\ldots)_3$, los de $[2/9, 1/3]$ pueden escribirse siempre en base 3 con la expresión $(0{,}02\ldots)_3$, etc. Concluimos de esta manera que los elementos de C_2 son precisamente aquellos que se pueden escribir en base 3 utilizando solo el 0 y el 2 en las dos primeras cifras.

Siguiendo de la misma manera, se podría probar por inducción que C_n es exactamente el conjunto de los números que se pueden escribir en base 3 usando solo ceros y doses en las n primeras cifras.

Como $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$, llegamos a que C es el conjunto de los números que en base 3 se pueden expresar usando solo ceros y doses.

Por qué el Conjunto de Cantor es "pequeño"

- C no contiene ningún intervalo.

  En efecto, sea I un intervalo cualquiera de longitud l. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-k} < l$. Como ya hemos observado, C_k está compuesto de intervalos disjuntos de longitud 3^{-k}. Esto implica que C_k no contiene ningún intervalo de longitud mayor que 3^{-k}. En particular, I no está contenido en C_k. Como $C \subset C_k$, se sigue que I tampoco está contenido en C.

- C tiene longitud 0.

  Afinemos el razonamiento seguido hace un momento y probemos que, dado un $\varepsilon > 0$ arbitrario, la longitud de C es menor que ε. Esto nos dará que la longitud de C solo puede ser 0.

  Sea $k \in \mathbb{N}$. Teniendo en cuenta que C_k está compuesto de 2^k intervalos disjuntos de longitud 3^{-k}, resulta evidente que la longitud total de C_k es $2^k \cdot 3^{-k} = (2/3)^k$. Elijamos ahora k de forma que $(2/3)^k < \varepsilon$. Como $C \subset C^k$, resulta que la longitud de C es menor o igual que la de C_k, que a su vez es menor que ε. Así que, como decíamos antes, la longitud de C tiene que ser 0.

Esto se puede ver también de otra forma, considerando los intervalos que en cada paso de la construcción se suprimen en $[0,1]$. Para formar C_1, quitamos un intervalo de longitud $1/3$. En el segundo paso, quitamos dos intervalos de longitud $1/9$ cada uno, y para construir C_k quitamos 2^{k-1} intervalos de longitud $1/3^k$. Entonces, la longitud total de lo que le quitamos al intervalo $[0,1]$ en los primeros k pasos, hasta formar C_k, debe ser

$$\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{9} + 4\cdot\frac{1}{27} + \cdots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{3^k}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1-(2/3)^k}{1-(2/3)} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

En consecuencia, la longitud total substraída al intervalo $[0,1]$ en todo el proceso debe ser

$$\lim_k\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k\right) = 1.$$

Esto implica que lo que no se le ha quitado, o sea, el Conjunto de Cantor, tiene longitud 0.

Por qué el Conjunto de Cantor es "grande"

- C no tiene puntos aislados. De hecho, $C' = C$.

  Veamos primero que $C \subset C'$. Sea $p \in C$. Probemos que $p \in C'$. Para ello, consideremos un $\varepsilon > 0$ y veamos que existe un $c \in C$ tal que $0 < |p-c| < \varepsilon$. En efecto, elijamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-k} < \varepsilon$. Como $C \subset C_k$, tenemos que p está en C_k y ha de pertenecer, por tanto, a uno de los intervalos cerrados y acotados que constituyen C_k. Llamemos I a este intervalo, y sea c uno de los extremos de I (eligiéndolo de forma que $c \neq p$, si tenemos la mala suerte de que p es uno de estos extremos). Sabemos que $c \in C$, y como la longitud de I es 3^{-k}, concluimos que, en efecto, $0 < |p-c| < \varepsilon$.

  Para ver que $C' \subset C$, basta observar que para todo $k \in \mathbb{N}$ es $C_k' = C_k$. Por tanto, $C' \subset C_k' = C_k$. De aquí obtenemos que $C' \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C$.

- C tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.

  Ya vimos que los elementos de C son precisamente los que se pueden escribir en base 3 en la forma $(0, a_1a_2a_3a_4\ldots)_3$, donde todos las cifras a_n son 0 o 2. Por otra parte, los elementos del intervalo $[0,1]$ son los que en base 2 se pueden escribir como $(0, b_1b_2b_3b_4\dots)_2$, donde las cifras b_n vale siempre, naturalmente, 0 o 1. (Recuérdese que $1 = (0{,}111\dots)_2$.) Esto nos permite definir una aplicación $\varphi\colon C \to [0,1]$ dada por

$$\varphi((0, a_1a_2a_3\dots)_3) = (0, b_1b_2b_3\dots)_2,$$

donde $b_n = a_n/2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Así, por ejemplo,

$$\varphi\Big(\frac{1}{4}\Big) = \varphi((0{,}020202\dots)_3) = (0{,}010101\dots)_2 = \frac{1}{3}.$$

Es fácil ver que esta aplicación es biyectiva, así que C y $[0,1]$ tienen el mismo número de elementos. Basta ahora recordar que $[0,1]$ tiene el mismo cardinal que $\mathbb{R}$.

¿Qué implica esto? En primer lugar, como los extremos de los conjuntos C_n forman un conjunto contable, nos vemos forzados a aceptar el hecho, no solo de que existen otros puntos en C, sino que, por ejemplo, algunos de ellos deben ser irracionales, o incluso trascendentes.

Por qué el Conjunto de Cantor no es ni “pequeño” ni “grande”

Según hemos visto, desde el punto de vista de la *cardinalidad*, el conjunto C es bastante grande. Esto contrasta bastante con el hecho de que desde el punto de vista de la *longitud*, C tiene el mismo tamaño que un solo punto. Concluimos esta discusión con una demostración de que, extrañamente, desde el punto de vista de la *dimensión*, C está en un punto intermedio.

- La dimensión de C no es ni 0 ni 1.

  Existe bastante consenso en que un punto tiene dimensión cero, un segmento tiene dimensión uno, un cuadrado tiene dimensión dos, y un cubo tiene dimensión tres. Sin intentar una definición formal de la dimensión (existen varias), podemos no obstante dar una idea de cómo se podría definir observando cómo la dimensión afecta al resultado de magnificar cada conjunto particular por un factor de 3. (La elección del número 3 no es, en realidad, demasiado importante, pero, como veremos, facilita los cálculos para el conjunto de Cantor.) Un solo punto no cambia en absoluto, mientras que un segmento se triplica en longitud. Para el cuadrado, triplicar cada longitud resulta en un cuadrado más grande que contiene 9 copias del cuadrado original. Finalmente, el cubo magnificado da un cubo que contiene 27 copias del cubo original en su volumen. Nótese que, en cada caso, para computar el “tamaño” del nuevo conjunto, la dimensión aparece como el exponente del factor de magnificación. Es decir, para el punto tenemos $3^0 = 1$, para el segmento $3^1 = 3$, para el cuadrado $3^2 = 9$ y para el cubo $3^3 = 27$.

Ahora apliquemos esta transformación al conjunto de Cantor. El conjunto $C_0 = [0, 1]$ se transforma en el intervalo $[0, 3]$. Borrando el tercio central, dejamos $[0, 1] \cup [2, 3]$, que es donde empezamos en la construcción original, excepto que ahora producimos una copia adicional de C en el intervalo $[2, 3]$. Asi, magnificando el conjunto de Cantor por un factor de 3 nos da *dos* copias del conjunto de Cantor original. Así, si d es la dimensión de C, entonces d debe satisfacer $3^d = 2$, o sea $d = \log 2/ \log 3 \approx 0{,}631$.

Los conjuntos cuya dimensión no es entera se denominan *fractales*. El Conjunto de Cantor es el ejemplo más sencillo de uno de estos.

1.3. Límite de una función en un punto

Qué es el límite de una función

Como ya hemos dicho anteriormente, decir que l es el límite de f en el punto a consiste informalmente en lo mismo que afirmar que $f(x)$ se acerca a l cuando x se acerca al punto a dentro del dominio de f, o que l puede ser aproximado tanto como se quiera por valores de f en puntos de su dominio suficientemente próximos al punto a, pero distintos de a. Dicho de otra forma, podemos conseguir que $f(x)$ esté "suficientemente cerca" de l, sin más que exigir que $x \neq a$ esté "suficientemente cerca" de a. Esto motiva lo siguiente:

Definición 5.3. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$. Decimos que l es *limite* de f en el punto a, y lo escribimos

$$\lim_{x\to a} f(x) = l,$$

cuando se cumple lo siguiente: para cada $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ se tiene $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Ejemplos.

- $\lim\limits_{x\to a} b = b.$

  Para ser precisos, sea $f(x) = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\lim_{x\to a} f(x) = b$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta = 1$. Entonces, si $0 < |x - a| < 1$, se tiene $|f(x) - b| = |b - b| = 0 < \varepsilon$.

- $\lim\limits_{x\to a} x = a.$

  Dicho de otra forma: Sea $f(x) = x$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x\to a} f(x) = a$. En efecto, si $\varepsilon > 0$, sea $\delta = \varepsilon$. Entonces, si $0 < |x - a| < \delta$, se tiene $|f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$.

- $\lim_{x \to a} x^2 = a^2$.

  Sea $f(x) = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se quiere hacer la diferencia

  $$|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2|$$

  menor que un $\varepsilon > 0$ predeterminado tomando x suficientemente cerca de a. Observemos para ello que $x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$. Además, si $|x-a| < 1$, entonces

  $$|x + a| \leqslant |x - a| + |2a| < 2|a| + 1.$$

  Por tanto, si $|x - a| < 1$, se tiene

  $$|x^2 - a^2| = |x + a||x - a| \leqslant (2|a| + 1)|x - a|.$$

  Además, este último término será menor que ε siempre que se tome $|x-a| < \varepsilon/(2|a| + 1)$.

  Por consiguiente, si se elige

  $$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{2|a| + 1}\right\},$$

  entonces cuando $0 < |x-a| < \delta$ se infiere primero que $|x-a| < 1$, de modo que las desigualdades anteriores son válidas, y además, como $|x - a| < \varepsilon/(2|a| + 1)$ se infiere también que

  $$|f(x) - a^2| = |x^2 - a^2| \leqslant (2|a| + 1)|x - a| < \varepsilon.$$

- $\lim_{x \to a} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a}$ si $a > 0$.

  Sea $f(x) = 1/x$ para $x > 0$ y sea $a > 0$. Para demostrar que $\lim_{x \to a} f(x) = 1/a$ se quiere hacer la diferencia

  $$\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right|$$

  menor que un $\varepsilon > 0$ predeterminado tomando x suficientemente cerca de $c > 0$. Observemos primero que

  $$\frac{1}{x} - \frac{1}{a} = \frac{1}{ax}(a - x),$$

  de donde

  $$\left|f(x) - \frac{1}{a}\right| = \frac{1}{ax}|x - a|$$

para $x > 0$. Deberemos obtener ahora una cota superior del factor $1/(ax)$ que sea válido alrededor del punto a. Esto lo podemos obtener si $|x - a| < \frac{1}{2}a$, porque entonces se cumplirá $\frac{1}{2}a < x < \frac{3}{2}a$, de modo que

$$0 < \frac{1}{ax} < \frac{2}{a^2} \qquad \text{si} \quad |x - a| < \tfrac{1}{2}a.$$

Por tanto, para estos valores de x se tiene

$$\Big|f(x) - \frac{1}{a}\Big| \leqslant \frac{2}{a^2}|x - a|.$$

Para hacer este último término menor que ε basta tomar $|x - a| < \frac{1}{2}a^2\varepsilon$. Por consiguiente, si se elige

$$\delta = \text{mín}\{\tfrac{1}{2}a, \tfrac{1}{2}a^2\varepsilon\},$$

entonces cuando $0 < |x - a| < \delta$ se tendrá primero que $|x - a| < \frac{1}{2}a$, de modo que serán válidas las desigualdades obtenidas anteriormente, y, por consiguiente, como $|x - a| < \frac{1}{2}a^2\varepsilon$, se infiere asimismo que

$$\Big|f(x) - \frac{1}{a}\Big| = \Big|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\Big| < \varepsilon.$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{4}{5}$.

  Sea $f(x) = (x^3 - 4)/(x^2 + 1)$ para $x \in \mathbb{R}$. Entonces obtenemos

$$\Big|f(x) - \frac{4}{5}\Big| = \frac{|5x^3 - 4x^2 - 24|}{5(x^2 + 1)}$$
$$= \frac{|5x^2 + 6x + 12|}{5(x^2 + 1)} \cdot |x - 2|.$$

Para obtener una cota sobre el factor que multiplica a $|x - 2|$, se restringe x con la condición $|x - 2| < 1$, es decir, $1 < x < 3$. Para x en ese intervalo, se tiene $0 \leqslant 5x^2 + 6x + 12 \leqslant 5\cdot 3^2 + 6\cdot 3 + 12 = 75$ y $5(x^2 + 1) \geqslant 5(1 + 1) = 10$, de modo que

$$\Big|f(x) - \frac{4}{5}\Big| \leqslant \frac{75}{10}|x - 2| = \frac{15}{2}|x - 2|.$$

Ahora para un $\varepsilon > 0$ dado, elegimos

$$\delta = \text{mín}\Big\{1, \frac{2}{15}\varepsilon\Big\}.$$

Entonces, si $0 < |x - 2| < \delta$, se tiene $|f(x) - 4/5| \leqslant (15/2)|x - 2| < \varepsilon$.

Unicidad del límite

El límite de una función en un punto puede no existir, pero si existe es único.

Proposición 5.4. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} f(x) = l_2$$

entonces $l_1 = l_2$.

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $l_1 < l_2$. Elijamos $\varepsilon = (l_2 - l_1)/2$. Deben existir un $\delta_1 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta_1$ es $f(x) < l_1 + \varepsilon = (l_1 + l_2)/2$ y un $\delta_2 > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta_2$ es $(l_1 + l_2)/2 = l_2 - \varepsilon < f(x)$. Definiendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, resulta que para todo $x \in A$ con $0 < |x - a| < \delta$ es $(l_1 + l_2)/2 < f(x) < (l_1 + l_2)/2$. Esto es una contradicción. $\square$

Entornos

Veremos a continuación que se puede dar una definición alternativa en que se utilizan unos conjuntos llamados *entornos* de un punto. Esto se revelará útil para poder dar una definición unificada de otros tipos de límite que nos aparecerán después.

