4. Sucesiones de números reales

Análisis de Variable Real

2014–2015

Resumen

Estudiamos en este tema las sucesiones, cuyo idea intuitiva es el de listas infinitas de números. A continuación, estudiamos el concepto de límite de una sucesión. En el caso de sucesiones monótonas, vemos que la existencia de tal límite es equivalente a que la sucesión sea acotada. Se estudian las diferentes operaciones que se pueden realizar con las sucesiones, y vemos cómo se relaciona esto con los límites. Estudiamos a continuación el concepto de subsucesión, y desembocamos en el importantísimo Teorema de Bolzano-Weierstrass. También destacamos la equivalencia entre sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy. También estudiamos las sucesiones divergentes. Por último generalizamos el concepto de límite a los dos conceptos de límite superior y límite inferior.

Índice

1. Sucesiones y límites. Conceptos básicos

1.1. Definición de sucesión

Concepto informal de sucesión

Informalmente, una sucesión de números reales es una lista ilimitada de números

$$(s_1, s_2, s_3, s_4, \dots, s_n, \dots)$$

(n indica el lugar que ocupa el número s_n en la lista). Puesto en forma de tabla,

lugar	1	2	3	4	5	...	n	...
valor	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	...	s_n	...

es obvio que se trata de una función real con dominio $\mathbb{N}$.

Definición de sucesión

Lo que acabamos de ver motiva la siguiente definición formal:

Definición 4.1.

(I) Una *sucesión* de elementos de un conjunto es una aplicación con dominio $\mathbb{N}$ y codominio dicho conjunto.

(II) En particular, una *sucesión de números reales* es una función real con dominio $\mathbb{N}$, o sea, una aplicación $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

(III) El valor que una sucesión s toma en cada $n \in \mathbb{N}$ se suele denotar s_n en lugar de $s(n)$ y recibe el nombre de *término n-ésimo* de la sucesión.

Hagamos dos observaciones:

- No debe perderse de vista que cada término s_n lleva una doble información: su valor y el lugar n que ocupa. Por tanto, una sucesión tiene siempre infinitos términos, incluso aunque tome un solo valor, como es el caso de las sucesiones constantes.

- Como el dominio $\mathbb{N}$ es común a todas las sucesiones, en lugar de utilizar la notación $s\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, es más frecuente utilizar notaciones como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(s_n)_{n=1}^{\infty}$, o, más sencillamente, (s_n).

Ejemplos.

- (Sucesión constante) $s_n = a$, donde a es un número real. La sucesión consta de los términos
$$a, a, a, \dots, a, \dots .$$
- (Sucesión de los números naturales) $s_n = n$. Consta de los términos
$$1, 2, 3, 4, 5, \dots, n, \dots$$
- $s_n = \frac{1}{n}$. Consta de los términos
$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$
- $s_n = (-1)^n$. Consta de los términos
$$-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots, (-1)^n, \dots$$
- Las fórmulas no tienen por qué referirse solo a operaciones algebraicas sencillas. Por ejemplo, considérese la sucesión
$$(3{,}1;\quad 3{,}14;\quad 3{,}141;\quad 3{,}1415;\quad 3{,}14159;\quad 3{,}141592;\quad 3{,}1415926;\quad 3{,}14159265;\quad 3{,}141592653;\quad \dots)$$
formada por las aproximaciones decimales de π. (El término n-ésimo sería la aproximación decimal con n cifras decimales exactas.) Aunque no supiéramos escribir con todas sus cifras el término $1.000.000.000.000.000$-ésimo, sabemos que ese término está perfectamente definido, y lo mismo podemos decir de cualquier otro. En este caso podemos dar una fórmula explícita para el término n-ésimo con ayuda de la función parte entera: concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}$,
$$s_n = 3 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_k}{10^k} + \cdots + \frac{a_n}{10^n},$$
donde $a_k = [10^k\pi] - 10[10^{k-1}\pi]$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. El hecho de que esta fórmula no proporcione un algoritmo de cálculo para los a_k no obsta para que estos estén definidos sin ambigüedad y sin excepción alguna.
- (Sucesión de Fibonacci) $s_1 = 1$, $s_2 = 1$, $s_{n+2} = s_{n+1} + s_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Sus primeros términos son
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Este tipo de sucesiones cuyos términos se definen en función de los anteriores se denominan *sucesiones recurrentes* o *recursivas*. Las sucesiones definidas por recurrencia aparecen con frecuencia en cálculos con ordenadores. (Ver comentario en [1, pág. 85].)

Aunque hemos definido esta sucesión en forma recurrente, se puede dar una expresión para el término general, conocida como *Fórmula de Binet*:

$$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Los siguientes ejemplos también corresponden a sucesiones recurrentes.

- (Sucesiones aritméticas) Se llama *sucesión aritmética* de primer término x y diferencia d a la sucesión (s_n) definida recursivamente por

  $$s_1 = x, \qquad s_{n+1} = s_n + d.$$

  Se prueba que $s_n = x + (n-1)d$.

- (Sucesiones geométricas) Se llama *sucesión geométrica* de primer término x y razón r, a la dada por

  $$s_1 = x, \qquad s_{n+1} = s_n \cdot r.$$

  Se prueba fácilmente que $s_n = x \cdot r^{n-1}$.

- La regla que define una sucesión no tiene por qué ser de carácter estrictamente matemático. Por ejemplo, puede definirse una sucesión poniendo

  $$s_n = \begin{cases} 10^7/3, & \text{si el nombre en castellano del número } n \\ & \qquad \text{contiene la letra } d, \\ \sqrt{\pi}, & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

  (¿cuáles serían sus primeros términos?), o mediante cualquier otra condición que permita asegurar que a cada $n \in \mathbb{N}$ sin excepción se le asocia inequívocamente un número real perfectamente definido. Si calculamos los primeros términos de esta sucesión, obtenemos

  $$\sqrt{\pi}, \frac{10^7}{3}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}, \frac{10^7}{3}, \sqrt{\pi}, \frac{10^7}{3}, \sqrt{\pi}, \dots$$

- Existen sucesiones cuya imagen es exactamente $\mathbb{Z}$. Más difícil: existen sucesiones cuya imagen es exactamente $\mathbb{Q}$ (la *enumeración diagonal* de Cantor). La demostración puede verse en [1, págs. 36–37] o en [5, pág. 609].

- ¿Queda definida una sucesión si para cada $n \in \mathbb{N}$ ponemos

$$s_n = \text{máx}\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2nx - 1 < 0 \,\}?$$

¿Y si ponemos

$$s_n = \text{máx}\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2nx - 1 \leqslant 0 \,\}?$$

En caso afirmativo, ¿puede darse una expresión más directa para s_n?

1.2. Sucesiones convergentes

Sucesiones convergentes

Definición 4.2.

(I) Una sucesión (s_n) es *convergente* si existe un número real l tal que para todo $\varepsilon > 0$ se puede encontrar un número natural n_0 de modo que siempre que $n \geqslant n_0$ se verifique $|s_n - l| < \varepsilon$.

(II) Se dice entonces que el número l es *límite* de la sucesión (s_n), y se escribe

$$l = \lim_{n\to\infty} s_n \qquad \text{o} \qquad l = \lim_n s_n.$$

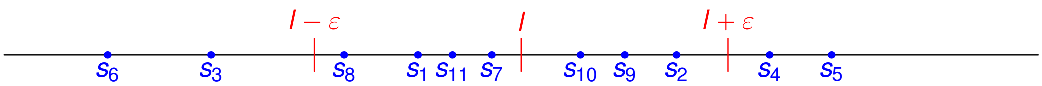
(III) También decimos que (s_n) converge al número l, y lo denotaremos

$$s_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l, \qquad s_n \xrightarrow[n]{} l, \qquad \text{o, sencillamente,} \qquad s_n \longrightarrow l.$$

Recuérdese que la desigualdad $|s_n - l| < \varepsilon$ es equivalente a las dos desigualdades $-\varepsilon < s_n - l < \varepsilon$, que equivalen a su vez a las desigualdades

$$l - \varepsilon < s_n < l + \varepsilon.$$

En la siguiente figura, podemos ver que $|s_n - 6| < \varepsilon$ para $n \geqslant 7$.



Ejemplos.

- La sucesión constante $s_n = c$ ($c \in \mathbb{R}$) converge al número c.

- La sucesión $(1/n)$ converge a 0.

  En efecto, dado $\varepsilon > 0$, por la Propiedad Arquimediana existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Si $n \geqslant n_0$, será

$$|s_n - 0| = \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- La sucesión $(1/n^2)$ converge a 0.

  Dado $\varepsilon > 0$, de nuevo la Propiedad Arquimediana nos asegura la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$. Si $n \geqslant n_0$, será entonces

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

- Si $a > 0$, entonces $\lim_n 1/(1 + na) = 0$.

  Como $a > 0$, se infiere que $0 < na < 1 + na$. Se concluye por consiguiente que $0 < 1/(1 + na) < 1/(na)$, lo cual implica que

$$\left|\frac{1}{1 + na} - 0\right| \leqslant \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n}$$

  para todo $n \in \mathbb{N}$. Si escogemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < a\varepsilon$, entonces para todo $n \geqslant n_0$ será

$$\left|\frac{1}{1 + na} - 0\right| \leqslant \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n_0} < \frac{1}{a} a\varepsilon = \varepsilon.$$

- La sucesión $(\frac{4n^2-3}{5n^2-2n})$ converge a $4/5$.

