Facultad de Informática
Grado en Ingeniería Informática

Lógica

BLOQUE 1: LÓGICA PROPOSICIONAL

Tema 3: Razonamiento Semántico

Profesor: Javier Bajo
jbajo@fi.upm.es

Introducción.

- **Estructura de la asignatura**

Bloque 1
Lógica Proposicional

↓

Bloque 2
Lógica de Primer Orden

Lógica.

❑ Bloque I

Tema 1
Lenguajes proposicionales: sintaxis y uso en la formalización de argumentos

Tema 2
Semántica formal: Funciones de verdad, tautologicidad, consecuencia lógica

Tema 3
Razonamiento semántico: definición de modelos y contra-modelos

Tema 4
Cálculo de deducción natural proposicional

Tema 5
Forma clausular

Tema 6
Cálculo de resolución proposicional

Tema 7
Conceptos metalógicos fundamentales de los sistemas formales proposicionales

Validez.

- Atendiendo a la semántica las FBF pueden clasificarse en:

  - **Válida o Tautología**. Una fórmula A es una tautología si y solo si para cualquier interpretación i se cumple que $i(A)=V$. (siempre es verdadera).
    A es válida sii no existe una interpretación i tal que $i(A) = F$ (se representa $\models A$)

  - **Contradicción**. Una fórmula A es una contradicción si y solo si para cualquier interpretación i se cumple que $i(A) = F$. (Siempre es falsa).
    A es contradicción sii no existe una interpretación i tal que $i(A) = V$.

  - **Contingencia o Indeterminación**. Una fórmula A es una contingencia si y solo si hay dos interpretaciones i_1 e i_2 tal que que $i_1(A)= F$ y $i_2(A)= V$. (Unas veces es cierta y otras falsa).
    A es contingencia sii existe alguna interpretación i_1 tal que $i_1(A) = V$ y existe alguna interpretación i_2 tal que $i_2(A) = F$

  - Una fórmula A es válida sii ¬A es una contradicción

  - Una fórmula A es contingente sii ¬A es contingente

Satisfacibilidad.

- Dado un lenguaje proposicional LP:
  - Una interpretación i **satisface** una fórmula $A \in FBF_{LP}$ sii $i(A) = V$
  - Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **satisfacible** sii *existe (al menos) una* interpretación *i* tal que $i(A) = V$
  - Una fórmula $A \in FBF_{LP}$ es **insatisfacible** sii *no existe ninguna* interpretación *i* tal que $i(A) = V$
  - Para conjuntos de fórmulas $\{A_1,...,A_n\}$, $A_i \in FBF_{LP}$ para todo $i: 1 \leq i \leq n$:
  - Una interpretación que satisface una fórmula es un **modelo** de la fórmula.
  - Una interpretación que hace falsa una fórmula es un **contramodelo** de la fórmula

Validez y Satisfacibilidad.

- A partir de las definiciones vistas se puede observar que:

  - Una fórmula es **válida** sii
    - no tiene contramodelos sii
    - todas sus interpretaciones son modelos sii
    - todas sus interpretaciones la satisfacen

  - Una fórmula es una **contradicción** sii
    - no tiene modelos sii
    - todas sus interpretaciones son contramodelos sii
    - es insatisfacible

  - Una fórmula es **contingente** sii
    - tiene modelos y contramodelos

Validez y Satisfacibilidad.

- Determinar para cada una de las siguientes fórmulas si es válida, contradictoria o contingente, indicando la(s) interpretación(es) que lo demuestran:

1. $p \wedge q \rightarrow p$
2. $p \vee q \rightarrow p$
3. $p \rightarrow \neg p$
4. $p \vee q \rightarrow (r \vee s \rightarrow p)$
5. $(p \rightarrow q) \wedge (p \wedge \neg q)$
6. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
7. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
8. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
9. $(p \rightarrow \neg q) \wedge \neg(r \wedge \neg p) \rightarrow (q \rightarrow \neg r)$
10. $(p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
11. $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$
12. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
13. $p \rightarrow (q \wedge \neg q \rightarrow \neg p)$
14. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
15. $(p \rightarrow q) \rightarrow ((p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \wedge r))$

Consecuencia Lógica.

