MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I
Números complejos

1) Calcular

$$\text{a)}\ \frac{3+2i}{-2+i},\qquad \text{b)}\ \frac{2+2i}{1-i},\qquad \text{c)}\ \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{5}-i},$$

$$\text{d)}\ \frac{2-i}{2i-\sqrt{5}},\quad \text{e)}\ \frac{(2-i)(1+2i)^2}{2+i},\quad \text{f)}\ \frac{\frac{1+i}{3-2i}}{\frac{2+i}{-2+i}},$$

$$\text{g)}\ i^{237},\qquad \text{h)}\ i^{98},\qquad \text{i)}\ e^{i\pi/2}.$$

Solución: a) $-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$, b) $2i$, c) $\frac{\sqrt{15}+1}{6}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{6}i$, d) $\dfrac{2-i}{2i-\sqrt{5}}=-\frac{2\sqrt{5}+2}{9}-\frac{4-\sqrt{5}}{9}i$, e) $\frac{7}{5}+\frac{24}{5}i$, f) $-\frac{23}{65}-\frac{11}{65}i$, g) i, h) -1, i) i.

2) Determinar las raíces (reales y complejas) de los siguientes polinomios.
a) $x^4+3x^3+5x^2+5x+2$,
b) x^3-1,
c) x^4-2x^2-3x-2,
d) $2x^3+x^2-x-2$,
e) $4x^4+8x^3+13x^2+18x+9$,
f) $x^4-2x^3+x^2-2x$.
Solución: a) $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{7}}{2}i$ simples, $x=-1$ doble, b) $x=1$, $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ simples. c) $x=-1, x=2$, $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ simples, d) $x=-\frac{3}{4}\pm\frac{\sqrt{7}}{4}i$, $x=1$ simples, e) $x=\pm\frac{3}{2}i$ simples, $x=-1$ doble, f) $x=0$, $x=2$, $x=\pm i$ simples.

3) Calcular el módulo $r=|z|$, las razones trigonométricas de su argumento ($\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ y $\operatorname{tg}\alpha$) y dibujar los siguientes números complejos.
a) $z=-2-3i$.
b) $z=1-\sqrt{3}i$.
Solución: a) $r=\sqrt{13}$, $\operatorname{sen}\alpha=-3/\sqrt{13}$, $\cos\alpha=-2/\sqrt{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=3/2$.
b) $r=2$, $\operatorname{sen}\alpha=-\sqrt{3}/2$, $\cos\alpha=1/2$, $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$.

4) a) Dado el número complejo $z=5e^{\alpha i}$, determinar las partes real e imaginaria de z, sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha$ es negativa y que $\cos\alpha=1/3$.
b) Si $z=2e^{\alpha i}$, y sabemos que $\operatorname{sen}\alpha=2/3$, y que $\cos\alpha<0$, calcular las partes real e imaginaria de z.
Solución: a) $z=\frac{5}{3}-\frac{5\sqrt{8}}{3}i$, b) $a=-\frac{2\sqrt{5}}{3}, b=\frac{4}{3}$.

5) Encontrar los dos números complejos que cumplen la ecuación $z^2=i$.
Solución: $z_1=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$, $z_2=-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$.

6) **(La fórmula de Euler y las funciones trigonométricas)** Usando la fórmula de Euler y las propiedades de la exponencial compleja, deducir las siguientes fórmulas

a) $\operatorname{sen}(x+y) = \cos x \operatorname{sen} y + \operatorname{sen} x \cos y$ y $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$ (Ayuda: usar que $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$).

b) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$, (Ayuda: usar que $(e^{ix})' = ie^{ix}$).

c) $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ (Ayuda: usar b) para demostrar que $f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x$ es constante y evaluar en $x = 0$).

d) $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ y $\cos(-x) = \cos x$.(Ayuda: usar que $e^{-ix} = \frac{1}{e^{ix}}$, y c)).

e) $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x \operatorname{sen}^2 x$, $\operatorname{sen}(3x) = -\operatorname{sen}^3 x + 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x$ (Ayuda: usar que $e^{3xi} = (e^{xi})^3$ y la fórmula $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$).

7) Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales.

a) Si $p(x)$ tiene grado 5, es posible que tenga exactamente 2 raíces reales simples?

b) Si $p(x)$ tiene grado impar, ¿puede ser $p(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$?

c) Si $p(x)$ tiene grado 3, ¿puede tener una raíz compleja (no real) doble?

d) Si $p(x)$ es un polinomio de grado 4 y sabemos que $1 - 2i$ y $-3 + i$ son raices de $p(x)$, determinar todas las raices de $p(x)$.