  Necesitamos poder mayorar por algo más manejable la expresión

$$\left|\frac{4n^2 - 3}{5n^2 - 2n} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{8n - 15}{5(5n^2 - 2n)}\right|,$$

  cuando n es suficientemente grande. Para ello, necesitaremos mayorar superiormente el numerador e inferiormente el denominador. El numerador es fácil, ya que $|8n - 15| < 8n$ para todo n. Para el denominador querremos hacer $5n^2 - 2n \geqslant kn^2$ para algún $k > 0$. Si probamos con $k = 4$, entonces $5n^2 - 2n \geqslant 4n^2$ si $n^2 \geqslant 2n$, o sea, si $n \geqslant 2$. Por tanto, si $n \geqslant 2$, será

$$\left|\frac{4n^2 - 3}{5n^2 - 2n} - \frac{4}{5}\right| = \left|\frac{8n - 15}{5(5n^2 - 2n)}\right| < \frac{8n}{5 \cdot 4n^2} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n}.$$

  Sea $\varepsilon > 0$. Si ahora escogemos $n_1 \in \mathbb{N}$ de manera que $\frac{1}{n_1} < \frac{5}{2}\varepsilon$ y definimos $n_0 = \max\{n_1, 2\}$, se tendrá para $n \geqslant n_0$

$$\left|\frac{4n^2 - 3}{5n^2 - 2n} - \frac{4}{5}\right| < \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{n_0} < \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon.$$

- Si $c > 0$, la sucesión $(c^{1/n})$ converge a 1.

  En efecto, el caso $c = 1$ es trivial, ya que entonces $(c^{1/n})$ es la sucesión constantemente 1.

  Si $c > 1$, entonces $c^{1/n} = 1 + d_n$, donde $d_n > 0$. Por la Desigualdad de Bernoulli,

  $$c = (1 + d_n)^n \geqslant 1 + nd_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Se tiene por tanto $c - 1 \geqslant nd_n$, de modo que $d_n \leqslant (c-1)/n$. Por consiguiente, se tiene

  $$|c^{1/n} - 1| = d_n \leqslant (c-1)\frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Dado $\varepsilon > 0$, escogiendo $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \frac{1}{c-1}\varepsilon$, obtenemos que, si $n \geqslant n_0$, es $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

  Supóngase ahora que $0 < c < 1$. Entonces $c^{1/n} = 1/(1 + h_n)$ con $h_n > 0$. Por tanto, por la Desigualdad de Bernoulli, se sigue que

  $$c = \frac{1}{(1 + h_n)^n} \leqslant \frac{1}{1 + nh_n} < \frac{1}{nh_n},$$

  de donde se sigue que $0 < h_n < 1/nc$ si $n \in \mathbb{N}$. Por tanto se tiene

  $$0 < 1 - c^{1/n} = 1 - \frac{1}{1 + h_n} = \frac{h_n}{1 + h_n} < h_n < \frac{1}{nc},$$

  de modo que

  $$|c^{1/n} - 1| < \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

  Sea $\varepsilon > 0$. Escogiendo ahora $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < c\varepsilon$, resulta inmediato que si $n \geqslant n_0$ es $|c^{1/n} - 1| < \varepsilon$.

- La sucesión $(n^{1/n})$ converge a 1.

  Puesto que $n^{1/n} > 1$ para $n \geqslant 2$, se puede escribir $n^{1/n} = 1 + k_n$, con $k_n > 0$ cuando $n \geqslant 2$. Por tanto, $n = (1 + k_n)^n$ para $n \geqslant 2$. Por la fórmula del Binomio de Newton, si $n \geqslant 2$ se tiene

  $$n = 1 + nk_n + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2 + \cdots \geqslant 1 + \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2,$$

  de donde

  $$n - 1 \geqslant \frac{1}{2}n(n-1)k_n^2.$$

Así, $k_n^2 \leqslant 2/n$ para $n \geqslant 2$. Ahora bien, si se da un $\varepsilon > 0$, por la Propiedad Arquimediana existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $2/n_1 < \varepsilon^2$. De donde, si $n_0 = \max\{2, n_1\}$, y $n \geqslant n_0$, entonces $2/n < \varepsilon^2$, y se sigue así que

$$|n^{1/n} - 1| = k_n \leqslant (2/n)^{1/2} < \varepsilon.$$

Ejemplos.

- La sucesión $s_n = (-1)^n$ no es convergente. En efecto, si tuviese límite l, no puede ser $l = 1$ puesto que entonces, eligiendo $\varepsilon = 2 > 0$, cualquiera que fuese n_0 bastaría tomar $n = 2n_0 + 1 \geqslant n_0$ para conseguir que $|s_n - l| = |-1 - 1| = 2$, que no es menor que ε; si $l \neq 1$, eligiendo ahora $\varepsilon = |1 - l| > 0$, cualquiera que fuese n_0 bastaría tomar $n = 2n_0 \geqslant n_0$ para lograr que $|s_n - l| = |1 - l|$, que de nuevo no es menor que $\varepsilon = |1 - l|$.

- La sucesión (n) no puede ser convergente. Si tuviese límite l, tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia, para algún n_0 habría de ser $n < l+1$ siempre que $n \geqslant n_0$, lo cual es imposible (consecuencia de nuevo de la Propiedad Arquimediana).

Caracterización del límite

Proposición 4.3. *Sea $l \in \mathbb{R}$. Dada una sucesión (s_n), son equivalentes:*

(I) *(s_n) es convergente con límite l.*

(II) *Se cumplen simultáneamente:*

  - *Si $a < l$, existe un $n_a \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_a$ es $a < s_n$, y*
  - *si $l < b$, existe un $n_b \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_b$ es $s_n < b$.*

(III) *Si a, b son números reales tales que $l \in (a, b)$, existe un número natural $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \geqslant n_0$ es $s_n \in (a, b)$.*

Demostración.

(I) $\Rightarrow$ (II). Dado $a < l$, tomando $\varepsilon = l - a > 0$ existirá por hipótesis un n_a tal que si $n \geqslant n_a$ entonces $s_n > l - \varepsilon = l - (l - a) = a$. Para $l < b$ se razona de forma similar.

(II) $\Rightarrow$ (III). Basta observar que $x \in (a, b)$ significa que $a < x < b$. Por consiguiente, si $l \in (a, b)$ existen n_a y n_b tales que para todo $n \geqslant n_a$ es $s_n > a$ y para todo $n \geqslant n_b$ es $s_n < b$. Tomando ahora $n_0 = \max\{n_a, n_b\}$, siempre que $n \geqslant n_0$ es simultáneamente $n \geqslant n_a$ y $n \geqslant n_b$, luego para todo $n \geqslant n_0$ será $a < s_n < b$ o, equivalentemente, $s_n \in (a, b)$.

(III) $\Rightarrow$ (I). Si $\varepsilon > 0$, se tendrá $l \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, por lo que debe existir un n_0 tal que para todo $n \geqslant n_0$ es $s_n \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, o lo que es lo mismo, $|s_n - l| < \varepsilon$. □

Corolario 4.4. *Sea s_n una sucesión convergente con límite l y sea $c \in \mathbb{R}$. Se tiene:*

(I) *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ es $c \leqslant s_n$, entonces $c \leqslant l$.*

(II) *Si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ es $s_n \leqslant c$, entonces $l \leqslant c$.*

Demostración. Se prueba por reducción al absurdo aplicando la proposición anterior. □

Ejemplo. Hay que observar, y es un hecho con el que hay que tener especial cuidado, que el corolario anterior no es cierto si se utilizan desigualdades estrictas. En efecto, sea $s_n = \frac{1}{n}$. Entonces $s_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero $\lim_n s_n = 0$ (que evidentemente no es mayor que 0).

Unicidad del límite

El siguiente resultado nos dice que el límite de una sucesión puede quizá no existir. Pero si existe, solo puede haber un límite.

Corolario 4.5. *Sea (s_n) una sucesión convergente y sean l y l' dos límites de la sucesión (s_n). Entonces $l = l'$.*

Demostración. Si no, sea, por ejemplo, $l < l'$. Tomando c tal que $l < c < l'$, puesto que $c < l'$ y l' es límite de (s_n), debe existir un $n_{l'} \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_{l'}$ es $s_n > c$. Igualmente, puesto que $l < c$ y l es límite de (s_n), debe existir un $n_l \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_l$ es $s_n < c$. Tomando $n = \max\{n_l, n_{l'}\}$ llegamos a una contradicción: se tendría que cumplir que $c < s_n < c$. □

1.3. Sucesiones acotadas

¿Qué es una sucesión acotada?

Las definiciones de acotación de sucesiones se obtienen particularizando a sucesiones las que dimos sobre acotación de funciones.

Definición 4.6.

(I) Una sucesión (s_n) se dice que está *acotada superiormente* si existe algún número $M \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, es $s_n \leqslant M$.

(II) Se dice que está *acotada inferiormente* si existe algún número $m \in \mathbb{R}$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, es $m \leqslant s_n$.

(III) Se dice que está *acotada* si lo está tanto superior como inferiormente. (Esto equivale a que exista un número $K > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $|s_n| \leqslant K$.)

Sucesiones convergentes y sucesiones acotadas

Proposición 4.7. *Toda sucesión convergente está acotada.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión convergente a un número $l \in \mathbb{R}$. Tomamos, por ejemplo, $\varepsilon = 1$ en la definición de límite, y existirá algún número $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n - l| < 1$ para todo $n \geqslant n_0$. Si escribimos

$$C = \text{máx}\{\, 1, |s_1 - l|, |s_2 - l|, \dots, |s_{n_0-1} - l| \,\},$$

se tiene que $|s_n - l| \leqslant C$, es decir,

$$l - C \leqslant s_n \leqslant l + C,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego la sucesión está acotada. □

Ejemplos. Lo anterior se podría utilizar para probar que una sucesión no es convergente.