Definición 5.5.

(I) Dado $a \in \mathbb{R}$, llamamos *entorno* centrado en a de radio δ, al conjunto

$$E(a, \delta) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta \,\},$$

es decir, al intervalo $(a - \delta, a + \delta)$.

(II) Llamamos *entorno perforado* centrado en a de radio δ, al conjunto

$$\dot{E}(a, \delta) = \{\, x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < \delta \,\},$$

es decir, el conjunto $E(a, \delta)\setminus\{a\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$.

Caracterización de los puntos de acumulación mediante entornos

Así pues, cuando escribimos $x \in E(a, \delta)$ estamos diciendo simplemente que $|x - a| < \delta$, y cuando escribimos $x \in \dot{E}(a, \delta)$, lo que indicamos es que $0 < |x - a| < \delta$. De esta forma, la definición de punto de acumulación se puede reescribir de forma trivial utilizando la noción de entorno.

Proposición 5.6. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *El punto a es un punto de acumulación de A.*

(II) *Para todo $\delta > 0$, se tiene $A \cap \dot{E}(a, \delta) \neq \varnothing$.*

Caracterización del límite por entornos

También la definición de límite se puede reescribir utilizando el concepto de entorno.

Proposición 5.7. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A'$, $l \in \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *El punto l es límite de f en a.*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$ entonces $f(x) \in E(l,\varepsilon)$.*

Obsérvese el uso que se hace, primero de un entorno perforado, después de un entorno ordinario.

1.4. Límites infinitos y límites en el infinito

Qué son límites infinitos y en el infinito

A continuación introducimos varias definiciones de límite adicionales en las que aparece implicado el infinito.

Definición 5.8. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$.

(I) Supongamos que $a \in A'$. Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$ cumplen $f(x) > M$.

(II) Supongamos que $a \in A'$. Decimos que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe algún $\delta > 0$ tal que todos los $x \in A$ con $0 < |x-a| < \delta$ cumplen $f(x) < M$.

(III) Supongamos que A no está acotado superiormente. Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(IV) Supongamos que A no está acotado superiormente. Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $f(x) > M$.

(V) Supongamos que A no está acotado superiormente. Decimos que $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x > K$ cumplen $f(x) < M$.

(VI) Supongamos que A no está acotado inferiormente. Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \in \mathbb{R}$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(VII) Supongamos que A no está acotado inferiormente. Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $f(x) > M$.

(VIII) Supongamos que A no está acotado inferiormente. Decimos que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si para cada $M \in \mathbb{R}$ existe un $K \in \mathbb{R}$ tal que todos los $x \in A$ con $x < K$ cumplen $f(x) < M$.

Ejemplos.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$.

  Dado $M > 0$, sea $\delta = 1/\sqrt{M}$. Entonces, si $0 < |x-0| < \delta$, será $x^2 < 1/M$, de donde $1/x^2 > M$.

- Sea $f(x) = 1/x$, para $x \neq 0$. Entonces, f no tiende a ∞ ni a $-\infty$ cuando $x \to 0$.

  Porque si $M > 0$, entonces $f(x) < 0 < M$ para toda $x < 0$, de manera que $f(x)$ no tiende a ∞ cuando $x \to 0$. De igual forma, si $M < 0$ entonces $f(x) > 0 > M$ si $x > 0$, de modo que $f(x)$ no tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0$.

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

  Sea $\varepsilon > 0$. Sea $K = 1/\varepsilon$. Si $x > K$, entonces $0 < |1/x - 0| = 1/x < 1/K = \varepsilon$.

- $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$ si $n \in \mathbb{N}$.

  Dado $M > 0$, sea $K = \max\{1, M\}$. Entonces si $x > K$ se tiene $x^n \geqslant x > M$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = \infty$ si n es par y $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n es impar.

  Mostraremos solamente lo que ocurre con n impar. Sea $n = 2k - 1$, con $k \in \mathbb{N}$. Dado $M < 0$, sea $K = \min\{M, -1\}$. Si $x < K$ entonces, como $(x^2)^{k-1} \geqslant 1$ se tiene $x^n = (x^2)^{k-1}x \leqslant x < M$.

Entornos del infinito

Con el fin de unificar todo este "batiburrillo" de definiciones de límite que nos acaban de aparecer, completemos la noción de entorno, definiendo los entornos del infinito.

Definición 5.9.

(I) Llamamos *entorno (perforado)* centrado en ∞ al conjunto

$$E(\infty, \delta) = \dot{E}(\infty, \delta) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x > \frac{1}{\delta} \right\},$$

es decir, al intervalo $(1/\delta, \infty)$.

(II) Llamamos *entorno (perforado)* centrado en $-\infty$ al conjunto

$$E(-\infty, \delta) = \dot{E}(-\infty, \delta) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x < -\frac{1}{\delta} \right\},$$

es decir, al intervalo $(-\infty, -1/\delta)$.

Obsérvese que para los puntos del infinito no se hace distinción entre entornos perforados y no perforados, ya que los entornos los consideraremos siempre como conjuntos de números reales y, por tanto, no contendrán a ∞ ni a $-\infty$.

Hagamos notar también que, en este caso, cuando escribimos $x \in E(\infty, \delta)$ estamos diciendo que $x > M$, donde $M = 1/\delta$. Cuando escribimos $x \in E(-\infty, \delta)$, estamos diciendo en cambio que $x < M$, donde $M = -1/\delta$.

Motivacion de la definición

Puede chocar que en la definición se utilice $1/\delta$ o $-1/\delta$ en lugar de simplemente δ. Es decir, ¿no sería más sencillo definir por ejemplo $E(\infty, \delta) = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > \delta \}$? Aparentemente sí, pero la opción que hemos elegido es en el fondo mejor. Por ejemplo, definiéndolo en la forma que hemos elegido, si cogemos un $\delta > 0$ más pequeño, podemos asegurar que el conjunto $E(\infty, \delta)$ (o el $E(-\infty, \delta)$) se hará más pequeño también. Es decir, los entornos de ∞ y $-\infty$ se van a comportar de la misma manera que los entornos de números reales. Resumiendo,

Proposición 5.10. *Sea $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $0 < \delta_1 < \delta_2$, entonces*

$$E(a, \delta_1) \subset E(a, \delta_2) \quad \textit{y, por tanto,} \quad \dot{E}(a, \delta_1) \subset \dot{E}(a, \delta_2).$$

Puntos de acumulación en la recta ampliada

Teniendo en cuenta la definición que hemos dado de entorno de un número real, la definición de punto de acumulación se puede volver a realizar utilizando entornos. Optaremos por ampliar esta a puntos de toda la recta ampliada. Extendiendo lo obtenido en la Proposición 5.6, podemos decir que un punto de acumulación del conjunto A es aquel que cumple que cada uno de sus entornos perforados contiene puntos de A. Es decir,

Definición 5.11. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que $a \in \overline{\mathbb{R}}$ es un punto de acumulación de A si, cualquiera que sea $\delta > 0$, el conjunto $A \cap \dot{E}(a, \delta)$ no es vacío. En este caso, se denotará $a \in A'$.

Teniendo en cuenta la definición de los entornos de ∞ y $-\infty$, en el caso en que a es uno de estos dos puntos, la situación es particularmente sencilla.

Proposición 5.12. *Sea $A \subset \mathbb{R}$.*

(I) *∞ es un punto de acumulación de A si, y solo si, A no está acotado superiormente.*

(II) *$-\infty$ es un punto de acumulación de A si, y solo si, A no está acotado inferiormente.*

Obsérvese que cuando A no está acotado y escribimos el conjunto A', este último puede tener dos significados diferentes: según la definición 5.1 A' no contiene a los puntos ∞ y $-\infty$; según la definición 5.11, en cambio, alguno de estos dos puntos sí que estará en A'. La mayoría de las veces, esto no llevará a confusión, pues el contexto dejará claro en cada caso cómo lo debemos entender. Si manejamos elementos de $\overline{\mathbb{R}}$, entonces A' contendrá puntos del infinito; si nos movemos en $\mathbb{R}$, en cambio, no los contendrá.

Con la nomenclatura que hemos introducido, el Teorema de Bolzano-Weierstrass para conjuntos infinitos tiene un enunciado particularmente simple.

Teorema 5.13. *Todo conjunto infinito en $\overline{\mathbb{R}}$ tiene un punto de acumulación.*

Caracterización de los límites mediante entornos.

Se comprueba fácilmente (analizando caso a caso) que, con la definición que hemos dado de entornos de ∞ y $-\infty$, la caracterización de los límites dada en la Proposición 5.7 sigue siendo cierta cuando pasamos a límites infinitos y en el infinito. Es decir,

Proposición 5.14. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, y $a, l \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a \in A'$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *El punto l es límite de f en a.*

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$ entonces $f(x) \in E(l,\varepsilon)$.*

La ventaja de esta proposición es que nos da una *única* definición para todo tipo de límites, cuando antes teníamos nueve definiciones diferentes. Ello nos permitirá probar los resultados sobre límites para todos ellos de una vez, sin tener que estudiar casos distintos.

Unicidad del límite, otra vez

Ya hemos visto, en el caso de límites finitos en puntos de la recta real (Proposicion 5.4), que el límite de una función en un punto puede no existir, pero si existe es único. Veremos a continuación que esto sigue siendo cierto cuando consideramos límites infinitos. Primero enunciemos un resultado técnico que está en el núcleo de la demostración de 5.4: Si a y b son dos puntos diferentes, podemos definir "muy cerca" de forma que no exista ningún punto que esté a la vez "muy cerca" de a y de b.

Lema 5.15. *Sean $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$. Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = \varnothing$.*

Demostración. Supongamos, por ejemplo, que $a < b$. Deberemos comprobar varios casos.

Caso 1: $a, b \in \mathbb{R}$. (Este es el caso que se recogía en la demostración de la Proposición 5.4.) Elijamos $\varepsilon = (b-a)/2$. Entonces $a + \varepsilon = b - \varepsilon = (a+b)/2$, de donde

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing.$$

Caso 2: $a = -\infty$, $b = \infty$. Escojamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$. Entonces

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (-\infty, -1) \cap (1, \infty) = \varnothing.$$

Caso 3: $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$. Si $a \leqslant 0$, definimos $\varepsilon = 1$. Se tiene entonces

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (a-1, a+1) \cap (1, \infty) = \varnothing,$$

ya que $a + 1 \leqslant 1$. Si, por el contrario, se tiene $a > 0$, definimos $\varepsilon = 1/(a+1)$. Como $\varepsilon < 1$, tenemos

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (a+1, \infty) = \varnothing.$$

Caso 4: $a = -\infty$, $b \in \mathbb{R}$. Si $b \geqslant 0$, definimos $\varepsilon = 1$. Se tiene entonces

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (\infty, -1) \cap (b-1, b+1) = \varnothing,$$

ya que $b-1 \geqslant -1$. Si, por el contrario, se tiene $b<0$, definimos $\varepsilon = 1/(1-b)$. Como $\varepsilon < 1$, tenemos

$$E(a,\varepsilon) \cap E(b,\varepsilon) = (-\infty, b-1) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \varnothing. \qquad \square$$

Proposición 5.16. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A' \subset \overline{\mathbb{R}}$, $l_1, l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \qquad y \qquad \lim_{x\to a} f(x) = l_2$$

entonces $l_1 = l_2$.

Demostración. Supongamos que $l_1 \neq l_2$. Por el Lema 5.15, podemos escoger un $\varepsilon > 0$ tal que $E(l_1,\varepsilon) \cap E(l_2,\varepsilon) = \varnothing$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = l_1$, existe un $\delta_1 > 0$ tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta_1)$ entonces $f(x) \in E(l_1,\varepsilon)$. Como $\lim_{x\to a} f(x) = l_2$, existe un $\delta_2 > 0$ tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta_2)$ entonces $f(x) \in E(l_2,\varepsilon)$. Sea ahora $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $x \in \dot{E}(a,\delta)$, se tendrá tanto $x \in \dot{E}(a,\delta_1)$ como $x \in \dot{E}(a,\delta_2)$. En consecuencia, tendremos que $f(x) \in E(l_1,\varepsilon) \cap E(l_2,\varepsilon)$. Esto no puede ser, porque esta última intersección es vacía. Por tanto, deberá ser $l_1 = l_2$. $\square$

Caracterización de los límites de sucesiones mediante entornos

Merece ahora la pena dar una caracterización del límite mediante entornos, también para sucesiones.

Corolario 5.17. *Sean (s_n) una sucesión y $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:*

(I) $\lim_n s_n = l$.

(II) *Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $s_n \in E(l,\varepsilon)$.*

Demostración. No es más que la proposición 5.14 en el caso particular en que $A = \mathbb{N}$ y $a = \infty$. $\square$

Caracterización de los puntos de acumulación mediante sucesiones

Los puntos de acumulación pueden ser caracterizados como aquellos que son límites de sucesiones. Para probar esto veamos antes un resultado técnico.

Lema 5.18. *Sea $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Si una sucesión (s_n) verifica que $s_n \in E(l, 1/n)$, entonces $\lim_n s_n = l$.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Si $n \geqslant n_0$ será

$$s_n \in E\Big(1, \frac{1}{n}\Big) \subset E\Big(1, \frac{1}{n_0}\Big) \subset E(1,\varepsilon).$$

En consecuencia, por el Corolario 5.17 la sucesión (s_n) converge hacia l. $\square$

Proposición 5.19. *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Entonces a es un punto de acumulación de A en $\overline{\mathbb{R}}$ si, y solo si, existe una sucesión (s_n) de puntos de A distintos de a que tiene por límite el punto a.*

Demostración. Supongamos primero que a es un punto de acumulación de A. Para todo $n \in \mathbb{N}$, por la Definición 5.11, existe un $s_n \in A$ tal que $s_n \in \dot{E}(a, 1/n)$. Por el Lema 5.18, la sucesión (s_n) así construida tiene a por límite y además $s_n \in A\backslash\{a\}$ para todo n.

Por otro lado, si existe una sucesión (s_n) en $A\backslash\{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$, cualquiera que sea $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $s_n \in E(a, \varepsilon)$. En particular, $s_{n_0} \in A \cap \dot{E}(a, \varepsilon)$ y así $A \cap \dot{E}(a, \varepsilon) \neq \varnothing$. Por la Definición 5.11, a es un punto de acumulación de A. $\square$

El Criterio Secuencial

El concepto de límite de función que estamos viendo en este tema está en realidad muy relacionado con el ya anteriormente estudiado para sucesiones. Esto nos permitirá en lo sucesivo aprovechar todo lo ya conocido sobre límites de sucesiones para obtener resultados sobre límites de funciones.

