Ejercicios (Sucesiones de números reales)

4.1. Utilícese la definición de límite para comprobar que el límite es el indicado:

a) $\lim_n \left(2 + \dfrac{1}{n+1}\right)$, b) $\lim_n \dfrac{1}{n^2+1} = 0$, c) $\lim_n \dfrac{2n}{n+1} = 2$,

d) $\lim_n \dfrac{3n+1}{2n+5} = \dfrac{3}{2}$, e) $\lim_n \dfrac{\alpha+n}{\beta+n} = 1$, f) $\lim_n \dfrac{n+3}{n^3+4} = 0$,

g) $\lim_n \dfrac{n^2-1}{2n^2+3} = \dfrac{1}{2}$, h) $\lim_n \dfrac{n^2+2n+2}{n^2+n} = 1$, i) $\lim_n \dfrac{n}{2n+\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{2}$,

j) $\lim_n \dfrac{1}{n} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi}{4} = 0$, k) $\lim_n \dfrac{\operatorname{sen} n}{\sqrt{n}} = 0$,

l) $\lim_n (\sqrt{n^2+n} - n)$, m) $\lim_n (\sqrt[8]{n^2+1} - \sqrt[4]{n+1}) = 0$.

4.2. Utilizar la definición de límite para probar las siguientes proposiciones.

a) Si (s_n) es una sucesión y $s \in \mathbb{R}$ entonces $\lim_n s_n = s$ si, y solo si, $\lim_n |s_n - s| = 0$.

b) Supongamos que existe una sucesión (t_n) convergente a 0 y un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - s| \leqslant t_n$ si $n \geqslant n_0$. Entonces $\lim_n s_n = s$.

4.3. De la sucesión (s_n) se sabe que es convergente y que sus términos son alternativamente positivos y negativos. ¿A qué converge? Razonar la respuesta y mostrar un ejemplo.

4.4. Calcúlese, si existen, los siguientes límites:

(1) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$, (2) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+1}$, (3) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{2n^2+3}$,

(4) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+7}}$, (5) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$, (6) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$,

(7) $\lim_{n\to\infty} (n - \sqrt{n+a}\sqrt{n+b})$, (8) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n+2}}$,

(9) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{n^2+1}$, (10) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$, (11) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{2^{n+1} + (-1)^{n+1}}$,

(12) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n \sqrt{n} \operatorname{sen}\, n^n}{n+1}$, (13) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$, $a, b > 0$,

(14) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b^n}{2^n}$, $b > 0$, (15) $\lim_{n\to\infty} (a^n + b^n)^{1/n}$, $0 < a < b$,

(16) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{b^n}$, $b > 0$, (17) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$, (18) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2}}{n!}$,

(19) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2a^n$, (20) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n^2}$, (21) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b^n}{n!}$,

(22) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^k}$, $k \in \mathbb{N}$.

4.5. Estudiar el límite de la sucesión

$$\Big(\frac{4+3}{1\cdot 3}, \frac{9-4}{2\cdot 4}, \frac{16+5}{3\cdot 5}, \frac{25-6}{4\cdot 6}, \dots\Big)$$

4.6. Calcular el límite de las sucesiones de término general:

(1) $\dfrac{1}{n}\Big[\Big(a+\dfrac{1}{n}\Big)^2 + \Big(a+\dfrac{2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(a+\dfrac{n-1}{n}\Big)^2\Big]$,

(2) $\dfrac{(1^2+2^2+\cdots+n^2)^2}{(1+2+\cdots+n)^3}$, (3) $\dfrac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{1+n+n^2+n^3}$,

(4) $\dfrac{3\sqrt[3]{n}-4\sqrt[5]{n}^2}{\sqrt[3]{n-3}(4-\sqrt[5]{n})}$, (5) $\dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}}}$,

(6) $\sqrt{4n^2-1}-(2n-1)$, (7) $\sqrt[3]{n^3+an^2}-\sqrt[3]{n^3-an^2}$,

(8) $n\Big(\sqrt[3]{1+\dfrac{a}{n}}-1\Big)$, (9) $\dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n}}-\sqrt{n^2-\sqrt{n}}}{n(\sqrt[3]{n^3+\sqrt{n}}-\sqrt[3]{n^3-\sqrt{n}})}$,

(10) $\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{3n^2-1}-3n$, (11) $\sqrt{9n^2-n}-\sqrt[3]{27n^3-5n^2}$,

(12) $(4n+3)\log\frac{n+1}{n-2}$, (13) $\Big(\dfrac{n^2+3n-2}{n^2+n}\Big)^{\frac{n^3+2}{2n^2+1}}$,

(14) $\Big(\dfrac{n+1}{n-1}\Big)^{\frac{n^2+2}{n-3}}$, (15) $\Big(1+\log\dfrac{3n^2+2n+1}{3n^2+5n}\Big)^{4n+1}$,

(16) $\Big(\dfrac{1}{n}\Big)^{\frac{1}{\log(3/n)}}$, (17) $(2+3n^4)^{\frac{1}{3+2\log(n+1)}}$,

(18) $\Big(\dfrac{\log(n^2+1)}{\log(n^2-1)}\Big)^{n^2\log n}$, (19) $\sqrt[3]{(n+a)(n+b)(n+c)}-n$,

(20) $\dfrac{2^{2n}(n!)^2\sqrt{n}}{(2n+1)!}$, (21) $n\Big(\dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n-2)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}\Big)^2$,

(22) $\dfrac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n}$, (23) $\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$,

(24) $\log n - n$,

(25) $\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}$, $p\in\mathbb{N}$,

(26) $\dfrac{\cos 1+\cos\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-n}{\log(n^3+1)}$,

(27) $\dfrac{\sqrt{1\cdot 2\cdot 3}+\sqrt{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{n^2\sqrt{n}}$,

(28) $\dfrac{\log 1-\log 2+\log 3-\cdots+\log(2n-1)-\log(2n)}{\log n}$,

(29) $\dfrac{\sqrt{2!}\tan\frac{1}{2}+\sqrt[3]{3!}\tan\frac{1}{3}+\cdots+\sqrt[n]{n!}\tan\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+1}}$,

(30) $\sqrt[n]{\sqrt[n]{\binom{n}{1}\binom{n}{2}\cdots\binom{n}{n}}}$,

(31) $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(n+n)^2}$,

(32) $(2^n+3^n)^{1/n}$,

(33) $\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+1)}+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+2)}+\cdots+\operatorname{sen}\dfrac{n^2\pi}{2(n^2+n)}$.