- La sucesión de término n-ésimo $s_n = n$ no es convergente.
- Dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > 1$, la sucesión que tiene por término n-ésimo x^n tampoco es convergente. En efecto: si ponemos $h = |x| - 1$, entonces

  $$|x^n| = |x|^n = (1 + h)^n \geqslant 1 + nh,$$

  según la Desigualdad de Bernouilli. De aquí se deduce que la sucesión no está acotada.

1.4. Sucesiones monótonas

¿Qué es una sucesión monótona?

Las definiciones sobre monotonía de sucesiones se obtienen particularizando a sucesiones las que ya dimos sobre monotonía de funciones. Esto equivale a lo siguiente:

Definición 4.8.

(I) Una sucesión (s_n) es *creciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n \leqslant s_{n+1}$.

(II) Una sucesión (s_n) es *decreciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n \geqslant s_{n+1}$.

(III) Una sucesión (s_n) es *monótona* si es creciente o decreciente.

(IV) Una sucesión (s_n) es *estrictamente creciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n < s_{n+1}$.

(V) Una sucesión (s_n) es *estrictamente decreciente* si para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica $s_n > s_{n+1}$.

(VI) Una sucesión (s_n) es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Sucesiones monótonas y convergencia

Hemos visto que una sucesión convergente siempre es acotada. El recíproco no es cierto, como se revela si consideramos la sucesión $s_n = (-1)^n$, que es acotada sin ser convergente. La situación, sin embargo, es bien distinta si nos restringimos a las sucesiones monótonas. El resultado más importante que relaciona la monotonía de una sucesión con la convergencia es el siguiente, que establece que para una sucesión monótona la acotación y la convergencia son conceptos equivalentes:

Teorema 4.9 (de la Convergencia Monótona, de Weierstrass)**.**

(I) *Sea (s_n) una sucesión creciente. Entonces (s_n) es convergente si, y solo si, está acotada superiormente, en cuyo caso*

$$\lim_n s_n = \sup\{\, s_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

(II) *Sea (s_n) una sucesión decreciente. Entonces (s_n) es convergente si, y solo si, está acotada inferiormente, en cuyo caso*

$$\lim_n s_n = \inf\{\, s_n \mid n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Demostración. Sea (s_n) una sucesión creciente. Según la proposición 4.7, si la sucesión converge entonces está acotada (superiormente). Esto demuestra una implicación del apartado (I). Supongamos ahora que la sucesión está acotada superiormente, sea α el supremo de sus valores, y veamos que la sucesión converge al punto α. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $s_{n_0} > \alpha - \varepsilon$. (Véase 1.40, la Caracterización "ε" del supremo) En consecuencia, si $n \geqslant n_0$, como (s_n) es creciente, obtendremos que

$$\alpha - \varepsilon < s_{n_0} \leqslant s_{n_0+1} \leqslant s_{n_0+2} \leqslant \cdots \leqslant s_n,$$

y, por la definición de supremo,

$$s_n \leqslant \alpha < \alpha + \varepsilon.$$

Por lo tanto, $\alpha - \varepsilon < s_n < \alpha + \varepsilon$, o lo que es lo mismo, $|s_n - \alpha| < \varepsilon$. Esto demuestra que la sucesión converge al punto α.

La demostración del otro apartado es análoga. □

Ejemplos.

- La sucesión (x^n) es decreciente y acotada si $x \in [0,1]$. Veremos más adelante que su límite es 0 si $x \in [0,1)$ y 1 si $x = 1$. Cuando $x \in (1,\infty)$, la sucesión (x^n) es estrictamente creciente y no acotada.

- La sucesión $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ es estrictamente creciente y no acotada.

  Que es estrictamente creciente es inmediato:

  $$h_{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1} > h_n.$$

  Veamos que no está acotada, considerando los términos de la forma h_{2^m}:

  $$\begin{aligned} h_{2^m} &= 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\Big) \\ &\quad + \Big(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}\Big) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big) + \Big(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\Big) \\ &\quad + \Big(\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}\Big) + \cdots + \Big(\frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{2^m}\Big) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} + \cdots + \frac{2^{m-1}}{2^m} = 1 + \frac{m}{2}. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, $h_{2^m} \geqslant 1 + \frac{m}{2}$ y la sucesión (h_n) no está acotada. Podemos deducir por tanto que esta sucesión no converge.

- La sucesión dada por $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$ es estrictamente creciente (puesto que $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$) y acotada superiormente. (Obsérvese que $s_n < \frac{1}{n} + \overset{(n)}{\cdots} + \frac{1}{n} = 1$.) Por tanto, converge.

  De su límite, por el momento, solo podemos asegurar que está entre $s_1 = \frac{1}{2}$ y 1 (o entre $s_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ y 1, o entre $s_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ y 1, etcétera). Más adelante podremos probar que su valor exacto es $\log 2$.

El número e

Los siguientes ejemplos resultan de particular importancia, pues nos dan acceso a una de las constantes más utilizadas en matemáticas.

- La sucesión dada por
$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$
es estrictamente creciente.

  Esto puede probarse mediante la Desigualdad de Bernouilli, observando que
$$\begin{aligned}\frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{(\frac{n+2}{n+1})^{n+1}}{(\frac{n+1}{n})^{n+1}\frac{n}{n+1}} \\ &= \frac{[n(n+2)]^{n+1}}{[(n+1)^2]^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \\ &> \frac{n+1}{n}\left(1 + (n+1)\frac{-1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1.\end{aligned}$$

- De forma similar, la sucesión
$$f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
es estrictamente decreciente.

  En efecto,
$$\begin{aligned}\frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{(\frac{n+1}{n})^{n+2}\frac{n}{n+1}}{(\frac{n+2}{n+1})^{n+2}} \\ &= \frac{[(n+1)^2]^{n+2}}{[n(n+2)]^{n+2}} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \\ &> \frac{n}{n+1}\left(1 + (n+2)\frac{1}{n(n+2)}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1.\end{aligned}$$

- Obsérvese que, para todo $n \in \mathbb{N}$, es
$$2 = e_1 \leqslant e_n < f_n \leqslant f_1 = 4,$$
lo que indica que las dos sucesiones son ambas acotadas y, por el Teorema de la Convergencia Monótona 4.9, ambas son también convergentes.

El límite de la primera es el número e, base de los logaritmos neperiamos y de la función exponencial ya presentada anteriormente.

Definición 4.10. Llamamos *constante de Euler* o *número* e al límite

$$e = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Por otro lado, resulta que la sucesión (f_n) también converge a e. En efecto, sea $f = \lim_n f_n$ y veamos que $f = e$. Se ve inmediatamente que, dados dos naturales n y m, es siempre $e_n \leqslant f_m$. (En efecto, si $n \leqslant m$, entonces $e_n \leqslant e_m \leqslant f_m$; si $n \geqslant m$, entonces $e_n \leqslant f_n \leqslant f_m$.) De aquí resulta que, fijando $n \in \mathbb{N}$, es $f = \lim_m f_m \geqslant e_n$. Como esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N}$, concluimos que $e = \lim_n e_n \leqslant f$.

Supongamos ahora que $e < f$. Como

$$e = \sup\{\, e_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \qquad \text{y} \qquad f = \inf\{\, f_n \mid n \in \mathbb{N} \,\},$$

se tiene que $0 < f - e \leqslant f_n - e_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pero la Propiedad Arquimediana nos asegura la existencia de un número natural n tal que $\frac{1}{n} < \frac{f-e}{e}$, y para este n será

$$\begin{aligned} f_n - e_n &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^{n+1} - \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \\ &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \Big(1 + \frac{1}{n} - 1\Big) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \frac{1}{n} \leqslant \frac{e}{n} < e\frac{f-e}{e} = f - e, \end{aligned}$$

lo cual es sin duda una contradicción. Así, f debe ser forzosamente igual a e.

Otro ejemplo es la sucesión

$$y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Es obvio que esta sucesión es estrictamente creciente. Veamos que está acotada superiormente. Como $n! \geqslant 2^{n-1}$ para todo n (esto se puede ver por inducción), resulta que

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\ &\leqslant 1 + \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{1 - 1/2^n}{1 - 1/2} < 1 + \frac{1}{1 - 1/2} = 3. \end{aligned}$$

En consecuencia, la sucesión (y_n) también converge. Veremos más adelante que esta sucesión también converge al número e.

La constante de Euler-Mascheroni

Según hemos visto al estudiar el número e, la sucesión $e_n = (1 + 1/n)^n$ es estrictamente creciente y la sucesión $f_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ es estrictamente decreciente. Además, ambas convergen a e. Esto nos permite establecer las siguientes desigualdades:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Tomando logaritmos en todos los miembros, y teniendo en cuenta que el logaritmo es una función estrictamente creciente, tenemos

$$n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\log\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

que, escrito de otra forma, nos da

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Consideremos ahora la sucesión

$$\gamma_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n.$$

Como

$$\begin{aligned}
\gamma_n - \gamma_{n+1} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) \\
&\quad - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \log(n+1)\right) \\
&= \log(n+1) - \log n - \frac{1}{n+1} = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0,
\end{aligned}$$

resulta que (γ_n) es estrictamente decreciente.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n \\
&> \log\left(1+\frac{1}{1}\right) + \log\left(1+\frac{1}{2}\right) + \log\left(1+\frac{1}{3}\right) + \log\left(1+\frac{1}{4}\right) \\
&\quad + \cdots + \log\left(1+\frac{1}{n}\right) - \log n \\
&= \log 2 + \log\frac{3}{2} + \log\frac{4}{3} + \log\frac{5}{4} + \cdots + \log\frac{n+1}{n} - \log n \\
&= \log 2 + \log 3 - \log 2 + \log 4 - \log 3 + \log 5 - \log 4 \\
&\quad + \cdots + \log(n+1) - \log n - \log n \\
&= \log(n+1) - \log n = \log\left(1+\frac{1}{n}\right) > 0,
\end{aligned}$$

y así (γ_n) está acotada inferiormente.