Teorema 5.20 (Criterio Secuencial, para límites de funciones). *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A en $\overline{\mathbb{R}}$ y $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Son equivalentes:*

(I) $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

(II) *Para toda sucesión (s_n) de puntos de $A\backslash\{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica $\lim_n f(s_n) = l$.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. Por la Proposición 5.14, dado un $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$ entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. Sea (s_n) una sucesión en $A\backslash\{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$. Entonces, por la Proposición 5.17, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n \in \dot{E}(a, \delta)$ si $n \geqslant n_0$. Esto implica que $f(s_n) \in E(l, \varepsilon)$ si $n \geqslant n_0$. Es decir, teniendo en cuenta de nuevo la Proposición 5.17, hemos probado que $\lim_n f(s_n) = l$.

Para el recíproco, supongamos que l *no es* el límite de f en el punto a. Entonces, por la Proposición 5.14, existe un $\varepsilon > 0$ de forma que, para todo $\delta > 0$, existe un $x \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$ tal que $f(x) \notin E(l, \varepsilon)$. En particular, para este $\varepsilon > 0$ fijo, dado cualquier $n \in \mathbb{N}$, existe un $s_n \in A \cap \dot{E}(a, 1/n)$ tal que $s_n \notin E(l, \varepsilon)$. Claramente, por el Lema 5.18, la sucesión (s_n) así construida tiene por límite a, pero, por la proposición 5.14, la sucesión imagen $(f(s_n))$ no tiene límite l. $\square$

Ejemplos.

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}$ no existe.

  Sea $f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$, y sea $s_n = 1/n$. Obviamente, la sucesión (s_n) converge a 0. Además, $\lim_n f(s_n) = \lim_n n = \infty$. Por otro lado, si consideramos la sucesión $t_n = -1/n$, también se tiene $\lim_n t_n = 0$, pero en este caso $\lim_n f(t_n) = -\lim_n n = -\infty$.

  Esto indica que el límite propuesto no existe porque, si existiera y valiera l, el Criterio Secuencial 5.20 obligaría a las sucesiones $(f(s_n))$ y $(f(t_n))$ a tener ambas límite l. Es decir, ambas sucesiones deberían tener el mismo límite, cosa que no ocurre: una tiende a ∞ y la otra a $-\infty$.

- $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ no existe.

  La misma filosofía puede ser empleada para demostrar la no existencia de este límite. Sea $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x}$ para $x \neq 0$. Sea $s_n = 1/n\pi$ para $n \in \mathbb{N}$. Obviamente, $s_n \to 0$. Además, $f(s_n) = \operatorname{sen}(1/(1/n\pi)) = \operatorname{sen}(n\pi) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim_n f(s_n) = 0$. Por otro lado, si definimos $t_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, entonces se tiene de nuevo $t_n \to 0$, pero en esta ocasión $f(t_n) = \operatorname{sen}(\pi/2 + 2n\pi) = 1$. Por tanto, $\lim_n f(t_n) = 1$.

1.5. Cálculo de límites

Operaciones algebraicas

Utilizaremos a continuación el Criterio Secuencial para demostrar con facilidad reglas de manejo de límites que ya disponíamos para límites de sucesiones.

Proposición 5.21. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A en $\overline{\mathbb{R}}$, $c \in \mathbb{R}$ y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Se tiene:*

(I) $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ *si estos últimos límites existen y su suma está definida en $\overline{\mathbb{R}}$.*

(II) $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$*, con el convenio $0 \cdot \infty = 0 \cdot (-\infty) = 0$.*

(III) $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$*, si estos últimos límites existen y su producto está definido en $\overline{\mathbb{R}}$.*

(IV) $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f(x)/\lim_{x\to a} g(x)$*, si estos últimos límites existen y su cociente está definido en $\overline{\mathbb{R}}$.*

Demostración. Probaremos tan solo el primer apartado, por ser los demás similares. Supongamos que se cumple $\lim_{x\to a} f(x) = l$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l'$ y que la suma $l+l'$ tiene sentido en la recta ampliada. Entonces, por el Criterio Secuencial, dada una sucesión (s_n) en $A\backslash\{a\}$ tal que $s_n \to a$, será $f(s_n) \to l$ y $g(s_n) \to l'$, de donde $f(s_n)+g(s_n) \to l+l'$. Teniendo en cuenta de nuevo el Criterio Secuencial, hemos probado así que $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = l + l'$. □

Ejemplos.

- $$\lim_{x\to a} x^2 = \lim_{x\to a} x \cdot \lim_{x\to a} x = a^2.$$

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)(x^3 - 4) &= \lim_{x\to 2}(x^2 + 1) \lim_{x\to 2}(x^3 - 4)\\ &= (\lim_{x\to 2} x^2 + 1)(\lim_{x\to 2} x^3 - 4)\\ &= \big((\lim_{x\to 2} x)^2 + 1\big)\big((\lim_{x\to 2} x)^3 - 4\big)\\ &= (2^2 + 1)(2^3 - 4) = 20.\end{aligned}$$

- $$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4}{x^2 + 1} = \frac{\lim_{x\to 2}(x^3 - 4)}{\lim_{x\to 2}(x^2 + 1)} = \frac{4}{5}.$$

Acotación local y límite cero

Proposición 5.22. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A en $\overline{\mathbb{R}}$, y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$. Supongamos que:*

(I) *La función f está localmente acotada en a, es decir, existen un $\delta > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in A \cap E(a, \delta)$.*

(II) $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.

Entonces $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Demostración. Sea (s_n) una sucesión en $A\backslash\{a\}$ tal que $s_n \to a$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $s_n \in E(a, \delta)$. Por la acotación de f en $E(a, \delta)$, esto implica que la sucesión $(f(s_n))$ está acotada. Por otro lado, como $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, el Criterio Secuencial 5.20 dice que $\lim_n g(s_n) = 0$. En consecuencia, $\lim_n f(s_n)g(s_n) = 0$. Resulta así que $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$. □

Ejemplos.

- $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 0.$
  En efecto, $\lim_{x\to 0} x = 0$ y la función $\operatorname{sen}(1/x)$ está acotada. Por tanto el producto de ambas funciones debe tener límite nulo.

- $\lim_{x\to 0} x\left(x^2 + \operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right) = 0.$
  En este caso, podemos llegar a la misma conclusión a partir del resultado anterior. Observemos, sin embargo, que en este caso la función $x^2 + \operatorname{sen}(1/x) \geqslant x^2 - 1$ no está acotada; pero sí que está localmente acotada en el 0 (lo que resulta suficiente), ya que si $x \in (-1,1)$ resulta que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Cambios de variable

La siguiente proposición proporciona una utilísima técnica para el cálculo de límites.

Teorema 5.23 (Cambio de variable, para límites de funciones)**.** *Sean A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$, a y b puntos de acumulación en $\overline{\mathbb{R}}$ de A y B respectivamente, y sea $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Sean $f\colon B \to \mathbb{R}$ y $u\colon A \to \mathbb{R}$ tales que $u(A) \subset B$. Supongamos que*

$$\lim_{x\to a} u(x) = b \qquad y \qquad \lim_{y\to b} f(y) = l.$$

Si $b \notin u(A)$, entonces $\lim_{x\to a} f(u(x)) = l$.

Demostración. Sea (s_n) una sucesión en $A\backslash\{a\}$ tal que $s_n \to a$. Por el Criterio Secuencial 5.20, dado que $\lim_{x\to a} u(x) = b$, será $\lim_n u(s_n) = b$. Teniendo en cuenta que $b \notin u(A)$, la sucesión $(u(s_n))$ tiene sus términos en $B\backslash\{b\}$. Como, además, $\lim_{y\to b} f(y) = l$, de nuevo por el Criterio Secuencial 5.20, tendrá que ser $\lim_n f(u(s_n)) = l$. Teniendo en consideración otra vez el Criterio Secuencial 5.20, queda probado que $\lim_{x\to a} f(u(x)) = l$. □

Ejemplos.

- $\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = 0.$
  Basta hacer el cambio de variable $u = -1/x^2$, o, traducido al lenguaje del enunciado, definir la función $u\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, dada por $u(x) = -1/x^2$. Vemos que $\lim_{x\to 0} u(x) = -\infty$, de donde

  $$\lim_{x\to 0} e^{-1/x^2} = \lim_{u\to -\infty} e^u = 0.$$

  Obsérvese que en este caso 0 no pertenece a la imagen de $u(x) = -1/x^2$, lo que nos ha permitido aplicar el Teorema de Cambio de Variable 5.23.

- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$.

  Si hacemos el cambio de variable $u = 1/x$, entonces

  $$\lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{u\to 0} u \operatorname{sen} \tfrac{1}{u} = 0.$$

  También en este caso se cumple que ∞ no está en la imagen de $u(x) = 1/x$.

Condiciones para poder aplicar el cambio de variable

Observación. La hipótesis adicional $b \notin u(A)$ es suficiente, aunque no es necesaria para que se verifique la tesis. Bastaría también, por ejemplo, que u fuese inyectiva (o incluso que tomase el valor b solamente un número finito de veces). También bastaría que $b \in B$ y $l = f(b)$. (Como veremos más adelante, esta condición equivale a que f sea continua en b.) Sin embargo, no puede garantizarse la validez del resultado final sin alguna condición adicional.

Ejemplo. Considérese el caso de las funciones definidas en $\mathbb{R}$ por

$$u(x) = 0, \qquad f(y) = \begin{cases} 0, & y \neq 0, \\ 1, & y = 0. \end{cases}$$

Entonces $f(u(x)) = 1$ para todo x, y así

$$\lim_{x\to 0} u(x) = 0, \quad \lim_{y\to 0} f(y) = 0, \quad \text{pero} \quad \lim_{x\to 0} f(u(x)) = 1.$$

Podemos comprobar que el Teorema de Cambio de Variable 5.23 no funciona en este caso porque $0 \in u(\mathbb{R})$.

Algunas relaciones útiles

A veces es útil en el cálculo de límites tener en cuenta las siguientes consecuencias inmediatas de la definición de límite.

Proposición 5.24. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, a un punto de acumulación de A en $\overline{\mathbb{R}}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$.*

(I) $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *si, y solo si,* $\lim_{x\to a} |f(x) - l| = 0$.

(II) *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, *entonces* $\lim_{x\to a} |f(x)| = |l|$. *El recíproco solo es cierto, en general, cuando $l = 0$.*

(III) *Si $a \in \mathbb{R}$,* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ *si, y solo si,* $\lim_{t\to 0} f(a + t) = l$. *(Esto es un caso particular de cambio de variable.)*

1.6. Límites laterales

Puntos de acumulación por la derecha y por la izquierda

Si en las definiciones de límites añadimos una de las dos condiciones $x > a$, $x < a$, entonces se habla de límites laterales (por la derecha y por la izquierda, respectivamente). Se emplean las notaciones $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Para definir estos límites con precisión necesitaremos un concepto auxiliar previo.

Definición 5.25. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

(I) Decimos que a es un *punto de acumulación por la derecha* de A, si $a \in (A \cap (a, \infty))'$. Lo escribiremos entonces $a \in A'_+$.

(II) Decimos que a es un *punto de acumulación por la izquierda* de A, si $a \in (A \cap (-\infty, a))'$. Lo escribiremos entonces $a \in A'_-$.

(III) Decimos que a es un *punto de acumulación bilátero* de A si lo es tanto por la derecha como por la izquierda, es decir, $a \in A'_+ \cap A'_-$.

La idea intuitiva respecto a que un punto a sea de acumulación por la derecha de un conjunto A es que a tenga puntos de A arbitrariamente cerca, pero *a su derecha*.

Obsérvese que un punto es de acumulación de A si, y solo si, lo es por la derecha o por la izquierda, es decir, $A' = A'_- \cup A'_+$. Esto implica que un punto de acumulación puede ser de tres clases:

- un punto de $A'_+ \backslash A'_-$,
- un punto de $A'_- \backslash A'_+$, o
- un punto de $A'_+ \cap A'_-$, es decir, un punto de acumulación bilátero.

Ejemplo. Si $A = [0, 1]$, todos los puntos de $(0, 1)$ son puntos de acumulación tanto por la derecha como por la izquierda. En cambio, 0 es punto de acumulación por la derecha, pero no por la izquierda. 1 es punto de acumulación por la izquierda, pero no por la derecha.

Límites laterales

Primero enunciamos la definición en el caso finito. La idea es que el valor de la función se acerca a l cuando nos acercamos a a, pero *solo desde uno de los lados* (derecha o izquierda).

Definición 5.26. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A y $l \in \mathbb{R}$.

(I) Si $a \in A'_+$, decimos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $0 < x - a < \delta$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

(II) Si $a \in A'_-$, decimos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A$ y $-\delta < x - a < 0$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

A continuación, volvemos a realizar esta definición, pero esta vez *con entornos*, lo que nos permite ampliar el concepto también a los casos infinitos.

Definición 5.27. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

(I) Si $a \in A'_+$, decimos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A \cap E(a,\delta) \cap (a,\infty)$, entonces $f(x) \in E(l,\varepsilon)$.

(II) Si $a \in A'_-$, decimos que $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A \cap E(a,\delta) \cap (-\infty,a)$, entonces $f(x) \in E(l,\varepsilon)$.

Límites laterales como límites ordinarios

Obsérvese que, si $a \in A'_+$, entonces $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$, donde $g = f|_{A\cap(a,\infty)}$, y, si $a \in A'_-$, entonces $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} h(x)$ donde $h = f|_{A\cap(-\infty,a)}$. Esto quiere decir que los límites laterales son en el fondo límites ordinarios de funciones. En consecuencia, las propiedades básicas y métodos de cálculo existentes para los límites ordinarios son también válidos para los límites laterales.

Ejemplos.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^2$.

  Si la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = x^2$, entonces se tiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$, donde $g = f|_{(0,\infty)}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = x^2$. Es decir, $\lim_{x\to 0^+} x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}$.

  Definamos la función $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ por $f(x) = 1/x$. Tenemos entonces que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x)$, donde $g = f|_{(0,\infty)}\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x) = 1/x$. O sea, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \infty$.