- Dado un lenguaje proposicional LP, un conjunto de fórmulas $\{A_1,...,A_n\}$, $A_i \in FBF_{LP}$ para todo $i{:}1 \leq i \leq n$, y una fórmula $B \in FBF_{LP}$:

Consecuencia lógica:

B es consecuencia lógica de $\{A_1,...,A_n\}$ ($[A_1,...,A_n] \models B$)

- sii toda interpretación que satisface $\{A_1,...,A_n\}$ también satisface B
- sii no existe ninguna interpretación que satisfaga $\{A_1,...,A_n\}$ y no satisfaga a B

Consecuencia Lógica.

Argumento correcto:

Un argumento con premisas $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y conclusión B es correcto sii **$[A_1,\ldots,A_n] \models B$**

- Para decidirlo se pueden hacer dos análisis:
  1. Ver *si todas* las interpretaciones que satisfacen $\{A_1,\ldots,A_n\}$ también satisfacen B, o bien
  2. Ver que *no existe* una sóla interpretación que satisfaga $\{A_1,\ldots,A_n\}$ y no satisfaga B

- El caso 1): requiere examinar todas las interpretaciones posibles y ver si se cumple la condición
- El caso 2): podemos centrarnos en definir una interpretación **i** tal que $i(\{A_1,\ldots,A_n\}) = V$ y $i(B) = F$

Consecuencia Lógica.

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q \} \vDash r$$

$i(p)$	$i(q)$	$i(r)$	$i(q \rightarrow r)$	$i(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$i(p \wedge q)$	$i(p \rightarrow (q \rightarrow r), p \wedge q)$
F	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
V	F	V	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V	V

De todas las interpretaciones posibles, sólo una hace verdad a las dos premisas, y esa interpretación también hace verdad a la conclusión. **Por tanto, sí hay relación de consecuencia lógica.**

Consecuencia Lógica.

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \wedge \neg\neg q, r \} \vDash q \vee s$$

- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:

1. $i(p \wedge \neg\neg q) = V$ sii
    1. **$i(p) = V$**
    2. $i(\neg\neg q) = V$ sii $i(q) = F$ sii **$i(q) = V$**
2. **$i(r) = V$**
3. $i(q \vee s) = F$ sii
    1. **$i(q) = F$** (entra en contradicción con 1.2)
    2. **$i(s) = F$**

- Puesto que no es posible definir un contramodelo, el argumento es correcto: **hay** relación de consecuencia lógica entre las premisas y la conclusión

Analizar

i(s)	i(p)	i(q)	i(r)	i(¬¬q)	i(p ∧ ¬¬q)	i(p ∧ ¬¬q, r)	i(q ∨ s)
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	F	F	V
V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	F	V	V	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

No es posible encontrar una combinación que haga Verdaderas a las premisas y Falsa a la conclusión

Consecuencia Lógica.

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{ p \wedge q, \neg(p \rightarrow r) \} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$$

- Tratamos de definir un contramodelo del argumento:
  1. $i(p \wedge q) = V$ sii
     1. **$i(p) = V$**
     2. **$i(q) = V$**
  2. $i(\neg(p \rightarrow r)) = V$ sii $i(p \rightarrow r) = F$
     1. **$i(p) = V$**
     2. **$i(r) = F$**
  3. $i(q \wedge (p \rightarrow r)) = F$ sii
     1. **$i(q) = F$** (entra en contradicción con 1.2)

     o bien

     2. $i(p \rightarrow r) = F$
        1. **$i(p) = V$** (es compatible con 1.1)
        2. **$i(r) = F$** (es compatible con 2.2)

- Sí es posible definir un contramodelo del argumento: $i(p) = i(q) = V$, $i(r) = F$, por tanto el argumento no es correcto: **no hay** relación de consecuencia lógica

Consecuencia Lógica.