El Teorema de la Convergencia Monótona 4.9 nos permite concluir que la sucesión (γ_n) es convergente. El límite de esta sucesión se denomina *Constante de Euler* o *de Euler-Mascheroni* y se denota por γ. Su valor es aproximadamente $0{,}5772156619$.

Este número apareció por primera vez en un escrito de Leonhard Euler en 1734, en el cual le daba el nombre de C, y calculaba sus seis primeros dígitos. En 1781 pudo calcular diez decimales más. En 1790, Lorenzo Mascheroni dio el valor de diecinueve de sus decimales. En la actualidad, se denota γ debido a su vinculación con la función Γ (también introducida por Euler), y se han calculado (por supuesto con ayuda de ordenadores) un total de 119 millones de sus decimales.

La constante γ está ligada a una de las preguntas abiertas durante un mayor lapso de tiempo, ya que hasta ahora no se ha podido averiguar siquiera si γ es un número racional o irracional. (Se ha probado recientemente que, si γ es racional, su denominador tiene que ser mayor que 10^{242080}.) Esta cuestión es importante, porque este número aparece relacionado con muchos conceptos de Teoría de Números, entre ellos, con la famosa *Función Zeta de Riemann* (la que aparece en la aún sin resolver *Hipótesis de Riemann*, y que está muy relacionada a su vez con la distribución de los números primos).

2. Técnicas de cálculo de límites

2.1. Operaciones con sucesiones

Límites de la suma y el producto

Proposición 4.11. *Sean* (s_n)*,* (t_n) *dos sucesiones convergentes con límites*

$$l = \lim_n s_n, \qquad l' = \lim_n t_n,$$

y sea $c \in \mathbb{R}$*. Entonces*

(I) $(s_n + t_n)$ *es convergente y tiene límite* $l + l'$*;*

(II) $(c \cdot s_n)$ *es convergente y tiene límite* $c \cdot l$*;*

(III) $(s_n \cdot t_n)$ *es convergente y tiene límite* $l \cdot l'$*.*

Demostración.

(I) Sea $\varepsilon > 0$. Usando la definición de convergencia de (s_n), obtenemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ entonces $|s_n - l| < \varepsilon/2$. De igual manera existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$ entonces $|t_n - l'| < \varepsilon/2$. Escribimos $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Se tiene entonces que si $n \geqslant n_0$ se verifican las dos desigualdades a la vez y, así, $|(s_n + t_n) - (l + l')| \leqslant |s_n - l| + |t_n - l'| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

(II) Usamos la definición de convergencia de (s_n) y, así, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$, entonces $|s_n - l| < \varepsilon/(|c| + 1)$. (El 1 del denominador se introduce solamente para evitar que dicho denominador pueda ser 0.) Por tanto,

$$|cs_n - cl| = |c||s_n - l| < |c| \cdot \frac{\varepsilon}{|c| + 1} < \varepsilon.$$

(III) Como (s_n) es convergente, está acotada por la Proposición 4.7 y por tanto existe $K > 0$ tal que $|s_n| \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\varepsilon > 0$. Como (s_n) es convergente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ entonces $|s_n - l| < \frac{\varepsilon}{2|l'|+1}$. Por otra parte, como (t_n) converge, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$ entonces $|t_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2K}$.

Finalmente, si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geqslant n_0$, se tiene

$$\begin{aligned} |s_n t_n - ll'| &= |s_n t_n - s_n l' + s_n l' - ll'| \\ &\leqslant |s_n||t_n - l'| + |l'||s_n - l| \\ &\leqslant K\frac{\varepsilon}{2K} + |l'|\frac{\varepsilon}{2|l'| + 1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Ejemplos.

- La sucesión $\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$ converge a 0. En general, aplicando reiteradamente el mismo argumento, $\frac{1}{n^p}$ converge a 0, cualquiera que sea $p \in \mathbb{N}$.

- La sucesión $(\frac{2n+1}{n})$ converge a 2.

  Si escribimos
  $$\frac{2n + 1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$
  entonces vemos que
  $$\lim_n \frac{2n + 1}{n} = \lim_n 2 + \lim_n \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2.$$

- Ya vimos que las sucesiones
  $$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{y} \qquad f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$
  convergen al mismo límite (el número e) siguiendo un método ciertamente complicado. Probemos ahora este mismo hecho de otra forma más sencilla. En efecto,
  $$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f_n &= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= e\left(1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) = e(1 + 0) = e. \end{aligned}$$

Sucesión convergentes a cero por acotadas

A veces se puede obtener el límite del producto de dos sucesiones aunque uno de los factores no converja.

Proposición 4.12. *Si (s_n) es una sucesión acotada y (t_n) una sucesión convergente a 0, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ converge a 0.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Sea $K > 0$ tal que $|s_n| \leqslant K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Usando la definición de convergencia de (t_n) para ε/K, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|t_n| < \varepsilon/K$. Por tanto, $|s_n \cdot t_n| \leqslant K\varepsilon/K = \varepsilon$. □

Ejemplos.

- La sucesión de término n-ésimo $\frac{(-1)^n}{n}$ converge a 0. (Tómese $s_n = (-1)^n$, $t_n = \frac{1}{n}$ en la proposición anterior.)

- La sucesión $\frac{\operatorname{sen} n}{n}$ converge a 0.

Límite del cociente

Proposición 4.13. *Sea (s_n) una sucesión convergente con límite l y (t_n) una sucesión convergente con límite $l' \neq 0$. Si (u_n) es una sucesión tal que*

$$u_n = \frac{s_n}{t_n} \qquad \textit{siempre que} \qquad t_n \neq 0,$$

entonces (u_n) es convergente con límite l/l'.

Demostración. En primer lugar, probamos que $t_n \neq 0$ a partir de un determinado término (y, por tanto, a partir de ese término, será $u_n = s_n/t_n$). En efecto, cogiendo $\varepsilon = |l'|/2$ en la definición de sucesión convergente, vemos que existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ entonces $|t_n - l'| < |l'|/2$. Por tanto, utilizando la Desigualdad Triangular Inversa, será

$$\big||t_n| - |l'|\big| \leqslant |t_n - l'| < \frac{|l'|}{2}.$$

De aquí deducimos que, si $n \geqslant n_1$, se tiene $|t_n| - |l'| > -|l'|/2$, o sea, $|t_n| > |l'|/2$. Como consecuencia, se tiene $t_n \neq 0$ si $n \geqslant n_1$.

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Si $n \geqslant n_1$ tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\left|u_n - \frac{l}{l'}\right| &= \left|\frac{s_n}{t_n} - \frac{l}{l'}\right| = \left|\frac{s_n l' - t_n l}{l' t_n}\right| \\
&= \frac{|s_n l' + s_n t_n - s_n t_n - t_n l|}{|l'||t_n|} \\
&\leqslant \frac{|s_n||t_n - l'| + |t_n||s_n - l|}{|l'||t_n|} \\
&\leqslant \frac{2}{|l'|^2}(|s_n||t_n - l'| + |t_n||s_n - l|).
\end{aligned}$$

Por otra parte, como (s_n) y (t_n) son convergentes, también son acotadas, y existen constantes $K_1, K_2 > 0$ tales que $|s_n| < K_1$ y $|t_n| < K_2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otra parte, aplicamos la definición de límite de (s_n), y así, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$ entonces $|s_n - l| < \frac{\varepsilon |l'|^2}{4K_2}$. Análogamente para (t_n), existe $n_3 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_3$ entonces $|t_n - l'| < \frac{\varepsilon |l'|^2}{4K_1}$. Finalmente, definiendo $n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$, entonces si $n \geqslant n_0$ todas las acotaciones se verifican y

$$\begin{aligned}
\left|u_n - \frac{l}{l'}\right| &\leqslant \frac{2}{|l'|^2}(|s_n||t_n - l'| + |t_n||s_n - l|) \\
&< \frac{2}{|l'|^2}\left(K_1 \frac{\varepsilon |l'|^2}{4K_1} + K_2 \frac{\varepsilon |l'|^2}{4K_2}\right) = \varepsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Corolario 4.14. *Sea (s_n) una sucesión convergente con límite l y (t_n) una sucesión convergente sin términos nulos y con límite $l' \neq 0$. Entonces la sucesión s_n/t_n es convergente y*

$$\lim_n \frac{s_n}{t_n} = \frac{l}{l'}.$$

Ejemplos.

- La sucesión $(\frac{4n^2-3}{5n^2-2n})$ converge a $4/5$.