Relación entre límites laterales y límite

La principal aplicación de los límites laterales es la siguiente:

Proposición 5.28. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A.*

(I) *Si $a \in A'_+ \backslash A'_-$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si, y solo si, existe $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y, en ese caso, ambos límites son iguales.*

(II) *Si $a \in A'_- \backslash A'_+$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si, y solo si, existe $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y, en ese caso, ambos límites son iguales.*

(III) *Si $a \in A'_+ \cap A'_-$, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si, y solo si, existen tanto $\lim_{x\to a^+} f(x)$ como $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y, además,*

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

En este caso, los tres límites coinciden.

Demostración. Probaremos solo (III), ya que los otros apartados son similares (pero más sencillos). Supongamos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = l$. Sea $\varepsilon > 0$. Por ser $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, existe un $\delta_+ > 0$ tal que si $x \in A \cap E(a, \delta_+) \cap (a, \infty)$ entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. Por otro lado, por ser $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$, existe un $\delta_- > 0$ tal que si $x \in A \cap E(a, \delta_-) \cap (-\infty, a)$ entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. Definamos ahora $\delta = \min\{\,\delta_+, \delta_-\,\}$. Si $x \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$, según que x sea mayor o menor que a, tendrá que darse una de las dos posibilidades

$$x \in A \cap E(a, \delta) \cap (a, \infty) \subset A \cap E(a, \delta_+) \cap (a, \infty)$$

o

$$x \in A \cap E(a, \delta) \cap (-\infty, a) \subset A \cap E(a, \delta_-) \cap (-\infty, a).$$

En cualquier de los dos casos, habrá de ser $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. Hemos probado así que $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Recíprocamente si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, dado $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$, entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. En particular, si $x \in A \cap E(a, \delta) \cap (-\infty, a)$ deberá ser entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon)$. Es decir, hemos demostrado que $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$. Se prueba de forma análoga que $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$. $\square$

Ejemplos.

- La función *signo*.

La función *signo* viene definida por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Como a la derecha de 0 la función signo siempre vale 1, se obtiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = \lim_{x\to 0} (\operatorname{sgn}|_{(0,\infty)})(x) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Del mismo modo, se tiene que $\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$. Por tanto, no existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$.

- $f(x) = e^{1/x}$ para $x \neq 0$.

  Utilizando el cambio de variable $u\colon (0,\infty) \to (0,\infty)$, dado por $u(x) = 1/x$, y teniendo en cuenta que $\lim_{x\to 0} u(x) = \infty$, obtenemos que

  $$\lim_{x\to 0^+} e^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{1/x}|_{(0,\infty)} = \lim_{u\to\infty} e^u = \infty.$$

  En cuanto al límite por la izquierda, si realizamos el mismo cambio de variable, pero esta vez en $(-\infty, 0)$, es decir, tomamos $v\colon (-\infty,0) \to (-\infty,0)$, con $v(x) = 1/x$, tendremos ahora $\lim_{x\to 0} v(x) = -\infty$, con lo que

  $$\lim_{x\to 0^-} e^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{1/x}|_{(-\infty,0)} = \lim_{v\to -\infty} e^v = 0.$$

  La conclusión es que no existe el límite en el 0.

- $f(x) = \dfrac{1}{e^{1/x}+1}$.

  Tenemos, según el ejemplo anterior,

  $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) &= \frac{1}{\lim_{x\to 0^+} e^{1/x}+1} = \frac{1}{\infty+1} = 0, \\ \lim_{x\to 0-} f(x) &= \frac{1}{\lim_{x\to 0^-} e^{1/x}+1} = \frac{1}{0+1} = 1, \end{aligned}$$

  así que de nuevo no existe el límite en el 0.

Funciones monótonas y límites laterales

Vemos a continuación que las funciones monótonas tienen límites laterales en todos los puntos. Esto es una variante para funciones del Teorema de la Convergencia Monótona de Weierstrass.

Proposición 5.29. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ creciente y $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(I) *Si $a \in A'_-$, entonces f tiene límite por la izquierda en a (finito o infinito) y es*
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \sup\{\, f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, a)\,\}.$$
Si, además, $a \neq \sup A$, entonces el límite lateral $\lim_{x\to a^-} f(x)$ es finito y se cumple la desigualdad $\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant f(y)$, cualquiera que sea $y \in A$ con $y \geqslant a$.

(II) *Si $a \in A'_+$, entonces f tiene límite por la derecha en a (finito o infinito) y es*
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf\{\, f(x) \mid x \in A \cap (a, \infty)\,\}.$$
Si, además, $a \neq \inf A$, entonces el límite lateral $\lim_{x\to a^+} f(x)$ es finito y se cumple la desigualdad $f(y) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x)$, cualquiera que sea $y \in A$ con $y \leqslant a$.

(III) *Si $a \in A'_- \cap A'_+$, los dos límites laterales son finitos, y además se cumple*
$$\lim_{x\to a^-} f(x) \leqslant \lim_{x\to a^+} f(x).$$

Demostración. Probemos primero (I). Observemos en primer lugar que en este caso a no puede ser $-\infty$. Definamos $\alpha = \sup\{\, f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, a)\,\}$ y sea $\varepsilon > 0$. Sea β el extremo izquierdo de $E(\alpha, \varepsilon)$, es decir, definimos $\beta = \alpha - \varepsilon$ si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $\beta = 1/\varepsilon$ si $\alpha = \infty$. Por la definición de α como supremo, y teniendo en cuenta que $\beta < \alpha$, existe algún $r \in A \cap (-\infty, a)$ tal que $f(r) > \beta$. Elijamos ahora $\delta > 0$ tal que $E(r, \delta) \cap E(a, \delta) = \varnothing$ (y por tanto $r \notin E(a, \delta)$). Observamos que si $x \in E(a, \delta)$ necesariamente ha de ser $x > r$. (De no ser así, sería $x \leqslant r < a$, y como $E(a, \delta)$ es un intervalo, y $x, a \in E(a, \delta)$, obtendríamos que $r \in E(a, \delta)$, lo que es una contradicción.) Por tanto, si $x \in A \cap E(a, \delta) \cap (-\infty, a)$, tendremos $r < x$, de donde $\beta < f(r) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, por ser f creciente. En consecuencia, si $x \in A \cap E(a, \delta) \cap (-\infty, a)$ entonces $f(x) \in E(\alpha, \varepsilon)$. Hemos probado de esta manera que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \alpha$.

Algo que deducimos de lo que acabamos de probar es que, al ser este límite por la izquierda igual a un supremo, podrá ser ∞ o un número real, pero nunca $-\infty$.

Si, además, $a \neq \sup A$, fijemos un $y \in A$ tal que $a \leqslant y$. Entonces para todo $x \in A \cap (-\infty, a)$ se tiene $x < y$, así que $f(x) \leqslant f(a)$. De aquí que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \sup\{f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, a)\} \leqslant f(y).$$

Esto nos indica que $\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \infty$, así que el límite por la izquierda es en este caso finito.

La demostración de (II) es análoga.

En cuanto a (III), observemos en primer lugar que un punto de acumulación bilátero de A no puede ser $\inf A$ ni $\sup A$. Por tanto, los apartados anteriores nos dicen que en este caso ambas derivadas laterales son finitas. Además, empleando (I), para todo $y \in A \cap (a\infty)$ deberá cumplirse que $\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant f(y)$. Empleando ahora (II) se obtiene que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \leqslant \inf\{\, f(y) \mid y \in A \cap (a, \infty)\}\, \} = \lim_{x \to a^+} f(x). \qquad \square$$

La variante para funciones decrecientes, que enunciamos a continuación, se demuestra de igual manera.

Proposición 5.30. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ decreciente y $a \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(I) *Si $a \in A'_-$, entonces f tiene límite por la izquierda en a (finito o infinito) y es*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \inf\{\, f(x) \mid x \in A \cap (-\infty, a)\,\}.$$

Si, además, $a \neq \sup A$, entonces el límite lateral $\lim_{x \to a^-} f(x)$ es finito y se cumple la desigualdad $\lim_{x \to a^-} f(x) \geqslant f(y)$, cualquiera que sea $y \in A$ con $y \geqslant a$.

(II) *Si $a \in A'_+$, entonces f tiene límite por la derecha en a (finito o infinito) y es*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \sup\{\, f(x) \mid x \in A \cap (a, \infty)\,\}.$$

Si, además, $a \neq \inf A$, entonces el límite lateral $\lim_{x \to a^+} f(x)$ es finito y se cumple la desigualdad $f(y) \geqslant \lim_{x \to a^+} f(x)$, cualquiera que sea $y \in A$ con $y \leqslant a$.

(III) *Si $a \in A'_- \cap A'_+$, los dos límites laterales son finitos, y además se cumple*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \geqslant \lim_{x \to a^+} f(x).$$

Funciones monótonas sobre intervalos y límites laterales

En el caso particular en que el dominio de nuestra función monótona es un intervalo, aplicando los resultados anteriores observamos que la situación es particularmente sencilla.

Corolario 5.31. *Sea I un intervalo con extremos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, donde $a < b$. Si la función $f\colon I \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces los dos límites laterales de f existen en todos los puntos de (a, b), y además son finitos. En los extremos del intervalo, nuestra función f tiene un solo límite lateral (que puede o no ser finito).*

1.7. Límites de funciones elementales

Límites habituales

(I) Si $f(x)$ representa una cualquiera de las funciones e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,cos} x$, $\operatorname{arc\,tan} x$, x^r, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

(II) Otros límites son los siguientes:

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 & \qquad \lim\limits_{x\to\infty} e^x = \infty & \\
\lim\limits_{x\to 0^+} \log x = -\infty & \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \log x = \infty & \\
\lim\limits_{x\to(\pi/2)^-} \tan x = \infty & \qquad \lim\limits_{x\to(-\pi/2)^+} \tan x = -\infty & \\
\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arc\,tan} x = -\dfrac{\pi}{2} & \qquad \lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{arc\,tan} x = \dfrac{\pi}{2} & \\
\lim\limits_{x\to 0^+} x^r = 0 & \qquad \lim\limits_{x\to\infty} x^r = \infty & \qquad (r > 0) \\
\lim\limits_{x\to 0^+} x^r = \infty & \qquad \lim\limits_{x\to\infty} x^r = 0 & \qquad (r < 0).
\end{array}$$

(III) Si $f(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0$ es un polinomio (con $r \in \mathbb{N}$ y $a_r \neq 0$), entonces

$$\begin{array}{ll}
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty, & \qquad \text{si} \quad a_r > 0, \\
\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty, & \qquad \text{si} \quad a_r < 0.
\end{array}$$

Orden de infinitud

Se tiene el siguiente *orden de infinitud*, donde $a > 0$ y $b > 1$:

$$\log x \ll x^a \ll b^x \ll x^x, \qquad (x \to \infty).$$

Aquí, "$f(x) \ll g(x)$" cuando $x \to \infty$ significa que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Funciones equivalentes

Definición 5.32. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A, y $f, g \colon A \to \mathbb{R}$. Decimos que f es *equivalente* a g cuando x tiende a a, y escribimos

$$f(x) \sim g(x) \qquad (x \to a)$$

si se verifica $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Los resultados sobre sucesiones equivalentes se trasladan sin dificultad a funciones equivalentes.

Equivalencias habituales

(I) Equivalencia de infinitésimos: cuando $x \to 0$,

$$\begin{array}{rcr} e^x - 1 \sim x & \log(1+x) \sim x & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \\ \operatorname{sen} x \sim x & 1 - \cos x \sim x^2/2 & \tan x \sim x \\ \operatorname{arc\,sen} x \sim x & \arctan x \sim x & \end{array}$$

(II) Equivalencia de infinitos: Sea $p(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_0$, con $a_r \neq 0$. Cuando $x \to \infty$,

$$p(x) \sim a_r x^r$$
$$\log p(x) \sim r \log x, \quad \text{si } a > 0.$$

La justificación de estas equivalencias se dará más adelante.

1.8. Límites y desigualdades

Límite y orden

Proposición 5.33. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A, y $f\colon A \to \mathbb{R}$, tal que* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se tiene:*

(I) *Dado $c < l$, existe un $\delta > 0$, tal que*

$$c < f(x) \qquad \text{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a, \delta).$$

En otras palabras, cuando el límite de f en a es menor que c, también la función f se mantiene menor que c en los alrededores del punto a (aunque quizá no el mismo punto a).

(II) *Dado $c > l$, existe un $\delta > 0$, tal que*

$$c > f(x) \qquad \text{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a, \delta).$$

En otras palabras, cuando el límite de f en a es mayor que c, también la función f se mantiene mayor que c en los alrededores del punto a (aunque quizá no el mismo punto a).

Demostración. Probaremos (I) por reducción al absurdo. Supongamos que no se cumple. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$, existirá $s_n \in A \cap \dot{E}(a, 1/n)$ tal que $f(s_n) \leqslant c$. Por el Lema 5.18, está claro que $s_n \to a$; pero también está claro que $f(s_n) \nrightarrow l$, en contradicción con el Criterio Secuencial 5.20. □

Corolario 5.34. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A, y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, tales que* $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\lim_{x\to a} g(x) = l' \in \overline{\mathbb{R}}$. *Se tiene:*

(I) *Si $l > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que*

$$f(x) > 0 \qquad \text{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a, \delta).$$

(II) *Si $l < 0$, existe un $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) < 0 \qquad \text{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a, \delta).$$

(III) *Si $l < l'$, existe un $\delta > 0$, tal que*

$$f(x) < g(x) \qquad \text{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a, \delta).$$

Observación. En los dos resultados anteriores no se puede cambiar $<$ por $\leqslant$.

Monotonía del límite

Corolario 5.35. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones para las que $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l' \in \overline{\mathbb{R}}$. Si existe algún $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \textit{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a,\delta),$$

entonces $l \leqslant l'$.

Observación. En el resultado anterior, no se puede cambiar $\leqslant$ por $<$. Obsérvese que $0 < 1/n$ para todo n, pero al pasar al límite, obtenemos $0 = \lim_n 1/n$.

Teorema del Bocadillo

Proposición 5.36. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $f, g, h\colon A \to \mathbb{R}$ funciones tales que*

(I) *Existe un $\delta > 0$ de modo que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ para todo $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$.*

(II) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$.

