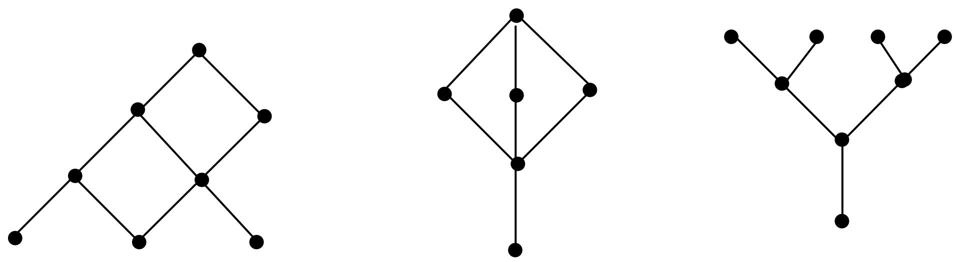
EJERCICIOS TEMA 4

4.1. Dado un conjunto parcialmente ordenado (A, R), estudiar si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Si (A, R) es retículo, entonces es totalmente ordenado.

b) Si (A, R) es totalmente ordenado, entonces es retículo.

4.2. Estudiar cuales de los siguientes conjuntos ordenados son retículos



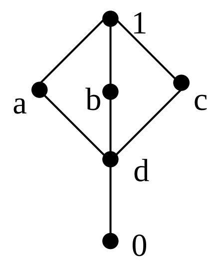
4.3. Obtener los diagramas de Hasse de todos los retículos, salvo isomorfismos, de uno, dos, tres, cuatro y cinco elementos.

4.4. Sea F(N) la colección de todos los subconjuntos finitos de N. ¿Tiene $(F(N),\subseteq)$ algún elemento maximal? ¿Tiene algún elemento minimal? ¿Es $(F(N),\subseteq)$ un retículo?

4.5. Sea E(N) la colección de todos los subconjuntos finitos de N que tienen un número par de elementos. En $(E(N),\subseteq)$ se consideran los elementos $A=\{1,2\}$, $B=\{1,3\}$ encontrar cuatro cotas superiores para $\{A,B\}$. ¿Tiene $\{A,B\}$ supremo en $(E(N),\subseteq)$? ¿Es $(E(N),\subseteq)$ un retículo?

4.6. Estudiar si en el retículo de la figura se verifica la igualdad:

$a\vee(b\wedge c)=(a\vee b)\wedge(a\vee c)$



4.7. Encontrar el complementario de cada elemento de D_{42} y D_{105}.

4.8. Dados el conjunto ordenado A = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j} y el subconjunto B = {e, f, h, i} descritos por el diagrama de Hasse de la figura, se pide:

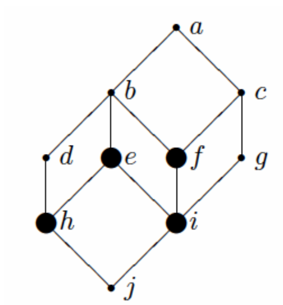
i) Hallar cotas, supremo e ínfimo, si existen, de B en A

ii) Hallar, si existen, maximales y minimales de B

iii) ¿Es A un retículo ¿Y B? ¿Es B subretículo de A?

iv) ¿Es A un retículo acotado? ¿Y complementario?

v) El complementario de cada elemento, ¿es único?



4.9. Expresar la operación conjunción en función de la disyunción y la complementaria. Expresar la disyunción en función de la conjunción y la complementaria.

4.10. Demostrar que en un álgebra de Boole, las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $x\cdot y' = 0$ (b) $x + y = y$ (c) $x' + y = 1$

4.11. Verificar que en un álgebra de Boole se cumple que $x + xy = x$. Comprobar la igualdad aplicando las leyes del álgebra de Boole y tablas de verdad.

4.12. Demostrar que en un álgebra de Boole se verifican las siguientes propiedades:
a) $a \le b \Leftrightarrow b' \le a'$
b) Si $a \le b \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = b \wedge (a \vee c)$
c) Si $a \le b \le c \Rightarrow (a \wedge b) \vee (a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge c) \vee (a \wedge c) = b$
d) $a \le b \Leftrightarrow a \wedge b' = 0 \Leftrightarrow a' \vee b = 1$

4.13. Construir un isomorfismo entre las álgebras de Boole $(P(C),\subset)$ y $(B^n,\le^n)$ para algún $n \in N$, siendo $C=\{1,2,3,4\}$.

4.14. Sea $(A,\le)$ un álgebra de Boole de 8 elementos ¿Cuántos elementos minimales tiene $A-\{0\}$? ¿Y si A tiene 16 elementos?