  En efecto, dividiendo numerador y denominador por n^2,

  $$\frac{4n^2 - 3}{5n^2 - 2n} = \frac{\frac{4n^2}{n^2} - \frac{3}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} - \frac{2n}{n^2}} = \frac{4 - \frac{3}{n^2}}{5 - \frac{2}{n}}.$$

  Por tanto,

  $$\begin{aligned}
  \lim_n \frac{4n^2 - 3}{5n^2 - 2n} &= \lim_n \frac{4 - \frac{3}{n^2}}{5 - \frac{2}{n}} = \frac{\lim_n (4 - \frac{3}{n^2})}{\lim_n (5 - \frac{2}{n})} \\
  &= \frac{4 - \lim_n \frac{3}{n^2}}{5 - \lim_n \frac{2}{n}} = \frac{4 - 0}{5 - 0} = \frac{4}{5}.
  \end{aligned}$$

- La sucesión de término n-ésimo
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$
converge a $1/2$. Basta observar que
$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{n}\Big).$$

- La sucesión de término n-ésimo
$$\frac{1}{n}\Big[\Big(a+\frac{1}{n}\Big)^2 + \Big(a+\frac{2}{n}\Big)^2 + \cdots + \Big(a+\frac{n-1}{n}\Big)^2\Big]$$
converge al número $a^2+a+\frac{1}{3}$. *(¿Por qué?)*

- Si (s_n) es una sucesión cuyos términos son todos no negativos, convergente y con límite l, entonces la sucesión $(\sqrt{s_n})$ converge a $\sqrt{l}$. En el caso $l=0$, esto se deduce inmediatamente de la definición de límite; en el caso $l \neq 0$, se deduce de
$$\sqrt{s_n}-\sqrt{l} = \frac{s_n - l}{\sqrt{s_n}+\sqrt{l}}$$
y de que $(s_n - l)$ converge a 0, mientras que $1/(\sqrt{s_n}+\sqrt{l})$ está acotada:
$$0 < \frac{1}{\sqrt{s_n}+\sqrt{l}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{l}}.$$

- La sucesión de término n-ésimo
$$\frac{\sqrt{1+n}-1}{n}$$
converge a 0. (*¿Por qué?*)

- La sucesión de término n-ésimo
$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$
converge. (*¿A qué límite? ¿Por qué?*)

- La sucesión de término n-ésimo
$$\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-n}$$
converge. (*¿A qué límite? ¿Por qué?*)

- La sucesión (s_n) con

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$$

converge a 1. En efecto, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, de donde $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$, que converge a 1.

2.2. Desigualdades y límites

Relación entre límites y desigualdades

Acabamos de ver que el límite de sucesiones se comporta bien con respecto a la suma y el producto. Veremos a continuación que también tiene buen comportamiento con respecto al orden; es decir, sucesiones más pequeñas dan límites más pequeños, y sucesiones más grandes dan límites más grandes.

Proposición 4.15. *Si (s_n) y (t_n) son dos sucesiones convergentes y existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$s_n \leqslant t_n, \qquad \text{para todo} \quad n \geqslant n_0,$$

entonces

$$\lim_n s_n \leqslant \lim_n t_n.$$

Demostración. La sucesión $(t_n - s_n)$ cumple la desigualdad $t_n - s_n \geqslant 0$ para todo $n \geqslant n_0$ y converge a $\lim_n t_n - \lim_n s_n$. Por el Corolario 4.4, $\lim_n t_n - \lim_n s_n \geqslant 0$, es decir, $\lim_n s_n \leqslant \lim_n t_n$. □

El Teorema del Bocadillo

Con ayuda de la Proposición 4.15 podemos calcular algunos límites de forma indirecta. Supongamos que tenemos tres sucesiones (s_n), (t_n) y (u_n), de forma que

$$s_n \leqslant t_n \leqslant u_n.$$

Supongamos además que las dos sucesiones exteriores, es decir, (s_n) y (u_n), convergen al mismo límite l. Entonces, si la sucesión interior (t_n) converge, lo tiene que hacer también a l.

El siguiente resultado mejora esto, pues pone de evidencia que no hace falta suponer la convergencia de (t_n): si (s_n) y (u_n) convergen a l, la convergencia de (t_n) viene sola.

Teorema 4.16 (del Bocadillo, o de Compresión)**.** *Sean (s_n), (t_n) y (u_n) sucesiones tales que existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$s_n \leqslant t_n \leqslant u_n$$

para todo $n \geqslant n_0$. Si (s_n) y (u_n) son sucesiones convergentes y con el mismo límite l, es decir,

$$\lim_n s_n = \lim_n u_n = l,$$

entonces (t_n) es también convergente y tiene el mismo límite l, es decir, $\lim_n t_n = l$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de límite existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ entonces $|s_n - l| < \varepsilon$, es decir, $l - \varepsilon < s_n < l + \varepsilon$. Análogamente, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$, entonces $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. Entonces si $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $n \geqslant n_0$, se tiene $l - \varepsilon < s_n \leqslant t_n \leqslant u_n < l + \varepsilon$, es decir, $|t_n - l| < \varepsilon$. □

Ejemplos.

- La sucesión $(\frac{\operatorname{sen} n}{n})$ converge a 0.

  Sabemos que $-1 \leqslant \operatorname{sen} n \leqslant 1$. Por tanto

  $$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\operatorname{sen} n}{n} \leqslant \frac{1}{n}.$$

  Como $\lim_n 1/n = \lim_n(-1/n) = 0$, el Teorema del Bocadillo 4.16 nos da el resultado esperado.

- Se verifica

  $$\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \longrightarrow 1,$$

  pues podemos encajar la sucesión entre

  $$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \qquad \text{y} \qquad \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}.$$

- Comprobando que la sucesión de término n-ésimo

  $$\frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n}$$

  está encajada entre

  $$\begin{aligned}\frac{n+1}{n^2+n} + \frac{n+2}{n^2+n} + \cdots + \frac{n+n}{n^2+n} &= \frac{n \cdot n + (1+2+\cdots+n)}{n^2+n} \\ &= \frac{n^2 + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3n^2+n}{n^2+n}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+1}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+1} &= \frac{n\cdot n+(1+2+\cdots+n)}{n^2+1}\\ &= \frac{n^2+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3n^2+n}{n^2+1},\end{aligned}$$

se deduce que la sucesión dada converge a $3/2$.

2.3. Subsucesiones

¿Qué es una subsucesión?

Eliminando términos de una sucesión podemos extraer de ella nuevas sucesiones, cuyos términos aparecen en la sucesión original en el mismo orden (tal vez no en el mismo lugar) que en la nueva: es decir, vamos tomando infinitos términos, saltándonos algunos quizá, pero sin volver atrás. Por ejemplo, dada una sucesión

$$(s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, \dots),$$

si nos quedamos con los términos que ocupan lugar impar (eliminando los que ocupan lugar par) obtenemos una nueva sucesión

$$(s_1, s_3, s_5, s_7, s_9, \dots),$$

cuyo término n-ésimo es s_{2n-1}; si nos quedamos con los términos que ocupan lugar par (eliminando los que ocupan lugar impar), obtenemos la nueva sucesión

$$(s_2, s_4, s_6, s_8, s_{10}, \dots),$$

cuyo término n-ésimo es s_{2n}. Podemos imaginar fácilmente otras muchas manera de extraer sucesiones de la sucesión inicial con este procedimiento. Se obtienen así lo que se llaman subsucesiones de la sucesión dada; como iremos viendo a lo largo del curso, el manejo de subsucesiones facilita habitualmente el estudio de la sucesión original, y permite demostrar varias propiedades esenciales de la teoría de funciones reales de variable real. Pasemos a formalizar este concepto.

Definición formal

Definición 4.17. Dada una sucesión (s_n), se dice que otra sucesión (t_n) es una *subsucesión* de (s_n) si existe una sucesión estrictamente creciente de números naturales (i_n) tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $t_n = s_{i_n}$.

Ejemplos.

- Sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Tomando $i_n = n + n_0 - 1$ en la definición anterior, se obtiene la subsucesión

$$(s_{n_0}, s_{n_0+1}, s_{n_0+2}, s_{n_0+3}, s_{n_0+4}, \dots),$$

que resulta de la original suprimiendo los $n_0 - 1$ primeros términos. Este tipo de subsucesión se denomina *cola n_0-ésima* de la sucesión (s_n).

- La sucesión dada por $t_n = 4n^2$ es una subsucesión de la sucesión dada por $s_n = (-1)^n n^2$, como se ve tomando $i_n = 2n$.

- La sucesión
$$(1, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{5}, \tfrac{1}{6}, \tfrac{1}{7}, \dots)$$
no es una subsucesión de $(\frac{1}{n})$. Tienen los mismos términos, pero no en el mismo orden.

- La sucesión
$$(1, 0, \tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{5}, 0, \tfrac{1}{7}, 0, \dots, \tfrac{1+(-1)^{n+1}}{2n}, \dots)$$
tampoco es una subsucesión de $(1/n)$.

- Toda sucesión es una subsucesión de sí misma (reflexividad). También hay transitividad: si (u_n) es una subsucesión de (t_n) y (t_n) es una subsucesión de (s_n), a su vez (u_n) es una subsucesión de (s_n). Sin embargo, esta relación no es de equivalencia (no verifica la propiedad simétrica), ni tampoco es un orden (no verifica la propiedad antisimétrica: por ejemplo, las sucesiones $s_n = (-1)^n$ y $t_n = (-1)^{n+1}$ son subsucesiones la una de la otra, aunque son distintas). .

