MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I
Integrales

1.- Calcular las siguientes integrales indefinidas:

a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(x^5+3x^2+2)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ c) $\displaystyle\int x^2\operatorname{sen}(x^3)dx$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ e) $\displaystyle\int (x^2+1)e^{-2x}dx$ f) $\displaystyle\int (x+3)\ln x\, dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ h) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$ i) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\, dx$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx$ k) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt[3]{\cos x}dx$ l) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx$

2.- Calcular las siguientes integrales racionales

a) $\displaystyle\int_{x^3}^{\cos x} e^{t^2}dt$ b) $\displaystyle\int_{\ln x}^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t}dt$ c) $\displaystyle\int_{3x+1}^{e^{2x}} \sqrt{\ln t}dt$

3.- Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ e) $\displaystyle\int_0^1 \ln(\sqrt{x})\,dx$ f) $\displaystyle\int_3^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx$ h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx$ i) $\displaystyle\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos x\cdot\ln(\operatorname{sen} x)dx$ k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})dx$ l) $\displaystyle\int_2^{\infty} (x+1)e^{-2x}dx$

4.- Calcular el área de la región limitada por las siguientes curvas:

a) $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $x=1$.
b) $y=x^3-3x+3$, $y=x+3$.
c) $xy=12$ y las rectas $y=0$, $x=1$ y $x=e$.
d) las rectas $y=0$, $y=2x-3$, $x+y=1$.
e) $y=x^3$ y la recta $y=x$.
f) $y=e^x$, $y=e^{-x}$ y la recta $y=0$.
g) $y^2=4x$, $x^2=4y$.

5) Si F es una primitiva de f, calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ b) $\displaystyle\int_a^b \frac{f(x)}{F(x)}dx$ c) $\displaystyle\int_a^b f(x)F(x)dx$

d) $\displaystyle\int_a^b xf'(x)dx$ e) $\displaystyle\int_a^b f'(\sqrt{x})dx$ f) $\displaystyle\int_a^b f(x)F(x)e^{F(x)}dx$

6) Contestar razonadamente a las siguientes cuestiones

a) Si sabemos que $\displaystyle\int_1^9 f(x)dx = 7$, calcular $\displaystyle\int_1^3 xf(x^2)dx$.

b) Si sabemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = 5$, calcular $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(3x)dx$.

c) Si sabemos que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 6$, calcular las siguientes integrales

$$\mathrm{c}_1)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(3x)dx \quad \mathrm{c}_2)\ \int_0^{+\infty} \frac{f(\ln x)}{x}dx.$$

d) Si sabemos que $\displaystyle\int_1^3 f(x)dx = 6$, $f(3) = 2$, $f(1) = 4$, calcular las siguientes integrales

$$\mathrm{d}_1)\ \int_1^9 \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx, \quad \mathrm{d}_2)\ \int_1^3 xf'(x)dx$$

Soluciones:

1)a) $\displaystyle\int \sqrt[3]{x}(x^5 + 3x^2 + 2)dx = \tfrac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \tfrac{9}{10}x^{\frac{10}{3}} + \tfrac{3}{19}x^{\frac{19}{3}} + k$

b) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx = \frac{2(\ln x)^{3/2}}{3} + k$

c) $\displaystyle\int x^2 \operatorname{sen}(x^3)dx = -\tfrac{1}{3}\cos(x^3) + k$

d) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3}dx = -\tfrac{1}{4x^2}(2\ln x + 1) + k$

e) $\displaystyle\int (x^2 + 1)e^{-2x}dx = -\tfrac{1}{4}e^{-2x}(2x^2 + 2x + 3) + k$

f) $\displaystyle\int (x + 3)\ln x\, dx = \tfrac{1}{2}x^2\ln x - 3x + 3x\ln x - \tfrac{1}{4}x^2 + k$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x) + k$

h) $\displaystyle\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -e^{\frac{1}{x}} + k$

i) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln x\,dx = \frac{2}{9}\sqrt{x^3}\,(3\ln x - 2) + k$

j) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^3+3x}dx = \frac{1}{3}\ln|x^3+3x| + k$

k) $\displaystyle\int (\operatorname{sen} x)\sqrt[3]{\cos x}dx = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + k.$

l) $\displaystyle\int x\sqrt{x+1}dx = \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + k$

2) a) $-e^{\cos^2 x}\operatorname{sen} x - 3x^2e^{x^6}$
b) $\frac{1}{2x}e^{\sqrt{x}} - \frac{1}{\ln x}.$
c) $2\sqrt{2x}e^{2x} - 3\sqrt{\ln(3x+1)}$

3) a) $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}dx = 2$

c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}}dx = \frac{8}{3}$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4$

e) $\displaystyle\int_0^1 \ln(\sqrt{x})\,dx = -\frac{1}{2}.$

f) $\displaystyle\int_3^{+\infty} x^3e^{-x^2}dx = \frac{5}{e^9}.$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} xe^{-x}dx = \frac{2}{e}.$

h) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3}dx = \frac{1}{4}.$

i) $\displaystyle\int_4^{\infty} e^{-\sqrt{x}}dx = \frac{6}{e^2}.$

j) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)\ln(\operatorname{sen} x)dx = -1.$

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\ln(\sqrt{x})dx = -\frac{2}{9}.$

l) $\displaystyle\int_2^{\infty} (x+1)e^{-2x}dx = \frac{7}{4e^4}.$

4) a) $e + 1/e - 2$, b) 8, c) 12, d) 1/12, e) 1/2, f) 2, g) 16/3.

5) a) $2\left(F(\sqrt{b}) - F(\sqrt{a})\right)$, b) $\ln(F(b)) - \ln(F(a))$, c) $\frac{1}{2}\left(F(b)^2 - F(a)^2\right)$, d) $bf(b) - af(a) - F(b) + F(a)$, e) $2\left(\sqrt{b}f(\sqrt{b}) - \sqrt{a}f(\sqrt{a}) - F(\sqrt{b}) + F(\sqrt{a})\right)$, f) $e^{F(b)}\left(F(b) - 1\right) - e^{F(a)}(F(a) - 1)$.

6) a) 7/2 b) 5/3, c_1) 2, c_2) 6, d_1) 12, d_2) -4.