Entonces $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Demostración. Basta aplicar el Criterio Secuencial 5.20 y el Teorema del Bocadillo para sucesiones 4.16. □

El Criterio de Comparación

Para límites infinitos tenemos también lo siguiente:

Proposición 5.37. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ funciones tales que existe un $\delta > 0$ tal que*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad \textit{para todo } x \in A \cap \dot{E}(a,\delta).$$

Entonces

(I) *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *también se tendrá* $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$.

(II) *Si* $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$, *también se tendrá* $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Demostración. Aplíquese el Criterio Secuencial 5.20y el Criterio de Comparación para sucesiones 4.40. □

1.9. La condición de Cauchy para funciones

El Criterio de Cauchy para funciones

Teorema 5.38 (Criterio de Cauchy)**.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *f tiene límite finito cuando x tiende al punto a.*

(II) *Se cumple la Condición de Cauchy: Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que, cualesquiera que sean $x, y \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$, se verifica $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

(III) *Para toda sucesión (s_n) de puntos de $A\backslash\{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$ se verifica que la sucesión $(f(s_n))$ es de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que se cumple la condición (I) y veamos que se cumple (II). Sea $\lim_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $x \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$, entonces $f(x) \in E(l, \varepsilon/2)$, es decir, $|f(x) - l| < \varepsilon/2$. Por tanto, cualesquiera que sean $x, y \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$, deberá tenerse

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - l| + |l - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

que es lo que se afirma en (II).

Comprobemos a continuación que si se cumple (II) también se cumple (III). Sea $\varepsilon > 0$. Si se cumple (II), existe un $\delta > 0$ tal que si $x, y \in A \cap \dot{E}(a, \delta)$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Sea (s_n) una sucesión en $A\backslash\{a\}$ tal que $s_n \to a$. Entonces existe un n_0 tal que si $n \geqslant n_0$ se cumple $s_n \in \dot{E}(a, \delta)$. Sean $m, n \geqslant n_0$. Entonces $s_m, s_n \in \dot{E}(a, \delta)$, de donde $|f(s_m) - f(s_n)| < \varepsilon$. Es decir, la sucesión $(f(s_n))$ es de Cauchy.

Por último, probaremos que la condición (III) implica la condición (I). Dada una sucesión (s_n) de puntos $A\backslash\{a\}$ tal que $\lim_n s_n = a$, como la sucesión $(f(s_n))$ es de Cauchy tendrá un límite l, posiblemente distinto para cada sucesión (s_n) elegida. Según el Criterio Secuencial 5.20, para completar la demostración será suficiente que probemos que $\lim_n f(s_n)$ es el mismo para todas las sucesiones (s_n).

Sean, pues, (t_n) y (u_n) sucesiones de puntos de $A\backslash\{a\}$ tales que $\lim_n t_n = \lim_n u_n = a$, y sean $l' = \lim_n f(t_n)$, $l'' = \lim_n f(u_n)$. La sucesión (s_n) definida por $s_{2n-1} = t_n$, $s_{2n} = u_n$ sigue siendo una sucesión de puntos de $A\backslash\{a\}$ con $\lim_n s_n = a$, luego $(f(s_n))$ será una sucesión convergente. Si l es su límite, como $(f(t_n))$ y $(f(u_n))$ son subsucesiones suyas, deberá cumplirse $l' = l'' = l$. $\square$

1.10. Límites de restricciones y extensiones de funciones

Límite a través de un conjunto

Proposición 5.39. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto de acumulación de A y $l \in \overline{\mathbb{R}}$.*

(I) *Si $B \subset A$, $a \in B'$, $g = f|_B$ y $\lim_{x\to a} f(x) = l$, también será $\lim_{x\to a} g(x) = l$.*

(II) *En el caso particular en que $B \supset A \cap \dot{E}(a,\eta)$ para algún $\eta > 0$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si, y solo si, $\lim_{x\to a} g(x) = l$.*

(III) *Supongamos que $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$ y $a \in A'_j$, $j = 1, 2, \dots, m$. Si definimos $f_j = f|_{A_j}$, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = l$ si, y solo si, $\lim_{x\to a} f_j(x) = l$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$.*

Demostración. Probemos (I). Si $\lim_{x\to a} f(x) = l$, dado un $\varepsilon > 0$, existirá un $\delta > 0$ tal que $f(x) \in E(l,\varepsilon)$ si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$. Como $B \subset A$ y g coindice con f sobre B, si $x \in B \cap \dot{E}(a,\delta)$, también será $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$, así que $g(x) = f(x) \in E(l,\varepsilon)$. Hemos probado así que $\lim_{x\to a} g(x) = l$.

Para demostrar (II), sea $\eta > 0$ como en el enunciado, y supongamos que $\lim_{x\to a} g(x) = l$. Sea $\varepsilon > 0$. Existirá un $\delta_1 > 0$ tal que $g(x) \in E(a,\varepsilon)$ si $x \in B \cap \dot{E}(a,\delta_1)$. Definamos $\delta = \min\{\eta, \delta_1\}$. Si $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$, será $x \in A \cap \dot{E}(a,\eta) \cap \dot{E}(a,\delta_1) \subset B \cap \dot{E}(a,\delta_1)$, de donde (teniendo en cuenta que f y g coinciden sobre B) será $f(x) = g(x) \in E(l,\varepsilon)$. En consecuencia, $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Para probar (III), bastará probar la implicación recíproca, ya que la implicación directa es un caso particular de (I). Supongamos, pues, que $\lim_{x\to a} f_j(x) = l$ para todo $j = 1, 2, \dots, m$. Sea $\varepsilon > 0$. Para cada j, existe un $\delta_j > 0$ tal que $f_j(x) \in E(l,\varepsilon)$ si $x \in A_j \cap \dot{E}(a,\delta_j)$. Definamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_m\}$. Supóngase que $x \in A \cap \dot{E}(a,\delta)$. Como $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m$, será $x \in A_j \cap \dot{E}(a,\delta) \subset A_j \cap \dot{E}(a,\delta_j)$ para algún j. Por tanto, $f(x) = f_j(x) \in E(l,\varepsilon)$. De esta manera, hemos obtenido que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. □

Notación. Suele escribirse

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in B}} f(x) \qquad \text{en lugar de} \qquad \lim_{x\to a} f|_B(x).$$

Se lee "Límite de $f(x)$ cuando x tiende a a a través de B".

Observación. Consideremos una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A'$, entonces

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A\cap(-\infty,a)}} f(x), \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A\cap(a,\infty)}} f(x)$$

Hagamos notar que el apartado 5.39 (III) dice en este caso lo mismo que 5.28.

Ejemplos.

- Consideremos la función "peine" de Dirichlet, definida en todo $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Todo $a \in \mathbb{R}$ es punto de acumulación tanto de $\mathbb{Q}$ como de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Utilizando el método expuesto en el resultado anterior, podemos mostrar fácilmente que f carece de límite en a. En efecto,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x \to a} 1 = 1, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

- Sea ahora

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

  En esta ocasión, tenemos

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x \to a} x = a, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \notin \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0.$$

  Esto quiere decir que el límite de f en a existe si $a = 0$. En los demás puntos no existe límite.

- Por último, sea

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, \infty), \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0), \\ x^2, & x \in (0, \infty)\backslash\mathbb{Q}, \\ -x^3, & x \in (-\infty, 0)\backslash\mathbb{Q}. \end{cases}$$

  Para abreviar, escribamos $A_1 = \mathbb{Q} \cap [0, \infty)$, $A_2 = \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0)$, $A_3 = (0, \infty)\backslash\mathbb{Q}$ y $A_4 = (-\infty, 0)\backslash\mathbb{Q}$. Sea $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Para estudiar la existencia del límite $\lim_{x \to a} f(x)$, habrá que distinguir btres casos: $a < 0$, $a > 0$ y $a = 0$

  Caso $a < 0$. Por (II) del Teorema 5.39, se cumplirá $\lim_{x \to a} f(x) = l$ si, y solo si, se cumple $\lim_{x \to a, x \in (-\infty, 0)} f(x) = l$. Obsérvese que $(-\infty, 0) = A_2 \cup A_4$ y que a es punto de acumulación tanto de A_2 como de A_4. Aplicando (III) del Teorema 5.39, nos bastará ver si existen y coinciden los límites de f a través de A_2 y de A_4. Tenemos que

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A_2}} f(x) = \lim_{x \to a} 0 = 0,$$

mientras que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_4}} f(x) = \lim_{x\to a}(-x^3) = -a^3.$$

Por tanto, vemos que ambos límites tienen siempre valores diferentes y llegamos a la conclusión de que en este caso no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

Caso $a > 0$. Consideraciones similares a las del caso anterior nos permiten considerar solamente los límites a través de A_1 y de A_3. Tenemos que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_1}} f(x) = \lim_{x\to a} x = a,$$

mientras que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A_3}} f(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2.$$

Por tanto, para que f tenga límite en a en este caso es necesario y suficiente que $a^2 = a$, es decir, que $a = 1$. Si esto se cumple, obtenemos que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1.$$

Caso $a = 0$. Observamos que $\mathbb{R} = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ y que 0 es punto de acumulación de los cuatro conjuntos, por lo que en este caso deberemos considerar cuatro límites. Obtenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A_1}} f(x) &= \lim_{x\to 0} x = 0,\\
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A_2}} f(x) &= \lim_{x\to 0} 0 = 0,\\
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A_3}} f(x) &= \lim_{x\to 0} x^2 = 0,\\
\lim_{\substack{x\to 0\\ x\in A_4}} f(x) &= \lim_{x\to 0}(-x^3) = 0.
\end{aligned}$$

Como los cuatro límites coinciden, deducimos que existe el límite en 0 y

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

2. Funciones continuas

2.1. Definición de continuidad

¿Qué es una función continua?

Definición 5.40. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Se dice que f es *continua* en el punto $a \in A$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ es $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Definición 5.41. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $S \subset A$. Se dice que $f\colon A \to \mathbb{R}$ es continua en el conjunto S si f es continua en todos los puntos de S. Si $S = A$, decimos simplemente que f es continua.

Caracterización de la continuidad mediante límites

La siguiente caracterización es inmediata a partir de las definiciones de límite y función continua.

Proposición 5.42. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$.*

(I) *Si a es un punto aislado de A, entonces f es continua en a (no importa cómo sea f).*

(II) *Si a es un punto de acumulación de A, entonces f es continua en a si, y solo si, existe* $\lim_{x\to a} f(x)$ *y es igual a* $f(a)$.

Algunas funciones continuas

Ejemplos.

- La función identidad, $f(x) = x$, es continua.
- La función valor absoluto, $f(x) = |x|$, es continua.
- Las funciones e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^r, son todas ellas continuas en sus respectivos dominios de definición.
- La '*función "peine" de Dirichlet*,

  $$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  no es continua en ningún punto.

  En efecto, si $a \in \mathbb{R}$, se tiene que $a \in \mathbb{Q}' \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})'$, y además $\lim_{x\to a,\, x\in\mathbb{Q}} f(x) = 1$, mientras que $\lim_{x\to a,\, x\notin\mathbb{Q}} f(x) = 0$. Por tanto, no existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

  es continua en el 0, pero discontinua en los demás puntos.

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  no es continua en 0.

  En efecto, ya vimos que esta función no tiene límite en el 0.

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  es continua en 0.

  Ello es debido a que la función identidad es continua en 0, mientras que $\operatorname{sen}(1/x)$ es acotada. En consecuencia,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0 = f(0).$$

- La *función de Thomae*, definida en $[0,1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, 1 \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad \text{m.\,c.\,d.}(p,q) = 1, \end{cases}$$

  tiene límite 0 en todos los puntos de $[0,1]$. En consecuencia, es continua en los irracionales, y discontinua en los racionales.

  Sea ε tal que $0 < \varepsilon < 1$. Entonces el conjunto de los elementos cuya imagen es mayor o igual que ε es el conjunto

$$E = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{N},\ \frac{1}{q} \geqslant \varepsilon,\ p < q \right\} \cup \{0, 1\},$$

  que claramente es un conjunto finito. Dado $a \in [0,1]$, definamos

$$\delta = \min\{\, |x - a| \mid x \in E \backslash \{a\} \,\} > 0.$$

  Si $0 < |x - a| < \delta$, entonces $x \notin E$, de donde $0 \leqslant f(x) < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

El Criterio Secuencial de Continuidad

Como consecuencia de la Proposición 5.42 y el Criterio Secuencial 5.20, obtenemos la siguiente caracterización de la continuidad en un punto:

Proposición 5.43 (Criterio Secuencial, para funciones continuas)**.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A$. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(I) *f es continua en a.*

(II) *Si (s_n) es una sucesión de puntos de A convergente al punto a, entonces la sucesión $(f(s_n))$ converge a $f(a)$.*

La segunda afirmación de la proposición anterior se puede escribir así: $\text{lím}_n f(s_n) = f(\text{lím}_n s_n)$. O sea, el resultado anterior nos dice que las funciones continuas son aquellas que son capaces de conmutar con el límite (cosa que ya sabíamos que ocurría para algunas funciones, como e^x, $\operatorname{sen} x$, $|x|$, etc.).

Propiedades algebraicas de las funciones continuas

Proposición 5.44. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A$, $c \in \mathbb{R}$, y supongamos que f y g son continuas en a. Entonces,*

(I) *$f + g$ es continua en a.*

(II) *cf es continua en a.*

(III) *fg es continua en a.*

(IV) *Si $g(a) \neq 0$, f/g es continua en a.*

Composición de funciones continuas

Proposición 5.45. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, $a \in A$, y supongamos que $f(A) \subset B$. Si f es continua en a y g es continua en $f(a)$, entonces la composición $g \circ f$ es continua en a.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión en A tal que $\text{lím}_n s_n = a$. Por ser f continua en a, será $\text{lím}_n f(s_n) = f(a)$. Como también g es continua en $f(a)$, tendrá que ser $\text{lím}_n (g \circ f)(s_n) = \text{lím}_n g(f(s_n)) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. Por tanto, $g \circ f$ es continua en a. $\square$

Supremo e ínfimo de funciones continuas

Proposición 5.46. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $a \in A$. Si f y g son continuas en a, también lo son* $\sup(f, g)$ *e* $\operatorname{ínf}(f, g)$.