4.15. Expresar cada una de las siguientes funciones booleanas usando sólo los operadores suma y complemento:
(a) $x + y'z$ (b) $x'(y + z') + xy$ (c) $x + y'(x + z')$

4.16. El operador booleano XOR (OR exclusivo), denotado por $\oplus$, se define así:
$1\oplus 1 = 0$, $1\oplus 0 = 0\oplus 1 = 1$, $0\oplus 0 = 0$
(a) Calcular $x\oplus 0$, $x\oplus 1$, $x\oplus x$, $x\oplus x'$
(b) Comprobar que $x\oplus y = (x + y)(x'y')$

4.17. El operador booleano NAND, designado por la notación $|$, se define así:
$1 \mid 1 = 0$, $1 \mid 0 = 0 \mid 1 = 0 \mid 0 = 1$
Comprobar que este operador constituye un conjunto funcionalmente completo de operadores, pues todos los demás se pueden representar con este operador.
$x' = x \mid x$
$xy = (x \mid y) \mid (x \mid y)$
$x + y = (x \mid x) \mid (y \mid y)$

4.18. Dada la expresión $E(x,y)=(x\wedge y')\vee((y\wedge(x'\vee y))$. Hallar la tabla de verdad de la función booleana $f: B^2\to B$ definida por E.

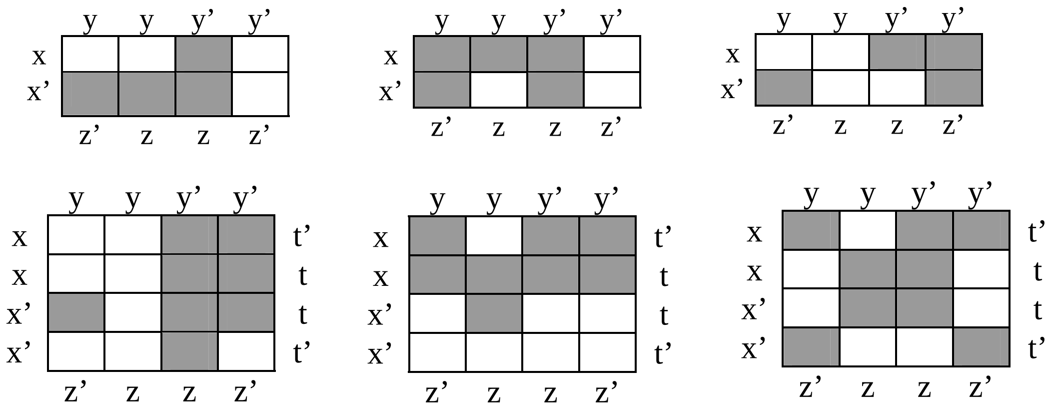
4.19. Determinar S(f) para las funciones booleanas $f:B^3\to B$ definidas por:
a) $f(x,y,z)=x\wedge y$ b) $f(x,y,z)=z'$ c) $f(x,y,z)=(x\wedge y)\vee z'$ d) $f(x,y,z)=1$

4.20. Determinar todas las funciones booleanas binarias que cumplan las condiciones: $f(a',b) = f(a,b') = (f(a,b))'$.

4.21. Sea $S = \{(1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,1), (1,0,0,0), (0,0,0,1), (0,1,0,0), (0,0,0,0), (0,1,0,1)\}$, subconjunto de B^4 con el orden producto. Dibujar el diagrama de Hasse de S. Estudiar si es álgebra de Boole. Simplificar la expresión booleana de la función f que toma valor 1 en el conjunto S y cero en el resto, mediante el mapa de Karnaugh.

4.22. Dada la función booleana $f: B^4 \to B$ definida por la expresión $f(x, y, z, t) = xyzt + xy'zt + xyzt' + xy'zt' + x'y'z't' + x'yz't' + x'y'z't + x'yz't$, se pide:
a) Demostrar que $f(x,y,z,t) = xz + x'z'$ utilizando las propiedades de un álgebra de Boole.
b) Verificar el resultado anterior utilizando mapas de Karnaugh

4.23. Escribir las expresiones booleanas que definen cada uno de los siguientes mapas de Karnaugh .



4.24. Diseñar los circuitos con puertas lógicas correspondientes a las expresiones booleanas
(x + y)x’ (x + y)(y + z)’

4.25. Construir con puertas lógicas el circuito que represente la función xy’ + x’y’ + x’y. Simplificar la expresión y construir el circuito simplificado.

4.26. Dado el conjunto de verdad S(f)={(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (0,1,0,1), (0,1,1,1), (0,1,1,0), (1,1,0,0), (1,1,1,1), (1,0,1,0)} encontrar la expresión booleana más simplificada para la función f.

4.27. Completar los huecos de la tabla de verdad de la derecha, teniendo en cuenta que la expresión booleana de la función f ha de ser lo más sencilla posible. Determinar esa expresión y dibujar el mapa de Karnaugh correspondiente.