Límites de las subsucesiones

La principal utilidad de las subsucesiones se manifiesta en el siguiente resultado:

Proposición 4.18. *Toda subsucesión de una sucesión convergente es también convergente y tiene el mismo límite.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión tal que $\lim_n s_n = l \in \mathbb{R}$ y sea (s_{i_n}) una de sus subsucesiones. Dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|s_n - l| < \varepsilon$. Si $n \geqslant n_0$, entonces $i_n \geqslant n \geqslant n_0$. (Que $i_n \geqslant n$, puede probarse por inducción.) De aquí que $|s_{i_n} - l| < \varepsilon$. Por tanto, $\lim_n s_{i_n} = l$. $\square$

Ejemplos.

- Ya vimos, con cierto esfuerzo, que $((-1)^n)$ no es una sucesión convergente. Con ayuda del resultado anterior, este hecho es inmediato: la subsucesión de sus términos de lugar par converge a 1, la subsucesión de sus términos de lugar impar converge a -1.

- Para $x \in [0, 1)$, la sucesión (x^n) converge a 0. En efecto, puesto que es convergente (según ya probamos), si $\lim_n x^n = l$, vemos que $\lim_n x^{n+1} = \lim_n (x^n \cdot x) = l \cdot x$. Pero (x^{n+1}) es una subsucesión de (x^n) (una cola), luego también $\lim_n x^{n+1} = l$, de donde $l \cdot x = l$. Como $x \neq 1$, se obtiene finalmente que $l = 0$. (¿Por qué no podemos utilizar estos cálculos si $x > 1$?)

- La *enumeración diagonal* de todos los números racionales forma una sucesión que no es convergente: tiene subsucesiones convergentes a cualquier número real (ver [3, págs. 49–50]).

Convergencia de términos pares e impares

Proposición 4.19. *Una sucesión (s_n) es convergente si, y solo si, la subsucesión de términos de lugar par (s_{2n}) y la subsucesión de términos de lugar impar (s_{2n-1}) son ambas convergentes y tienen el mismo límite.*

Demostración. Por la proposición 4.18 basta con demostrar que si $s_{2n} \to l \in \mathbb{R}$ y $s_{2n-1} \to l$ entonces $s_n \to l$. Sea $\varepsilon > 0$. Por la definición de límite existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tales que:

(I) si $n \geqslant n_1$ es $|s_{2n} - l| < \varepsilon$;

(II) si $n \geqslant n_2$ es $|s_{2n-1} - l| < \varepsilon$.

Ahora si $n_0 = \max\{2n_1, 2n_2 - 1\}$ y $n \geqslant n_0$ se tiene, tanto si n es par como impar, que $|s_n - l| < \varepsilon$. □

Se debe observar que este último resultado se puede aplicar de forma más general. Por ejemplo, si una sucesión (s_n) cumple que las tres subsucesiones (s_{3n}), (s_{3n-1}) y (s_{3n-2}) convergen al mismo límite l, una demostración muy similar a la empleada hace un momento nos dice que la sucesión (s_n) converge también a l.

En general, si una sucesión se puede *descomponer* en *unión* de una cantidad finita de subsucesiones que convergen todas al mismo límite l, entonces la sucesión original también debe converger a l.

El Teorema de Bolzano-Weierstrass

El siguiente teorema tiene muchísimas aplicaciones, según iremos viendo a lo largo del curso. En muchas demostraciones, cuando tengamos una sucesión acotada, este teorema nos permitirá *suponer* que la sucesión es, de hecho, convergente.

Teorema 4.20 (de Bolzano-Weierstrass, para sucesiones)**.** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Para probarlo, realizaremos dos demostraciones diferentes. En la primera de ellas nos apoyaremos en el Teorema de los Intervalos Encajados de Cantor.

Demostración 1. Sea (s_n) una sucesión acotada y $K > 0$ de forma que $-K \leqslant s_n \leqslant K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos construyendo la subsucesión de la siguiente forma: bien en $[0, K]$, bien en $[-K, 0]$, habrá infinitos términos de la sucesión (quizá incluso en los dos). Supongamos que I_1 es uno de estos intervalo en el cual hay infinitos términos y elijamos cualquier elemento $s_{i_1} \in I_1$. De nuevo repetimos la idea: partimos I_1 por la mitad y o bien en una mitad, o en la otra, habrá infinitos términos de la sucesión. Nos quedamos una de las mitades que contenga infinitos s_n y la llamamos I_2. Elegimos un elemento $s_{i_2} \in I_2$ que además cumpla $i_2 > i_1$. Observemos que $I_2 \subset I_1$. El siguiente paso es de nuevo subdividir I_2 en dos mitades, elegir una mitad I_3 que contenga infinitos términos de la sucesión y seleccionar un nuevo $s_{i_3} \in I_3$ con $i_3 > i_2$. Construimos de esa forma una sucesión de intervalos cerrados y acotados encajados $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots$ y una subsucesión (s_{i_n}) de (s_n) con $s_{i_n} \in I_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. El Teorema de los Intervalos Encajados asegura la existencia de un punto $l \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Por comodidad escribimos $I_n = [a_n, b_n]$ con lo que $a_n \leqslant s_{i_n} \leqslant b_n$, $a_n \leqslant l \leqslant b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, además, como la longitud de cada I_n es $K/2^{n-1}$, se tiene

$$0 \leqslant |s_{i_n} - l| \leqslant b_n - a_n = \frac{K}{2^{n-1}} \to 0,$$

de donde, por el Teorema del Bocadillo 4.16, $|s_{i_n} - l| \to 0$, o, lo que es lo mismo, $s_{i_n} \to l$. □

El Lema de la Subsucesión Monótona

Para la segunda demostración, utilizaremos un lema que tiene bastante interés en sí mismo.

Lema 4.21 (de la Subsucesión Monótona)**.** *Toda sucesión posee una subsucesión monótona.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión. Diremos que un índice $m \in \mathbb{N}$ es de contención para esta sucesión, si $s_m \leqslant s_n$ para todo natural $n \geqslant m$. Obsérvese que, fijado m, si este es de contención, ello significa que el número s_m es una cota inferior para todos los términos de la sucesión cuyos índices son superiores a m. Esto se visualiza notando que s_m se encuentra a la izquierda de todos aquellos elementos de la sucesión cuyos índices son mayores que m.

(Así, por ejemplo, si 7 fuese de contención para la sucesión, podemos asegurar que s_8, s_9, $\ldots$, están a la derecha de s_7. Por otra parte, nada podemos asegurar sobre la ubicación relativa de los primeros seis términos de la sucesión.)

Obsérvese también que un índice m fracasa en ser de contención, cuando para algún índice $n > m$ es $s_m > s_n$.

Ahora bien, en cuanto a la cantidad de índices de contención, pueden ocurrir dos cosas: O bien hay infinitos índices de contención, o bien solamente hay una cantidad finita de ellos.

Supongamos que hay infinitos índices de contención. En este caso podemos encontrar unos índices de contención

$$i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < \cdots .$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, Como i_n es de contención, y como $i_{n+1} > i_n$, la definición nos asegura que $s_{i_n} \leqslant s_{i_{n+1}}$. Esto prueba que la subsucesión (s_{i_n}) es creciente.

Ahora examinamos el caso en que solamente hay una cantidad finita de índices de contención. Ya que hay finitos, si avanzamos lo suficiente habremos abandonado estos índices de contención, y se tendrá la seguridad entonces de que a la derecha ya no hay más de tales índices. Para precisar, supongamos que hay un índice n_0 tal que si $n \geqslant n_0$, entonces n no es de contención. Tomemos $i_1 = n_0$. Como i_1 no es de contención, ello significa que hay algún índice i_2, con $i_2 > i_1$, tal que $s_{i_1} > s_{i_2}$. Pero, análogamente, como i_2 no es de contención, esto nos indica que tiene que existir un índice mayor, digamos $i_3 > i_2$, tal que $s_{i_2} > s_{i_3}$. Y así sucesivamente. Obtenemos así una sucesión estrictamente creciente de índices

$$i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_n < \cdots ,$$

de modo tal que

$$s_{i_1} > s_{i_2} > s_{i_3} > \cdots > s_{i_n} > \cdots$$

Así que la subsucesión (s_{i_n}) es estrictamente decreciente. $\square$

Utilizando este lema, la (segunda) demostración del Teorema de Bolzano-Weierstrass es ahora inmediata.

Demostración 2. Sea (s_n) una sucesión acotada. Por el Lema de la Subsucesión Monótona 4.21, esta sucesión tiene una subsucesión monótona (s_{i_n}). Como (s_n) es acotada, también lo será (s_{i_n}), de donde, por el Teorema de la Convergencia Monótona 4.9, resulta que (s_{i_n}) es convergente. $\square$

2.4. Sucesiones de Cauchy

Sucesiones de Cauchy

Consideremos una sucesión (s_n). Si esta sucesión converge a un número l, este hecho asegura que, cuanto mayor sea n, más cerca va a estar s_n de l. Por tanto, si cogemos dos términos de la sucesión, s_n y s_m, cuanto mayores sean n y m, más cerca van a estar s_n y s_n, ambos, de l y, *por tanto*, más cercan van a estar s_n y s_m *entre sí*. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 4.22. Una sucesión (s_n) se dice que es *de Cauchy* si para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ (que puede depender de ε) de modo que si $m, n \in \mathbb{N}$ son tales que $m, n \geqslant n_0$, entonces $|s_m - s_n| < \varepsilon$.

Sucesiones convergentes y de Cauchy

A continuación vemos que el concepto de sucesión de Cauchy coincide en realidad con el de sucesión convergente. Para ello, probaremos un resultado previo.