Demostración. Es fácil comprobar que

$$\sup(f, g) = \frac{f + g + |f - g|}{2}, \qquad \operatorname{ínf}(f, g) = \frac{f + g - |f - g|}{2}. \qquad \square$$

Ejemplo. Utilizando las reglas anteriores, es fácil ver que la función

$$f(x) = \frac{\sqrt[5]{1 + x^3}}{x^4 + \operatorname{sen}^2 x}$$

es continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

En efecto, x^3 es una función continua por ser el triple producto de la función identidad, que es continua. Por tanto, también lo es la función $1 + x^3$, como suma de funciones continuas. Al componer con la raíz quinta, que es una función continua, obtenemos que el numerador $\sqrt[5]{1 + x^3}$ es una función continua. Por otra parte, también la función x^4 es continua. Lo mismo podemos decir de la función $\operatorname{sen} x$, así que su cuadrado $\operatorname{sen}^2 x$ resulta ser continuo. De esta forma obtenemos que el denominador $x^4 + \operatorname{sen}^2 x$ es una función continua. Como además no se anula en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, concluimos que la función f, que es cociente de funciones continuas en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ con denominador no nulo, es a su vez continua en $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

2.2. Teoremas fuertes de continuidad

El Teorema de Weierstrass

Teorema 5.47 (de Acotación, de Weierstrass)**.** *Sea f una función continua definida sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Entonces f alcanza un valor mínimo y un valor máximo, es decir, existen puntos $r, s \in [a, b]$ (no necesariamente únicos) tales que para todo $x \in [a, b]$ es $f(r) \leqslant f(x) \leqslant f(s)$. En consecuencia, f es acotada.*

Demostración. Sabemos que la imagen de f tiene supremo e ínfimo (aunque pueden ser infinitos). Sean

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \qquad m = \operatorname{ínf}\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Tendremos que probar que M y m son máximo y mínimo, es decir, que estos valores se alcanzan en ciertos $r, s \in [a, b]$.

Sea u_n el extremo izquierdo del intervalo $EM, 1/n)$, es decir,

$$u_n = \begin{cases} -\frac{1}{n}, & M < \infty, \\ n, & M = \infty. \end{cases}$$

Obviamente, $\lim_n u_n = M$. Por la definición de supremo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe algún $s_n \in [a, b]$ tal que $u_n < f(s_n) \leqslant M$ y por tanto $f(s_n) \in E(M, 1/n)$. En consecuencia, $\lim_n f(s_n) = M$. Como la sucesión (s_n) está acotada, tiene una subsucesión (s_{i_n}) convergente a un cierto $s \in [a, b]$. Por una parte, la función f es continua en todos los puntos de $[a, b]$; por otra, $(f(s_{i_n}))$ es una subsucesión de $(f(s_n))$. Se deduce que $f(s) = \lim_n f(s_{i_n}) = M$. Obsérvese que hemos probado de paso que M es finito. De manera análoga se prueba que m es finito y que existe $r \in [a, b]$ tal que $f(r) = m$. □

El Teorema de Bolzano

Teorema 5.48 (de los Ceros)**.** *Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua (donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$). Supongamos que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Sea, por ejemplo, $f(a) < 0 < f(b)$. Veamos mediante inducción completa que podemos construir sucesiones (x_n), (y_n), tales que

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n < y_n \leqslant \cdots \leqslant y_1 \leqslant b,$$

y

$$y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n}, \qquad f(x_n) \leqslant 0, \qquad f(y_n) > 0 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Para ello, comencemos tomando $z_1 = (a + b)/2$. O bien $f(z_1) \leqslant 0$, o bien $f(z_1) > 0$. En el primer caso, hagamos $x_1 = z_1$, $y_1 = b$; en el segundo caso hagamos $x_1 = a$, $y_1 = z_1$. En ambos casos, resulta $a \leqslant x_1 < y_1 \leqslant b$, $y_1 - x_1 = (b - a)/2$, $f(x_1) \leqslant 0$, $f(y_1) > 0$.

Supongamos construidos $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, de manera que

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n < y_n \leqslant \cdots \leqslant y_1 \leqslant b,$$

y

$$y_j - x_j = \frac{b-a}{2^j}, \qquad f(x_j) \leqslant 0, \qquad f(y_j) > 0 \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Tomamos entonces $z_{n+1} = (x_n + y_n)/2$. O bien $f(z_{n+1}) \leqslant 0$, o bien $f(z_{n+1}) > 0$. En el primer caso, hagamos $x_{n+1} = z_{n+1}$, $y_{n+1} = y_n$; en el segundo caso, hagamos $x_{n+1} = x_n$, $y_{n+1} = z_n$. En ambos casos resulta

$$a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} < y_{n+1} \leqslant y_n \leqslant \cdots \leqslant y_1 \leqslant b,$$

y

$$y_{n+1} - x_{n+1} = \frac{b-a}{2^{n+1}}, \qquad f(x_{n+1}) \leqslant 0, \qquad f(y_{n+1}) > 0.$$

Las sucesiones (x_n) e (y_n) son ambas monótonas (una es creciente y la otra, decreciente) y además son acotadas, ya que toman sus valores en $[a,b]$. Por tanto ambas convergen. Sea $c = \lim_n x_n$. Por fuerza ha de ser $c \in [a,b]$. Como $\lim_n (y_n - x_n) = \lim_n (b-a)/2^n = 0$, resulta que $\lim_n y_n = \lim_n x_n = c$.

Puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ es $f(x_n) \leqslant 0$, $f(y_n) > 0$, usando la continuidad de f en c se deduce finalmente que

$$f(c) = \lim_n f(x_n) \leqslant 0, \qquad f(c) = \lim_n f(y_n) \geqslant 0,$$

o sea, $f(c) = 0$ (lo que garantiza además que $a \neq c \neq b$). □

Teorema 5.49 (de los Valores Intermedios, de Bolzano)**.** *Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces f tiene la propiedad de los valores intermedios: si $a, b \in I$, $a < b$ y λ está entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, $f(a) < \lambda < f(b)$ o $f(b) < \lambda < f(a)$, entonces existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = \lambda$.*

Demostración. Basta aplicar el Teorema de los Ceros 5.48 a la función $g(x) = f(x) - \lambda$ en el intervalo $[a,b]$. □

Algunas aplicaciones del Teorema de Bolzano

Corolario 5.50. *Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua.*

(I) *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $\inf f(I) < \lambda < \sup f(I)$, entonces existe al menos un $c \in I$ tal que $f(c) = \lambda$.*

(II) *Si I es cerrado y acotado, y $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $\inf f(I) \leqslant \lambda \leqslant \sup f(I)$, entonces existe al menos un $c \in I$ tal que $f(c) = \lambda$.*

Demostración. Para el apartado (I), escojamos $\alpha, \beta \in I$ tales que $\inf f(I) \leqslant f(\alpha) < \lambda < f(\beta) < \sup f(I)$. (Estos elementos existen por la definición de $\inf f(I)$ y $\sup f(I)$.) Por el Teorema de Bolzano existirá entonces $c \in (\alpha, \beta)$ (o $c \in (\beta, \alpha)$) tal que $f(c) = \lambda$.

Para el apartado (II), observemos que, en este caso, por el Teorema de Acotación de Weierstrass 5.47, $\inf f(I)$ y $\sup f(I)$ también son imagen de algún elemento de I. □

Una consecuencia inmediata del Corolario 5.50 es la siguiente:

Corolario 5.51 (Teorema de Preservación de Intervalos)**.** *Sean I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ continua. Entonces*

(I) *$f(I)$ es un intervalo.*

(II) *Si, además, I es cerrado y acotado, entonces $f(I)$ es cerrado y acotado.*

Ejemplos. Si el intervalo de definición es cerrado y acotado, el corolario anterior nos dice que la imagen será también un intervalo cerrado y acotado. Si al intervalo de definición le faltan alguna de estas condiciones, no podemos saber nada sobre el tipo al que pertenece el intervalo imagen, como muestran los siguientes ejemplos:

- $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

  Mientras que $(0,1)$ es un intervalo abierto y acotado, su imagen $f((0,1)) = (1,\infty)$ sigue siendo abierto, pero no es acotado.

- $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

  $[1,\infty)$ es cerrado (pero no acotado). Su imagen $f([1,\infty)) = (0,1]$ es acotado pero no cerrado.

- $f\colon (0,2\pi) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen} x$,

  El intervalo $(0,2\pi)$ es abierto, pero su imagen $f((0,2\pi)) = [-1,1]$ es cerrado.

Algunas aplicaciones del Teorema de Bolzano

Corolario 5.52 (Teorema del Punto Fijo, de Brouwer)**.** *Toda aplicación continua de un intervalo cerrado y acotado I en sí mismo tiene un punto fijo, es decir, existe $c \in I$ tal que $f(c) = c$.*

Demostración. Sea $I = [a,b]$. Si $f(a) = a$ o $f(b) = b$, hemos terminado. En caso contrario, definamos $g\colon I \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x) - x$. Entonces, g es continua. Además, $g(a) = f(a) - a > 0$ y $g(b) = f(b) - b < 0$. En consecuencia, existe $c \in (a,b)$ tal que $g(c) = f(c) - c = 0$. □

El siguiente resultado ya se probó anteriormente, pero a continuación damos una prueba mucho más sencilla basada en el Teorema de Bolzano.

Corolario 5.53 (Existencia de raíces n-ésimas)**.** *Dado $n \in \mathbb{N}$, todo $\lambda > 0$ tiene una ráiz n-ésima positiva. Es decir, existe algún $c > 0$ tal que $c^n = \lambda$.*

Demostración. Sea $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$. Entonces f es creciente y continua. Además, $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Esto implica que $\inf f((0,\infty)) = 0$ y $\sup f((0,\infty)) = \infty$, y así $\inf f((0,\infty)) < \lambda < \sup f((0,\infty))$. De esta manera, tiene que existir $c \in (0,\infty)$ tal que $f(c) = \lambda$. □

El Teorema de Bolzano es especialmente útil para demostrar la existencia de soluciones de una ecuación (incluso muy complicada).

Ejemplo. La ecuación
$$x^{321} + \frac{217 + \operatorname{sen}^4 x}{1 + x^2} = 14$$
tiene solución.

Para probarlo, definamos
$$f(x) = x^{321} + \frac{217 + \operatorname{sen}^4 x}{1 + x^2}.$$
Esta función está definida en todo $\mathbb{R}$ y es fácil ver que es continua. Además, dado que la función $217 + \operatorname{sen}^4 x$ está acotada y
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{1 + x^2} = 0,$$
obtenemos que
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{217 + \operatorname{sen}^4 x}{1 + x^2} = 0,$$
de donde
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$
Esto indica que f debe tomar todos los valores reales; en particular, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 14$.

2.3. Funciones inyectivas y continuas

Funciones inyectivas y funciones monótonas

Una función estrictamente monótona es siempre inyectiva. El recíproco no es cierto en general, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$, definida por
$$f(x) = \begin{cases} x + 1/2, & 0 \leqslant x < 1/2, \\ x - 1/2, & 1/2 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$
Entonces f es biyectiva, pero no es monótona.

Funciones inyectivas y continuas

La situación cambia bastante cuando nos limitamos a considerar solo funciones continuas, según vemos en el siguiente teorema, que probaremos utilizando un resultado auxiliar.

Lema 5.54. *Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I. Sean $x, y, z \in I$ tales que $x \leqslant y \leqslant z$. Entonces $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(z)$ o $f(x) \geqslant f(y) \geqslant f(z)$.*

Demostración. Si $x = y$ la tesis es trivial, ya que entonces solo caben las posibilidades $f(x) = f(y) \leqslant f(z)$ o $f(x) = f(y) \geqslant f(z)$. Es igualmente trivial si $y = z$. Por tanto, supondremos que $x < y < z$. Obseérvese que en este caso los tres valores $f(x)$, $f(y)$ y $f(z)$ deben ser diferentes.

Supongamos que no es $f(x) < f(y) < f(z)$ ni $f(x) > f(y) > f(z)$. Solo caben entonces los cuatro casos siguientes:

(I) $f(y) < f(x) < f(z)$, (II) $f(x) < f(z) < f(y)$,
(III) $f(y) > f(x) > f(z)$, (IV) $f(x) > f(z) > f(y)$.

Los cuatro casos son imposibles, lo cual comprobaremos solo en el primero de ellos. (La comprobación para los otros tres es análoga.) En efecto, supongamos que $f(y) < f(x) < f(z)$. Por el Teorema de Bolzano 5.49, existe c tal que $y < c < z$ y $f(c) = f(x)$. Pero entonces $x < c$ y $f(x) = f(c)$, en contradicción con la inyectividad de f. □

Teorema 5.55. *Sea f una función continua e inyectiva en un intervalo I. Entonces f es estrictamente monótona.*

Demostración. Supongamos que f no es estrictamente decreciente. Existirán ciertos $a, b \in I$ tales que $a < b$ y $f(a) \leqslant f(b)$. Como f es inyectiva, se deduce que $f(a) < f(b)$. Vamos a probar que f es estrictamente creciente, es decir, que $f(x) < f(y)$ si $x, y \in I$ y $x < y$.

Pueden darse entonces varios casos, según la posición de x e y con respecto a a y b:

(I) $x < y \leqslant a < b$. Por el Lema 5.54, aplicado a $y \leqslant a < b$, solo puede darse $f(y) \leqslant f(a) \leqslant f(b)$ o $f(y) \geqslant f(a) \geqslant f(b)$. La segunda posibilidad no puede darse, ya que $f(a) < f(b)$, así que concluimos que $f(y) \leqslant f(a) < f(b)$. En particular, $f(y) < f(b)$. Apliquemos ahora de nuevo el Lema 5.54 a $x < y < b$, y solo puede ser $f(x) < f(y) < f(b)$ o $f(x) > f(y) > f(b)$. Como ya hemos visto que $f(y) < f(b)$, obtenemos que el segundo caso es imposible, de donde $f(x) < f(y) < f(b)$ y por tanto $f(x) < f(y)$.

(II) $x \leqslant a < y \leqslant b$. Por el Lema 5.54, tendrá que ser $f(a) < f(y) \leqslant f(b)$, así que $f(a) < f(y)$. Aplicándolo de nuevo, obtenemos que $f(x) \leqslant f(a) < f(y)$. Por tanto, $f(x) < f(y)$.

(III) $x \leqslant a < b < y$. El Lema 5.54 nos dice que $f(a) < f(b) < f(y)$. También nos dice que $f(x) < f(b) < f(y)$. En consecuencia, $f(x) < f(y)$.