4.7. Hallar una relación entre a, b y c para que

$$\lim_n n^a\frac{(n+1)^b-n^b}{(n+1)^c-n^c}$$

sea real y distinto de cero. En ese caso, hallar dicho límite.

4.8. Discutir, según el valor de $a\in\mathbb{R}$, la existencia y el valor de $\lim_n \frac{a^n+n}{a^{n-1}+2n}$.

4.9. Sea $u_n=\frac{1}{1+n}+\frac{1}{2+n}+\frac{1}{3+n}+\cdots+\frac{1}{n+n}$. Probar que existe $\lim_n u_n$ y está comprendido entre $1/2$ y 1.

4.10. Hallar, si existe, el límite de la sucesión dada por $s_{n+1}=\frac{n}{2n+1}s_n$.

4.11. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $x_1>1$ y $x_{n+1}=2-1/x_n$, $n\in\mathbb{N}$.

b) $x_1>0$ y $x_{n+1}=\sqrt{a+x_n}$, $n\in\mathbb{N}$, donde $a>0$.

c) $x_1>1$ y $x_{n+1}=\sqrt{1+x_n^2}$, $n\in\mathbb{N}$.

d) $x_1>0$ y $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$, donde $a>0$.

e) $x_1=m$ y $x_{n+1}=x_n-\dfrac{x_n^2-m}{2x_n}$, donde $m\in\mathbb{N}$.

f) $x_1<x_2$ y $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-2}+x_{n-1})$, $n\geqslant 3$.

g) $x_1<x_2$ y $x_n=\frac{1}{3}y_{n-1}+\frac{2}{3}y_{n-2}$.

4.12. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones de números reales definidas por su primer término $a_1 = 2$, $b_1 = 2$ y por las relaciones $a_{n+1})(a_n + 3b_n)/4$ y $b_{n+1} = (3a_n + b_n)/4$. Discutir la verdad o falsedad de las siguientes proposiciones:

a) La sucesión $u_n = a_n + b_n$ es constante.

b) La sucesión $v_n = a_n - b_n$ es una sucesión geométrica.

c) Para cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que $a_n = 3 - 1/2^n$ y $b_n = 3 + 1/2^n$.

4.13. Este ejercicio supone una aproximación a la prueba de la *Fórmula de Stirling*.

a) Probar que la sucesión
$$s_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$$
es estrictamente decreciente y converge a e. En consecuencia, $s_n > e$.

Indicación: Es más fácil mostrar que (s_n^2) es decreciente.

b) Probar que la la sucesión
$$t_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$$
converge, mostrando que es decreciente y positiva. En consecuencia, existe una constante C tal que
$$n! \sim \frac{Cn^{n+1/2}}{e^n}$$
cuando $n \to \infty$. Este resultado se debe a De Moivre. Posteriormente, Stirling probó que $C = \sqrt{2\pi}$, así que
$$n! \sim \frac{n^n\sqrt{2\pi n}}{e^n}.$$
cuando $n \to \infty$.

4.14. Sea (x_n) una sucesión. Probar que si existen $\lim_n x_{2n}$, $\lim_n x_{2n-1}$ y $\lim_n x_{3n}$, entonces existe $\lim_n x_n$ y coincide con los anteriores.

4.15. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ es (a^n) una subsucesión de $(\frac{1}{n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2^n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2n})$? ¿Y de $(\frac{1}{2n-1})$?

4.16. Construir una sucesión (s_n) con la siguiente propiedad, o mostrar que no existe tal sucesión:

> Para todo número natural m, (s_n) tiene una subsucesión que converge a m.

4.17. Demostrar que si (s_n) converge a l, entonces la sucesión de medias

$$x_n = \frac{s_1 + s_2 + \cdots + s_n}{n}$$

converge también a l. Dar también un ejemplo en el que (x_n) converja, pero (s_n) no.

4.18. Calcular los límites superior y inferior de las sucesiones de término general:

a) $a + \dfrac{(-1)^n}{n}$, b) $(-1)^n + \dfrac{1}{n}$, c) $\dfrac{(-1)^n}{n} + 1 + (-1)^n$,

d) $\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$, e) $\dfrac{(-1)^n n}{2n+1}$, f) $\dfrac{2n + (-1)^n(n+2)}{3n+3}$,

g) $(-1)^n\left(3 + \dfrac{2n+1}{3n+2}\right)$, h) $a - n^{(-1)^n}$, i) $\dfrac{(-1)^n(n+1)}{2n+1}$,

j) $\big((-1)^n + 1\big)n^2$, k) $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)\cos\dfrac{n\pi}{2}$, l) $\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{2}$,

m) $\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{3}$, n) $\dfrac{n+1}{n+2}\left(\operatorname{sen}\dfrac{n\pi}{4} + \cos n\pi 4\right)$,

ñ) $s_n = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 4, \\ 0, & \text{si } n \text{ es par y no es múltiplo de } 4, \\ 1, & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$