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	1
1	1	1	

4.28. Simplificar al máximo las siguientes expresiones booleanas como suma de productos elementales:
a) (x'+y)'+y'z b) (x'y)'(x'+xyz') c) x(xy'+x'y+y'z)
d) (x+y)'(xy')' e) y(x+yz)' f) (x+y'z)(y+z')

4.29. Encontrar la expresión más sencilla que detecte los números de los conjuntos siguientes: A={múltiplos de dos}, B={múltiplos de tres} y C={múltiplos de cuatro} dentro del conjunto {0, 1, 2, 3, ..., 15}.

4.30. Definir una expresión booleana que compare, según el orden ≤, dos números del conjunto {0, 1 ,2, 3}. Simplificar la expresión obtenida.

4.31. Un examen de tipo test consta de 4 preguntas. Las respuestas correctas son:

1ª→Sí 2ª→No 3ª→Sí 4ª→Sí

Construir una expresión booleana que analice cada examen y distinga los aprobados de los suspensos. Se considera aprobado si al menos tres respuestas son correctas.

4.32. El consejo de administración de una empresa está compuesto por cinco miembros, $\{m_1,m_2,m_3,m_4,m_5\}$. Se somete a votación la aprobación de un proyecto. La votación es secreta y nadie puede abstenerse. Suponiendo que nadie vota en blanco, obtener una expresión booleana E, en forma de suma de productos de las variables binarias x_i (tales que x_i toma el valor 1 cuando m_i vota sí y 0 en caso contrario), que tome el valor 1 cuando se aprueba el proyecto con al menos tres votos favorables de los miembros $\{m_1,m_2,m_3,m_4\}$. Simplificar la expresión E.

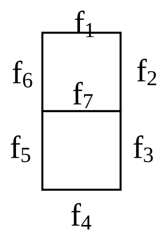
4.33. Un ascensor tiene un dispositivo de seguridad para que no puedan viajar niños pequeños ni pesos excesivos. Queremos que el ascensor se ponga en marcha cuando esté vacío o con pesos entre 25 y 300 kilos. Dotamos al ascensor de tres sensores: A sensible a cualquier peso, B sensible a pesos mayores de 25 kilos y C sensible a pesos superiores a 300 kilos. Diseñar el circuito más sencillo posible que cumpla dichas condiciones.

4.34. Para evitar errores de transmisión en ciertos mensajes codificados, es frecuente añadir un bit, llamado de control, a un bloque de bits. Así, por ejemplo, en la representación de cifras decimales mediante un código binario,

0 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00001$; 1 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00010$;
2 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00100$; 3 se representa como $a_4a_3a_2a_1c = 00111$; etc.

El bit de paridad c vale 1 si el número de unos del bloque es par y vale 0 en caso contrario. Definir una expresión E que verifique lo anterior para los dígitos del 0 al 9 de manera que sea lo más simplificada posible en la forma suma de productos.

4.35. La aparición de una cifra decimal en el visor de una calculadora se produce mediante un circuito con cuatro entradas, que se corresponden con el código binario del dígito, y siete salidas, f_i (i=1, .., 7), que se presentan como pequeños segmentos que se iluminan o apagan en el visor, según el esquema de la figura:



Trazar la tabla de verdad de una cada una de las funciones booleanas f_i: $B^4 \to B$ que representan este fenómeno binario. Observar que hay elementos de B^4 para los que cada componente f_i de F puede tomar 0 ó 1 indiferentemente, pues son casos imposibles (representan números mayores que nueve). Teniendo esto en cuenta encontrar expresiones mínimas para f_1 y f_2.

4.36. Una barrera de paso a nivel depende de un semáforo que muestra sólo uno de los tres colores (verde, rojo, naranja) y una señal luminosa de color blanca que se activa independientemente del semáforo. La barrera se cierra para no dejarnos pasar si el semáforo está en rojo o si, simultáneamente, el semáforo está en naranja y la señal blanca activada. Hallar, mediante un mapa de Karnaugh, la expresión booleana más simple, en forma de suma de productos elementales, que representa la apertura de dicha barrera.

4.37. Hallar una expresión booleana mínima, en forma de suma de productos, para la función booleana que toma el valor 1 en el subconjunto de los números que no son primos del conjunto C ={0, 1, 2, …, 15}

4.38. Una asamblea de 36 personas debe votar para aceptar o rechazar una propuesta. La asamblea se divide en cuatro grupos X, Y, Z y T, que cuentan con 5, 8, 10 y 13 miembros respectivamente, de modo que todos los miembros de un grupo votan conjuntamente. En la votación no hay abstenciones y la propuesta se acepta si se alcanza la mayoría absoluta

a) Construir la tabla de verdad de la función f(x,y,z,t) que toma valor 1 si se acepta la propuesta y 0 si se rechaza.

b) Simplificar la expresión booleana que representa f

4.39. Define, mediante la tabla de verdad, una función booleana que detecte los números primos del conjunto $\{n \in N \ / \ n \leq 15\}$. Obtén una expresión booleana que la represente y simplifícala.