(IV) $a < x < y \leqslant b$. La aplicación del Lema 5.54 nos da que $f(a) < f(x) < f(b)$ y por tanto $f(a) < f(x)$. También nos da que $f(a) < f(x) < f(y)$. En particular, $f(x) < f(y)$.

(V) $a < x \leqslant b < y$. Obtenemos primero que $f(a) < f(b) < f(y)$, y después que $f(x) \leqslant f(b) < f(y)$, así que $f(x) < f(y)$.

(VI) $a < b < x < y$. Debe ser $f(a) < f(b) < f(x)$ y por tanto $f(b) < f(x) < f(y)$. En particular, $f(x) < f(y)$. □

Inversas de funciones continuas

Vamos a ver que la inversa de una función inyectiva y continua es siempre continua. Para ello, probaremos un resultado previo.

Lema 5.56. *Una función estrictamente monótona definida sobre un intervalo es continua si, y solo si, su imagen es también un intervalo.*

Demostración. Sea f una función estrictamente creciente (si es estrictamente decreciente, la demostración es similar) definida sobre un intervalo I, y sea $J = f(I)$. Evidentemente, si f es continua, J es un intervalo.

Recíprocamente, supongamos que J es un intervalo, y probemos que f es continua.

Sea $c \in I$. Por la Proposición 5.29,

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \leqslant f(c) \leqslant \lim_{x \to c^+} f(x).$$

(Esto, en caso de que c no sea uno de los extremos del intervalo; si lo es, la demostración se reduce a tomar el único límite lateral que tenga sentido.)

Se trata de probar que las dos desigualdades son igualdades. Supongamos que, por ejemplo,

$$\lim_{x \to c^-} f(x) < f(c).$$

(Para la otra desigualdad se procede de manera similar.) Elijamos cualquier λ tal que

$$\lim_{x \to c^-} f(x) < \lambda < f(c).$$

Entonces, para todo $x \in I$ con $x < c$, se tiene

$$f(x) \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in I, x < c\} = \lim_{x \to c^-} f(x) < \lambda.$$

Y si $x \in I$, pero $x \geqslant c$, resulta que $\lambda < f(c) \leqslant f(x)$, así que $\lambda \notin f(I)$. Sin embargo, tomando cualquier $x \in I$ tal que $x < c$, se tiene $f(x) < \lambda < f(c)$, $f(x) \in f(I)$, $f(c) \in f(I)$. Por tanto, $f(I)$ no es un intervalo, lo que contradice las hipótesis. □

Teorema 5.57. *Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva. Entonces su inversa $f^{-1}\colon f(I) \to \mathbb{R}$ es también continua.*

Demostración. Es una consecuencia directa del Lema 5.56, ya que f es estrictamente monótona, por lo que f^{-1} deberá ser también estrictamente monótona. Además, la imagen de f^{-1} es I, que es un intervalo. □

2.4. Clasificación de discontinuidades

Discontinuidades finitas e infinitas

Definición 5.58. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y $a \in A \cap A'$. Se dice que a es un *punto de discontinuidad* de f, o que f tiene una *discontinuidad* en a, si f no es continua en a.

Definición 5.59. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y a un punto de discontinuidad de f. Se dice que f en a tiene una *discontinuidad finita* si f está localmente acotada en a, es decir, existe $\delta > 0$ tal que f está acotada en $A \cap (a - \delta, a + \delta)$. En caso contrario, se dice que f tiene en a una *discontinuidad infinita*.

Clasificación de las discontinuidades finitas

Definición 5.60. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y supongamos que f tiene una discontinuidad finita en a.

(I) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad evitable* en a si existe y es finito el límite $\lim_{x \to a} f(x)$, pero no coincide con $f(a)$.

(II) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad de salto* si existen $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to a^-} f(x)$ y son finitos, pero distintos. La diferencia $\lim_{x \to a^+} f(x) - \lim_{x \to a^-} f(x)$ se llama *salto* de f en a.

(III) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad oscilatoria* si tiene una discontinuidad en a que no es de ninguno de los dos tipos anteriores.

Observación. Nótese que, en el caso en que $f\colon A \to \mathbb{R}$ tiene una discontinuidad evitable en a, si definimos la función g por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \backslash \{a\}, \\ \lim_{t\to a} f(t), & x = a, \end{cases}$$

que es casi la misma que f, resulta que g es continua en el punto a. De esta forma, hemos evitado la discontinuidad de f mediante la simple redefinición del valor de la función en un punto.

Clasificación de las discontinuidades infinitas

Definición 5.61. Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ y supongamos que f tiene una discontinuidad infinita en a.

(I) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad infinita pura* o *polo* en a si existe y es infinito el límite $\lim_{x\to a} f(x)$.

(II) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad de salto infinito* si existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$ y $\lim_{x\to a^-} f(x)$, alguno de ellos es infinito, y además son distintos.

(III) Decimos que f tiene en a una *discontinuidad oscilatoria infinita* si tiene una discontinuidad infinita en a que no es de ninguno de los dos tipos anteriores.

Ejemplos.

- Consideremos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

  Es fácil ver que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$. Por tanto, esta función tiene en 0 una discontinuidad evitable.

- Sea la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{1/x}+1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

  Claramente, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$. Esto indica que f tiene una discontinuidad de salto en 0. El salto es

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) - \lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

no tiene límites laterales en 0, pero observamos que es una función acotada. Por tanto, su discontinuidad en 0 es oscilatoria.

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

tiene derivadas laterales en el 0 y son iguales, pero ambas son infinitas. De aquí que la discontinuidad sea infinita (y no evitable). Como el límite existe y es infinito, tenemos un polo.

- Considérese la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Se obtiene que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$. Esto implica que f no está acotada en ningún entorno de 0 y, por tanto, tiene una discontinuidad infinita en 0 (aunque su límite por la izquierda es igual a 0). En este caso podemos decir que la discontinuidad es de salto infinito.

- La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

no tiene límites laterales en 0 (ni finitos ni infinitos), pero podemos observar que no es localmente acotada en 0. En consecuencia, en este caso tenemos una discontinuidad infinita en 0 que no es de salto infinito ni infinita pura. En consecuencia, se trata de una discontinuidad oscilatoria infinita.

Discontinuidades de las funciones monótonas

Recordemos que una función monótona tiene límites laterales en todos los puntos. Esto implica lo siguiente:

Proposición 5.62. *Sea $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función monótona, y sea $d \in A$ uno de sus puntos de discontinuidad. Entonces*

(I) *Si* $d \in A'_+ \backslash A'_-$ *o* $d \in A'_- \backslash A'_+$ *la discontinuidad es evitable.*

(II) *Si* $d \in A'_+ \cap A'_-$ *la discontinuidad es de salto.*

Demostración. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que f es creciente. Sea D el conjunto de puntos de discontinuidad de f. Evidentemente, si $d \in D$, tiene que ser $d \in A' = A'_- \cup A'_+$.

(I) Supongamos, por ejemplo, que $d \in A'_+ \backslash A'_-$. Por 5.29 y 5.30, sabemos que existe $\lim_{x \to d} f(x)$ y además, como $d \in A$, resulta que este límite es finito. En consecuencia, si d es un punto de discontinuidad, es simplemente por que $\lim_{x \to d} f(x) \neq f(d)$.

(II) Si utilizamos de nuevo 5.29 y 5.30, podemos ver que los límites laterales $\lim_{x \to d^-} f(x)$ y $\lim_{x \to d^+} f(x)$ existen y son finitos, y además $f(d)$ está situada entre estos dos límites. Esto implica que f es discontinua en d tan solo si ambos límites laterales no coinciden. Por tanto, la discontinuidad en d tiene que ser de salto. □

Lema 5.63. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *un conjunto. Los puntos de* A *que no son puntos de acumulación por la derecha o no son puntos de acumulación por la izquierda de* A *constituyen un conjunto contable. (En particular, los puntos aislados de* A *son contables.)*

Demostración. Hay que probar que los conjuntos $A \backslash A'_-$ y $A \backslash A'_+$ son contables. Probaremos que es contable el primero de ellos. (Que el segundo también lo es, tiene una prueba análoga.)

Para cada $x \in A \backslash A'_-$, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x - \varepsilon_x, x) \cap A = \varnothing$. Además, si $x, y \in A \backslash A'_-$, $x \neq y$, entonces $(x - \varepsilon_x, x) \cap (y - \varepsilon_y, y) = \varnothing$. (En efecto, supongamos que, por ejemplo, $x < y$. Si fuera $(x - \varepsilon_x, x) \cap (y - \varepsilon_y, y) \neq \varnothing$ entonces se tendría $x \in (y - \varepsilon_y, y)$; como, además, $x \in A$, se tendría que $(y - \varepsilon_y, y) \cap A \neq \varnothing$, lo que es una contradicción.) Así que, si $A \backslash A'_-$ no es contable, podemos elegir para cada $x \in A \backslash A'_-$ un racional $r_x \in (x - \varepsilon_x, x)$, obteniendo así una cantidad no contable de racionales distintos, lo que es absurdo. □

Proposición 5.64. *El conjunto de puntos de discontinuidad de una función monótona es contable.*

Demostración. Supongamos que $f \colon A \to \mathbb{R}$ es una función creciente y sea D su conjunto de puntos de discontinuidad. Tenemos que $D \subset A \cap A'$, así que

$$D = D \cap A' = D \cap (A'_- \cup A'_+) = (D \backslash A'_-) \cup (D \backslash A'_+) \cup (D \cap A_- \cap A_+).$$

Por el Lema 5.63, los conjuntos $D \backslash A_-$ y $D \backslash A_+$ son contables, así que bastará probar que $D \cap A_- \cap A_+$ es también contable.

Para cada $d \in D \cap A_- \cap A_+$ sean

$$\alpha_d = \lim_{x \to d-} f(x) \quad \text{y} \quad \beta_d = \lim_{x \to d+} f(x).$$

Según la Proposición 5.62, tiene que ser $\alpha_d \leqslant f(d) \leqslant \beta_d$ donde $\alpha_d < \beta_d$. En consecuencia, $\alpha_d < \beta_d$. Además, si $d, d' \in D \cap A_- \cap A_+$ y $d < d'$, escogiendo un $z \in A \cap (d, d')$ (que existe por ser $d \in A_+$) tenemos por la Proposición 5.29 que $\beta_d \leqslant f(z) \leqslant \alpha_{d'}$, con lo que $(\alpha_d, \beta_d) \cap (\alpha_{d'}, \beta_{d'}) = \varnothing$. Así, si $D \cap A_- \cap A_+$ no es contable, podemos elegir para cada $d \in D \cap A_- \cap A_+$ un racional $r_d \in (\alpha_d, \beta_d)$, obteniendo así una cantidad no contable de racionales distintos, y esto supone un absurdo. $\square$

2.5. Continuidad uniforme

¿Qué es continuidad uniforme?

Definición 5.65. Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Entonces f es *uniformemente continua* en A si para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in A$ con $|x - y| < \delta$ es $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

La definición de continuidad uniforme es muy similar a la de continuidad (en todos los puntos), que sería la siguiente:

Definición de continuidad en A.
Para cada $\varepsilon > 0$ y todo $y \in A$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier $x \in A$ con $|x - y| < \delta$ es $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Podemos notar que la diferencia entre ambas definiciones es que en la segunda, el δ elegido dependerá del punto y, es decir, escogiendo un punto y diferente, deberemos tomar también un δ diferente. En la definición de convergencia uniforme, en cambio, se puede encontrar un δ que es válido para cualquier y. (Sí que podrá depender, sin embargo, de ε.)

Algunos ejemplos sobre continuidad uniforme

Obsérvese que una función uniformemente continua es, necesariamente, continua. El recíproco, en general, no es cierto.

Ejemplos.

- Sea $f(x) = 2x$, definida en todo $\mathbb{R}$. Consideremos un $\varepsilon > 0$. Escojamos $\delta = \varepsilon/2$. Entonces, si $|x - y| < \delta$, será

  $$|f(x) - f(y)| = |2x - 2y| = 2|x - y| < 2\delta = \varepsilon.$$

  Notamos que aquí el δ elegido, es decir, $\varepsilon/2$, depende de ε, pero no de x ni de y. Por tanto, f es uniformemente continua.

- Sea ahora $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = 1/x$. Esta función es continua. En efecto, si $y \in (0,1)$, podemos definir $\delta = \text{mín}\{y/2, \varepsilon y^2/2\}$. Notemos que, si $|x-y| < y/2$, entonces, $x > y/2$. Tendremos entonces que, siempre que $|x-y| < \delta$, es

  $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{xy}|x-y| < \frac{2}{y^2}|x-y| \leqslant \frac{2}{y^2} \cdot \frac{\varepsilon y^2}{2} = \varepsilon.$$

  Por tanto, f es continua en cualquier $y \in (0,1)$.

  Observemos que el δ que acabamos de escoger depende de y, y no solo de ε. No obstante, ya sabemos que la elección de δ no es única. También se podría haber elegido definir, por ejemplo, $\delta = \text{mín}\{y/3, 2y^2\varepsilon/3\}$, y habríamos obtenido un resultado parecido. Podría pensarse así que, escogiendo este δ de forma más juiciosa, conseguiríamos que no dependiera de y. Veamos a continuación que esto no puede lograrse, o sea, que f no es uniformemente continua.

  Sean $\varepsilon > 0$, y fijemos un $\delta > 0$. Escojamos ahora y de forma que $0 < y < \text{mín}\{1, \delta, 1/\varepsilon\}$. Sea $x = y/2$. Entonces, $x, y \in (0,1)$ y, además, $|x-y| = y/2 < y < \delta$. Pero

  $$|f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{2}{y} - \frac{1}{y}\right| = \frac{1}{y} > \varepsilon.$$

  Esto indica que ninguna elección de δ que nos sirva para conseguir que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ podrá depender tan solo de ε. O sea, f no es uniformemente continua.

El Criterio Secuencial de Continuidad Uniforme

La siguiente caracterización mediante sucesiones resulta útil para dilucidar si una función es uniformemente continua.