Analizar si se cumple la relación de consecuencia lógica:

$$\{\ p \wedge q,\ \neg(p \rightarrow r)\ \} \vDash q \wedge (p \rightarrow r)$$

- Lo comprobamos también mediante la opción de tablas de verdad:

i(p)	i(q)	i(r)	i(p ∧ q)	i(p → r)	i(¬(p → r))	i(p ∧ q, ¬(p → r))	i(q ∧ (p → r))
F	F	F	F	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F	F
V	V	F	V	F	V	V	F
V	V	V	V	V	F	F	V

Es posible encontrar una combinación que haga Verdaderas a las premisas y Falsa a la conclusión → CONTRAMODELO → NO HAY Consecuencia Lógica

Ejercicios.

Determinar si las siguientes argumentaciones son correctas. Si no lo son, indicar la interpretación que lo demuestra (contramodelo).

1. $[p, p \rightarrow q] \vDash q$
2. $[\neg p, p \vee q] \vDash q$
3. $[p \rightarrow q, \neg p] \vDash \neg q$
4. $[p \rightarrow q, \neg q] \vDash \neg p$
5. $[p \leftrightarrow q, \neg p] \vDash q$
6. $[p \wedge q] \vDash p$
7. $[\neg (p \wedge q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$
8. $[\neg (p \vee q)] \vDash \neg p \wedge \neg q$

Equivalencia Lógica.

- Dos fórmulas A y B son *(lógicamente) equivalentes* (**A ⇔ B**) sii para toda interpretación i se cumple que i(A) = i(B)

- Esta definición implica que:

  A y B son consecuencia lógica una de la otra ($A \models B$ y $B \models A$)

  la fórmula $A \leftrightarrow B$ es válida (es una tautología)

- Por ejemplo: **$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$**

i(p)	i(q)	$i(p \rightarrow q)$	$i(\neg p \vee q)$	$i((p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q))$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Equivalencia Lógica.

- La equivalencia entre fórmulas proporciona numerosas ventajas prácticas, entre ellas:

  - permite utilizar indistintamente las fórmulas equivalentes en una demostración (lo utilizaremos más adelante)

  - permite reducir el tamaño de un lenguaje proposicional (disminuir el nº de conectivas que emplea).
    - Por ejemplo, cualquier lenguaje proposicional puede reducirse a otro que sólo utiliza $\{\neg, \vee\}$
    - Esta reducción simplifica tareas como:
      - construcción de sistemas sintácticos de demostración
      - demostración de las propiedades metalógicas del sistema formal

Equivalencia Lógica.

Algunas equivalencias lógicas muy utilizadas:

- $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$ — doble negación
- $p \wedge p \Leftrightarrow p$ — ley de idempotencia
- $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ — conmutatividad de la conjunción
- $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$ — conmutatividad de la disyunción
- $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$ — asociatividad de la conjunción
- $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ — asociatividad de la disyunción
- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ — definición de la implicación en función de la disyunción
- $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ — ley de De Morgan
- $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ — ley de De Morgan
- $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ — distributividad de la conjunción respecto a la disyunción
- $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ — distributividad de la disyunción respecto a la conjunción
- $p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ — definición de la doble implicación en función de la implicación

Equivalencia Lógica.

De los pares de fórmulas siguientes, ¿en cuáles se cumple $A \vDash B$?, ¿en cuáles se cumple $B \vDash A$?, ¿en cuáles A y B son equivalentes?

1. A: $p \wedge q$, B: $p \vee q$
2. A: $p \rightarrow q$, B: $q \rightarrow p$
3. A: $p \vee q \rightarrow r$, B: $p \rightarrow r$
4. A: $(p \rightarrow q) \rightarrow r$, B: $p \vee q \rightarrow r$
5. A: $p \rightarrow q$, B: $p \leftrightarrow q$