Lema 4.23. *Toda sucesión de Cauchy está acotada.*

Demostración. La definición, usada para $\varepsilon = 1$, asegura la existencia de $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que, si $m, n \geqslant n_0$ entonces $|s_n - s_m| < 1$. En particular, si $n \geqslant n_0$ entonces $|s_n - s_{n_0}| < 1$, es decir, $s_{n_0} - 1 < s_n < s_{n_0} + 1$. Resulta así que la sucesión (s_n) está acotada inferiormente por

$$m = \text{mín}\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0 - 1}, s_{n_0} - 1\}$$

y superiormente por

$$M = \text{máx}\{s_1, s_2, \dots, s_{n_0 - 1}, s_{n_0} + 1\}. \qquad \square$$

Teorema 4.24 (Criterio de Cauchy)**.** *Una sucesión es convergente si, y solo si, es de Cauchy.*

Demostración. Sea $s_n \to l \in \mathbb{R}$. Sea $\varepsilon > 0$. Por definición de límite, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que , si $n \geqslant n_0$, entonces $|s_n - l| < \varepsilon/2$. Por tanto, si $m, n \geqslant n_0$, es

$$|s_m - s_n| = |s_n - l + l - s_m| \leqslant |s_m - l| + |s_n - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

así que (s_n) es de Cauchy.

Recíprocamente, sea (s_n) una sucesión de Cauchy. Puesto que, por el Lema 4.23, está acotada, el Teorema de Bolzano-Weierstrass 4.20 asegura la existencia de una subsucesión (s_{i_n}) convergente a un cierto $l \in \mathbb{R}$. Bastará ver que la sucesión de partida (s_n) también converge a l.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que si $m, n \geqslant n_0$, entonces $|s_n - s_m| < \varepsilon$. En particular, si $n \geqslant n_0$, como $i_n \geqslant n \geqslant n_0$, se tiene $|s_n - s_{i_n}| < \varepsilon$. Hemos probado de esta manera que $\text{lím}_n (s_n - s_{i_n}) = 0$, de modo que

$$\text{lím}_n s_n = \text{lím}_n s_{i_n} + \text{lím}_n (s_n - s_{i_n}) = l + 0 = l. \qquad \square$$

Así pues, las sucesiones de Cauchy y las convergentes son exactamente las mismas. Esto quiere decir que, para probar que una sucesión es convergente, podremos utilizar directamente la definición de sucesión convergente, o bien, podemos probar que la sucesión es de Cauchy.

¿Qué ventajas nos ofrece cada uno de los dos métodos? Si utilizamos la definición de sucesión convergente, y queremos probar que una sucesión tiende a un determinado límite, debemos conocer previamente cuál es el valor de este, puesto que este valor aparece en la definición. Si por el contrario utilizamos la definición de sucesión de Cauchy, *no necesitamos conocer* cuánto vale el límite, puesto que lo único que aparece en la definición es la distancia entre dos términos de la sucesión, que son conocidos ya previamente. No obstante, esto, que es sin duda una ventaja, es a la vez la debilidad de este método. Al probar que una sucesión es de Cauchy, sabremos que converge, pero no qué valor tiene el límite (en principio; a veces, este valor se podrá deducir de forma indirecta).

Ejemplos.

- La sucesión $s_n = n$ no converge. En efecto, veremos que esta sucesión no es de Cauchy. Sea $\varepsilon = 1$. Dado cualquier $n_0 \in \mathbb{N}$, escogiendo $n = n_0$ y $m = n_0 + 1$, se obtiene que $m, n \geqslant n_0$, pero $|s_m - s_n| = |n_0 + 1 - n_0| = 1 = \varepsilon$.

- La sucesión
$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$
no es convergente. De nuevo, basta ver que no es de Cauchy. Sea $\varepsilon = \frac{1}{2}$, y sea $n_0 \in \mathbb{N}$. Escojamos $n = n_0$ y $m = 2n_0$. Entonces $m, n \geqslant n_0$, pero
$$\begin{aligned} |h_m - h_n| &= \frac{1}{n_0+1} + \frac{1}{n_0+2} + \frac{1}{n_0+3} + \cdots + \frac{1}{2n_0} \\ &\geqslant \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} + \frac{1}{2n_0} + \cdots + \frac{1}{2n_0} = \frac{n_0}{2n_0} = \frac{1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

- La sucesión
$$y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$
converge. Esto ya lo vimos mediante el Teorema de la Convergencia Monótona 4.9, pero también se puede probar viendo que es una sucesión de

Cauchy. En efecto, sea $\varepsilon > 0$. Si $m < n$, entonces

$$\begin{aligned}
0 < y_n - y_m &= \frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \frac{1}{(m+3)!} + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \\
&= \frac{1}{(m+1)!}\Big(1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(n-1)} \\
&\quad + \frac{1}{(m+2)(m+3)\cdots(n-1)n}\Big) \\
&< \frac{1}{(m+1)!}\Big(1 + \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{(m+1)^{n-m-2}} + \frac{1}{(m+1)^{n-m-1}}\Big) \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1 - 1/(m+1)^{n-m}}{1 - 1/(m+1)} \\
&< \frac{1}{(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - 1/(m+1)} = \frac{1}{m!m}.
\end{aligned}$$

Por tanto, si escogemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \varepsilon$, resultará que, si $n \geqslant m \geqslant n_0$, entonces $|y_m - y_n| < \frac{1}{m!m} < \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Así que nuestra sucesión es de Cauchy, y por tanto convergente.

Obsérvese que en este caso hemos deducido que la sucesión converge, aunque no sabemos a quién. Vamos a ver a continuación que esta sucesión converge al número e.

Sea $y = \text{lím}_n\, y_n$, y sea $e_n = (1 + 1/n)^n$ que, como sabemos, converge a e. Veremos que $y = e$. Desarrollando mediante el Binomio de Newton,

$$\begin{aligned}
e_n &= \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n \\
&= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots \\
&\quad + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{n-2}{n}\Big)\Big(1 - \frac{n-1}{n}\Big) \\
&\leqslant 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n
\end{aligned}
$$

De aquí se infiere que $e \leqslant y$.

Para probar la desigualdad opuesta, fijemos $k \in \mathbb{N}$, y definamos una nueva sucesión (t_n) donde t_n es el desarrollo binomial de e_n "truncado" en el sumando correspondiente a $k!$, es decir,

$$
t_n = \begin{cases} e_n, & n \leqslant k, \\ 1 + 1 + \frac{1}{2!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{3!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big) + \cdots & \\ \qquad + \frac{1}{k!}\Big(1 - \frac{1}{n}\Big)\Big(1 - \frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big), & n \geqslant k. \end{cases}
$$

Evidentemente, $t_n \leqslant e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto quiere decir que el límite de la sucesión (t_n) es menor o igual que e. Pero es inmediato comprobar que el límite de la sucesión (t_n) es precisamente y_k, así que $y_k \leqslant e$. Como esto es cierto para todo $k \in \mathbb{N}$, resulta entonces que el límite de la sucesión $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ es menor o igual que e; es decir $y \leqslant e$.

e es irracional

Estamos ahora listos para probar una importante propiedad del número e.

Teorema 4.25. *e es irracional.*

Demostración. Definiendo la sucesión (y_n) como en el ejemplo anterior, si n y m son dos naturales, con $m < n$, hemos probado más arriba que entonces $0 < y_n - y_m < 1/(m!m)$. Fijando m y tomando límite en n, obtenemos que $0 < e - y_m \leqslant 1/(m!m)$ para todo $m \in \mathbb{N}$. (La primera de las dos desigualdades es estricta ya que $y_m < y_{m+1} \leqslant e$.)

Supongamos que e es racional, es decir, existen $p, q \in \mathbb{N}$ tales que $e = p/q$. Como $2 < e < 3$, resulta que $q \neq 1$. Además tenemos

$$0 < \frac{p}{q} - y_q \leqslant \frac{1}{q!q}.$$

Si multiplicamos ambos miembros de la desigualdad anterior por $q!$, obtenemos

$$0 < p(q-1)! - q!y_q \leqslant \frac{1}{q}.$$

Por la definición de y_q, resulta fácil comprobar que $q!y_q$ es un número natural, por lo que si definimos $r = p(q-1)! - q!y_q$, resulta que $r \in \mathbb{Z}$, pero $0 < r \leqslant 1/q < 1$, lo que claramente constituye una contradicción. $\square$

Sucesiones contractivas

Un caso importante de sucesiones de Cauchy es el de las sucesiones contractivas.

Definición 4.26. Se dice que una sucesión (s_n) es *contractiva* si existe una constante C, con $0 < C < 1$, tal que

$$|s_{n+2} - s_{n+1}| \leqslant C|s_{n+1} - s_n|$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. El número C se llama *constante de contracción* de (s_n).