Proposición 5.66 (Criterio Secuencial de Continuidad Uniforme)**.** *Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $f\colon A \to \mathbb{R}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(I) *f es uniformemente continua.*

(II) *Si (x_n) e (y_n) son dos sucesiones en A tales que $\text{lím}_n(x_n - y_n) = 0$, entonces $\text{lím}_n(f(x_n) - f(y_n)) = 0$.*

Demostración. Supongamos primero que f es uniformemente continua, y sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en A tales que $x_n - y_n \to 0$. Probaremos que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe un $\delta > 0$ tal que, si $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Por otra parte, como $x_n - y_n \to 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant n_0$, entonces $|x_n - y_n| < \delta$. En consecuencia, si $n \geqslant n_0$, será $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$. Hemos probado así que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Supongamos ahora que f no es uniformemente continua, y vemos que no se cumple (II). Entonces, existe un $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existen $x, y \in A$ tales que $|x-y| < \delta$ pero $|f(x)-f(y)| \geqslant \varepsilon$. En particular, para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n, y_n \in A$ tales que $|x_n - y_n| < 1/n$ pero $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon$. Obviamente, la sucesión $x_n - y_n$ converge a 0, pero $f(x_n) - f(y_n)$ no. □

Aplicando el Criterio Secuencial

Ejemplos.

- La función $f\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ no es uniformemente continua.

  En efecto. Sean $x_n = 1/n$ e $y_n = 1/(n+1)$. Es obvio que $x_n - y_n \to 0$. Pero $f(x_n) - f(y_n) = n - (n+1) = -1 \nrightarrow 0$.

- La función $f\colon (1,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua.

  Para verlo, sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en $(1,\infty)$ tales que $x_n - y_n \to 0$. Entonces,

  $$\begin{aligned} |f(x_n) - f(y_n)| &= |\sqrt{x_n} - \sqrt{y_n}| \\ &= \frac{1}{\sqrt{x_n} + \sqrt{y_n}} |x_n - y_n| \\ &\leqslant \tfrac{1}{2} |x_n - y_n| \to 0. \end{aligned}$$

  Por tanto, $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

Suma y composición de funciones uniformemente continuas

La simple aplicación del Criterio Secuencial nos da los siguientes resultados

Proposición 5.67. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, y supongamos que f y g son uniformemente continuas en A. Entonces,*

(I) *$f + g$ es uniformemente continua.*

(II) *cf es uniformemente continua.*

Proposición 5.68. *Sean $A, B \subset \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $g\colon B \to \mathbb{R}$, y supongamos que $f(A) \subset B$. Si f y g son uniformemente continuas, también la composición $g \circ f$ es uniformemente continua.*

Producto de funciones uniformemente continuas

El producto de funciones uniformemente continuas no tiene por qué ser uniformemente continuo, como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x$. Entonces f es uniformemente continua, pero $f \cdot f$ no lo es.

En efecto, si escogemos $x_n = n + 1/n$, $y_n = n$, se tendrá que $x_n - y_n = 1/n \to 0$, pero

$$(f(x_n))^2 - (f(y_n))^2 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2 \neq 0.$$

De aquí que $f \cdot f$ no sea uniformemente continua.

Sin embargo, si los factores son, además, acotados, el producto sí funciona de la forma adecuada.

Proposición 5.69. *Sean $A \subset \mathbb{R}$, y $f, g\colon A \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas y acotadas. Entonces fg es uniformemente continua.*

Demostración. Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en A tales que $x_n - y_n \to 0$. Como f y g son uniformemente continuas, será $f(x_n) - f(y_n) \to 0$ y $g(x_n) - g(y_n) \to 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned} &f(x_n)g(x_n) - f(y_n)g(y_n) \\ &\qquad = f(x_n)g(x_n) - f(x_n)g(y_n) + f(x_n)g(y_n) - f(y_n)g(y_n) \\ &\qquad = f(x_n)(g(x_n) - g(y_n)) + (f(x_n) - f(y_n))g(y_n) \to 0. \quad \square \end{aligned}$$

Aditividad de la continuidad uniforme

Proposición 5.70. *Sean $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b < c$. Sea $f\colon (a, c) \to \mathbb{R}$ tal que f es uniformemente continua tanto sobre $(a, b]$ como sobre $[b, c)$. Entonces f es uniformemente continua (sobre (a, c)).*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado, como f es uniformemente continua sobre $(a, b]$, existe $\delta_1 > 0$, tal que, si $x, y \in (a, b]$ y $|x - y| < \delta_1$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$. De la misma forma, por ser f uniformemente continua sobre $[b, c)$, existe $\delta_2 > 0$, tal que, si $x, y \in [b, c)$ y $|x - y| < \delta_2$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y supongamos que $x, y \in (a, b)$ verifican que $|x - y| < \delta$. Entonces pueden darse tres casos:

- Si x e y son ambos menores o iguales que b, como $|x - y| < \delta_1$, será $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.
- Si x e y son ambos mayores o iguales que b, como $|x - y| < \delta_2$, será $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2 < \varepsilon$.

- Si no se da ninguno de los casos anteriores, será, por ejemplo, $x < b < y$. Tendremos entonces que $|x-b| < |x-y| < \delta_1$ y $|b-y| < |x-y| < \delta_2$, de donde

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(b)| + |f(b) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

El Teorema de Heine

El principal resultado acerca de continuidad uniforme es el siguiente:

Teorema 5.71 (de Heine). *Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado I, entonces f es uniformemente continua sobre I.*

Demostración. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, y supongamos que no es uniformemente continua. Probaremos que entonces hay algún punto de $[a,b]$ donde f no es continua.

Como f no es uniformemente continua, existen dos sucesiones (x_n) e (y_n) tales que $x_n - y_n \to 0$ pero $f(x_n) - f(y_n) \nrightarrow 0$. Cambiando la sucesión por una de sus subsucesiones si es necesario, podemos suponer que $f(x_n) - f(y_n) \to l \neq 0$. Como la sucesión (x_n) está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos informa de que existe una subsucesión (x_{i_n}) que converge a un cierto $c \in [a,b]$. Como $x_n - y_n \to 0$, resulta que (y_{i_n}) también converge a c. Es el caso que f es discontinua en c, porque si fuera continua en c, tendríamos que $f(x_{i_n}) \to f(c)$ y $f(y_{i_n}) \to f(c)$, con lo que $f(x_{i_n}) - f(y_{i_n}) \to f(c) - f(c) = 0$; pero esto no puede ser, porque $f(x_{i_n}) - f(y_{i_n}) \to l \neq 0$. $\square$

Ejemplo. La función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

es uniformemente continua ya que es continua en todo $[0,1]$.

Caracterización de la continuidad uniforme sobre intervalos acotados

El Teorema de Heine nos permite resolver completamente cuándo una función es uniformemente continua, si está definida sobre un intervalo acotado, como vemos a continuación.

Proposición 5.72. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua, donde I es un intervalo de extremos a y b. Son equivalentes:*

(I) *f es uniformemente continua.*

(II) *Los límites $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to b} f(x)$ existen y son finitos.*

(III) *f tiene una extensión continua en $[a, b]$.*

Demostración. (I) $\Rightarrow$ (II). Vamos a ver que existe el límite $\lim_{x\to a} f(x)$. Lo referente al otro límite es similar. Para ello, veremos que esta función verifica el Criterio de Cauchy expuesto en el Teorema 5.38. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Como f es uniformemente continua, existe un $\delta > 0$ tal que, si $x, y \in I$ y $|x-y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Si $x, y \in I \cap \dot{E}(a, \delta/2)$, será $|x - a| < \delta/2$, $|y - a| < \delta/2$, de donde $|x - y| \leqslant |x - a| + |a - y| < \delta/2 + \delta/2 = \delta$, así que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En consecuencia, f verifica la Condición de Cauchy en a y, por tanto, tiene límite finito en a.

(II) $\Rightarrow$ (III). Definamos la función $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b), \\ \lim_{t\to a} f(t), & x = a, \\ \lim_{t\to b} f(t), & x = b. \end{cases}$$

Es fácil ver que esta función g que acabamos de definir es continua en todo $[a, b]$. Además, es claramente una extensión de f.

(III) $\Rightarrow$ (I). Sea g una extensión continua de f en $[a, b]$. Entonces, por el Teorema de Heine, g es uniformemente continua. Pero como f es la restricción de g a I, resulta entonces que f también es uniformemente continua. □

Ejemplos.

- La función $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-1/x}$ es uniformemente continua ya que es continua en $(0, 1)$ y además

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{-1/0^+} = 0, \qquad \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{e}.$$

- La función $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{1/x}$ no es uniformemente continua ya que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^{1/0^+} = \infty.$$

- La función $f\colon (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ tampoco es uniformemente continua ya que no tiene límite en 0.

Funciones de Lipschitz

El último resultado que hemos visto deja zanjado el tema de cuándo una función continua en un intervalo acotado es uniformemente continua. Cuando el intervalo de definición no es acotado, no existe una caracterización, al menos de sencillez semejante. Daremos a continuación una serie de casos particulares en que se puede afirmar la existencia de continuidad uniforme.

El primer caso a estudiar es el de las funciones de Lipschitz.

Definición 5.73. Sea $A \subset \mathbb{R}$. Se dice que una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ es una *función de Lipschitz*, si existe $K > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$, cualesquiera que sean $x, y \in A$. A la constante K se la denomina *constante de Lipschitz* de f.

Teorema 5.74. *Toda función de Lipschitz es uniformemente continua.*

Demostración. Sean (x_n) e (y_n) dos sucesiones en A tales que $x_n - y_n \to 0$. Como $|f(x_n) - f(y_n)| \leqslant K|x_n - y_n|$, resultará que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. □

Algunos ejemplos sobre funciones de Lipschitz

Ejemplos.

- La función $f(x) = \sqrt{x}$ es de Lipschitz en $[1, \infty)$.

  En efecto, si $x, y \geqslant 1$ entonces

  $$|f(x) - f(y)| = |\sqrt{x} - \sqrt{y}| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}|x - y| \leqslant \tfrac{1}{2}|x - y|.$$

- Una función uniformemente continua no tiene por qué ser de Lipschitz: La función $f(x) = \sqrt{x}$ es uniformemente continua pero no es de Lipschitz en $[0, 1]$.

  Que es uniformemente continua, viene asegurado por el Teorema de Heine.

  Veamos que no es de Lipschitz. Si $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$,

  $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \left|\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y}\right| = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}.$$

  Fijemos $K > 0$. Escogiendo $0 < x < y < \text{mín}\{1, 1/(4K^2)\}$, obtenemos que

  $$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} > \frac{1}{\frac{1}{2K} + \frac{1}{2K}} = K.$$

  En consecuencia, $|f(x) - f(y)| > K|x - y|$, y K no puede ser una constante de Lipschitz de f. Como K es arbitraria, resulta simplemente que f no es de Lipschitz.

Funciones periódicas

Proposición 5.75. *Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función periódica y continua. Entonces, f es uniformemente continua.*

Demostración. Sea p un período de f. Por el Teorema de Heine, f es uniformemente continua en $[0, 2p]$. Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe δ, con $0 < \delta < p$, tal que, si $0 \leqslant x, y \leqslant 2p$ y $|x - y| < \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. En el caso general, si $|x - y| < \delta$, existirá $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mp \leqslant x, y < (m + 2)p$. (En efecto, supongamos que $x \leqslant y$, y sea $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leqslant x/p < m + 1$. Entonces $mp \leqslant x \leqslant y < x + \delta < (m + 1)p + p = (m + 2)p$.) Por tanto, $0 \leqslant x - mp, y - mp < 2p$. Además $|(x - mp) - (y - mp)| = |x - y| < \delta$. En consecuencia,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - mp) - f(y - mp)| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ejemplo. Sea

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos^3 x}{1 + \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^8 x}.$$

Entonces f es uniformemente continua en $\mathbb{R}$ ya que es continua y periódica.

Funciones con límite en el infinito

Proposición 5.76. *Sea f una función continua en uno de los casos siguientes:*

(I) *El dominio de f es de la forma $[a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$, y existe y es finito el límite* $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(II) *El dominio de f es de la forma $(-\infty.a]$, $a \in \mathbb{R}$, y existe y es finito el límite* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(III) *El dominio de f es $\mathbb{R}$, y existen y son finitos los límites* $\lim_{x\to\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Entonces f es uniformemente continua.

Demostración. La demostración que realizaremos es similar a la del Teorema de Heine.

Supongamos que f está en cualquiera de los tres casos del enunciado, pero no es uniformemente continua.

Como f no es uniformemente continua, existen dos sucesiones (x_n) e (y_n) tales que $x_n - y_n \to 0$ pero $f(x_n) - f(y_n) \not\to 0$. Cambiando la sucesión por una de sus subsucesiones si es necesario, podemos suponer que existe un $l \in \overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(x_n) - f(y_n) \to l \neq 0$. La sucesión (x_n) tiene una subsucesión (x_{i_n}) con límite c. Como $x_n - y_n \to 0$, resulta que (y_{i_n}) también converge a c. Obsérvese que c puede pertenecer al dominio de la función, pero (a diferencia de lo que ocurría en el Teorema de Heine), también puede ser ∞ o $-\infty$. Sin embargo, las hipótesis del enunciado nos dicen que, en cualquier caso, existe $\lim_n f(x_{i_n}) = \lim_n f(y_{i_n})$, que es igual a un cierto $L \in \mathbb{R}$. (Se tiene $L = f(c)$ si c está en el dominio; en caso contrario, será uno de los límites en $\pm\infty$ de la función). Por tanto $f(x_{i_n}) - f(y_{i_n}) \to L - L = 0$; pero esto no puede ser, porque $f(x_{i_n}) - f(y_{i_n}) \to l \neq 0$. $\square$

Ejemplos.

- La función
$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + \operatorname{sen} x}{1 + x^2}$$
es claramente uniformemente continua en todo $\mathbb{R}$, si tenemos en cuenta que $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 1$.

- La función $f(x) = x$ es uniformemente continua en $\mathbb{R}$. Pero sus límites en ∞ y $-\infty$ son infinitos. Esto indica que el resultado anterior nos da una condición suficiente pero no necesaria, a diferencia de lo que ocurría cuando el intervalo de definición era acotado (Proposición 5.72).

- La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ también es uniformemente continua en $\mathbb{R}$, ya que es continua y periódica. Sin embargo los límites en ∞ y $-\infty$ ni siquiera existen.

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.

[3] T. M. Apostol, *Análisis Matemático* (2a. ed.). Reverté, Barcelona, 1991.

[4] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlín, 2003.