Teorema 4.27. *Toda sucesión contractiva es de Cauchy, y, en consecuencia, es convergente.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión contractiva. Aplicando varias veces la definición de sucesión contractiva, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es

$$\begin{aligned}|s_{n+2} - s_{n+1}| &\leqslant C|s_{n+1} - s_n| \leqslant C^2|s_n - s_{n-1}| \\ &\leqslant C^3|s_{n-1} - s_{n-2}| \leqslant \cdots \leqslant C^n|s_2 - s_1|.\end{aligned}$$

Si $m > n$, aplicando la Desigualdad Triangular, se tiene

$$\begin{aligned}|s_m - s_n| &\leqslant |s_m - s_{m-1}| + |s_{m-1} - s_m| + \cdots + |s_{n+1} - s_n| \\ &\leqslant (C^{m-2} + C^{m-3} + \cdots + C^{n-1})|s_2 - s_1| \\ &= C^{n-1}(1 + C + C^2 + \cdots + C^{m-n-2} + C^{m-n-1})|s_2 - s_1| \\ &= C^{n-1} \cdot \frac{1 - C^{m-n}}{1 - C} \cdot |s_2 - s_1| \\ &\leqslant C^{n-1} \cdot \frac{|s_2 - s_1|}{1 - C}.\end{aligned}$$

Como $0 < C < 1$, sabemos que

$$\lim_n \Big(C^{n-1} \cdot \frac{|s_2 - s_1|}{1 - C} \Big) = 0.$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ es $C^{n-1} \cdot \frac{|s_2 - s_1|}{1-C} < \varepsilon$. Así que, si $m > n \geqslant n_0$, será

$$|s_m - s_n| \leqslant C^{n-1} \cdot \frac{|s_2 - s_1|}{1 - C} < \varepsilon.$$

Por tanto (s_n) es de Cauchy. $\square$

Ejemplos.

(I) La sucesión $x_n = 1/n$ es convergente, pero no contractiva.

En efecto,

$$\frac{|x_{n+2} - x_{n+1}|}{|x_{n+1} - x_n|} = \frac{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}} = \frac{\frac{1}{(n+2)(n+1)}}{\frac{1}{(n+1)n}} = \frac{n}{n+2} \longrightarrow 1.$$

Esto implica que para todo K, $0 < K < 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $|x_{n+2} - x_{n+1}|/|x_{n+1} - x_n| > K$, es decir, $|x_{n+2} - x_{n+1}| > K|x_{n+1} - x_n|$. Por tanto, (x_n) no es contractiva.

(II) La sucesión $y_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ es convergente.

Esta sucesión es contractiva, ya que si $n \in \mathbb{N}$ es

$$\begin{aligned}|y_{n+2} - y_{n+1}| &= \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2} \cdot \frac{1}{(n+1)!}\\ &= \frac{1}{n+2}|y_{n+1} - y_n| \leqslant \frac{1}{3}|y_{n+1} - y_n|\end{aligned}$$

(III) Mostrar que la ecuación $x^3 - 7x + 2 = 0$ tiene una solución entre 0 y 1.

Esto se puede lograr mediante un procedimiento iterativo de la siguiente manera. Escribimos la solución en la forma $x = (x^3 + y)/7$ y la usamos para definir una sucesión. A x_1 se le asigna un valor arbitrario entre 0 y 1, y después se define

$$x_{n+1} := \tfrac{1}{7}(x_n^3 + 2), \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $0 < x_1 < 1$, se prueba fácilmente por inducción que $0 < x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Además se tiene

$$\begin{aligned}|x_{n+2} - x_{n+1}| &= |\tfrac{1}{7}(x_{n+1}^3 + 2) - \tfrac{1}{7}(x_n^3 + 2)|\\ &= \tfrac{1}{7}|x_{n+1}^3 - x_n^3|\\ &= \tfrac{1}{7}|x_{n+1}^2 + x_{n+1}x_n + x_n^2||x_{n+1} - x_n|\\ &\leqslant \tfrac{3}{7}|x_{n+1} - x_n|.\end{aligned}$$

Por consiguiente, (x_n) es una sucesión contractiva, de donde converge a un límite $l \in \mathbb{R}$. Al pasar al límite en ambos miembros de la igualdad $x_{n+1} = (x_n^3 + 2)/7$ se obtiene $l = (l^3 + 2)/7$, de donde $l^3 - 7l + 2 = 0$. Por tanto, l es una solución de la ecuación.

3. Límites infinitos

3.1. Sucesiones divergentes

¿Qué es una sucesión divergente?

Definición 4.28.

(I) Decimos que una sucesión (s_n) *diverge a* ∞, y escribimos $\lim_n s_n = \infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $s_n \geqslant M$.

(II) Decimos que una sucesión (s_n) *diverge a* $-\infty$, y escribimos $\lim_n s_n = -\infty$, si para todo $M \in \mathbb{R}$ existe algún $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces $s_n \leqslant M$.

(III) Una sucesión *divergente* es una sucesión que diverge a ∞ o a $-\infty$.

(IV) Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se denominan sucesiones *oscilantes*.

Observaciones.

- Se sigue inmediatamente de la definición que una sucesión (s_n) diverge a ∞ si, y solo si, su opuesta diverge a $-\infty$.
- En la definición de sucesión que diverge a ∞, en lugar de $M \in \mathbb{R}$ se puede poner $M > 0$; y en la definición de sucesión que diverge a $-\infty$ se puede poner $M < 0$.
- En lo sucesivo, diremos que una sucesión tiene límite si es convergente o divergente, es decir, si no es oscilante. A veces nos referiremos a las sucesiones convergentes como sucesiones con límite finito y a las divergentes como sucesiones con límite infinito.
- Si una sucesión diverge, no está acotada. Pero hay sucesiones no acotadas que oscilan, es decir, no son divergentes.

Ejemplos.

- La sucesión $s_n = n$ diverge a ∞.

  En efecto, si $M \in \mathbb{R}$, la Propiedad Arquimediana nos proporciona un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > M$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$, será $s_n = n \geqslant n_0 > M$.
- La sucesión $s_n = -n^2$ diverge a $-\infty$.

  Si $M \in \mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > -M$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$, será $s_n = -n^2 \leqslant -n \leqslant -n_0 < M$.

- Si $c > 1$, la sucesión $s_n = c^n$ diverge a ∞.

  Sea $M \in \mathbb{R}$. Como $c > 1$, podemos escribir $c = 1+b$, con $b > 0$. Escojamos $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_0 b > M$. Por la Desigualdad de Bernoulli,

  $$s_n = c^n = (1+b)^n \geqslant 1 + nb > nb \geqslant n_0 b > M.$$

- La sucesión $s_n = (-1)^n$ es oscilante y acotada.

  En efecto, sabemos que esta sucesión no es convergente. Como es acotada, tampoco puede ser divergente. En consecuencia, solo puede ser oscilante.

- Si $c < -1$ la sucesión $s_n = c^n$ es oscilante y no acotada.

  Para ver que s_n no es acotada, basta observar que $|s_n| = |c|^n$ y aplicar el caso $c > 1$. De aquí que (s_n) no converge. Además, esta sucesión no diverge, porque toma alternativamente valores positivos y negativos, y por tanto no puede verificar la definición de sucesión divergente (a ∞ o $-\infty$).

Sucesiones monótonas no acotadas

Proposición 4.29.

(I) *Sea (s_n) una sucesión creciente. Si no está acotada superiormente, (s_n) diverge a ∞.*

(II) *Sea (s_n) una sucesión decreciente. Si no está acotada inferiormente, (s_n) diverge a $-\infty$.*

Demostración. Es consecuencia directa de las definiciones. □

Como consecuencia, obtenemos la siguiente generalización del Teorema de la Convergencia Monótona 4.9.

Corolario 4.30. *Toda sucesión monótona tiene límite (finito si está acotada, infinito en caso contrario).*

Ejemplo. Ya vimos que la sucesión

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

es estrictamente creciente y no está acotada superiormente. Luego diverge a ∞.

Subsucesiones de sucesiones divergentes

Ya vimos que si una sucesión tiene límite finito todas sus subsucesiones también convergen a este mismo límite. ¿Qué pasa cuando consideramos sucesiones divergentes?

Proposición 4.31.

(I) *Toda subsucesión de una sucesión divergente a* ∞ *diverge a* ∞.

(II) *Toda subsucesión de una sucesión divergente a* $-\infty$ *diverge a* $-\infty$.

Demostración. Consecuencia directa de la definición de sucesión divergente. □

Proposición 4.32.

(I) *Una sucesión posee una subsucesión divergente a* ∞ *si, y solo si, no está acotada superiormente.*

(II) *Una sucesión posee una subsucesión divergente a* $-\infty$ *si, y solo si, no está acotada inferiormente.*

(III) *Una sucesión posee una subsucesión divergente si, y solo si, no está acotada.*

Demostración. Consecuencia directa de las definiciones. □

Obtenemos como consecuencia inmediata una generalización del Teorema de Bolzano-Weierstrass 4.20.

Corolario 4.33. *Toda sucesión contiene una subsucesión con límite.*

Suma con una sucesión divergente

Proposición 4.34.

(I) *Si* (s_n) *es una sucesión divergente a* ∞ *y* (t_n) *es una sucesión acotada inferiormente, la sucesión* $(s_n + t_n)$ *diverge a* ∞.

(II) *Si* (s_n) *es una sucesión divergente a* $-\infty$ *y* (t_n) *es una sucesión acotada superiormente, la sucesión* $(s_n + t_n)$ *diverge a* $-\infty$.

Demostración.

(I) Por la definición de acotación inferior existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $t_n \geqslant m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Ahora sea $M \in \mathbb{R}$. Por definición de divergencia existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ se tiene $s_n > M - m$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$ será $s_n + t_n > M - m + m = M$.

(II) Análogo. □

Ejemplo. $s_n = n + (-1)^n$ diverge a ∞ ya que la sucesión (n) diverge a ∞ y la sucesión $((-1)^n)$ está acotada inferiormente por 1.

Corolario 4.35.

(I) *Si (s_n) es una sucesión divergente a ∞ y (t_n) es una sucesión convergente o divergente a ∞, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a ∞. (Esto se expresa simbólicamente diciendo que $\infty + a = \infty$, si $a \in \mathbb{R}$, y que $\infty + \infty = \infty$.)*

(II) *Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n + t_n)$ diverge a $-\infty$. (Esto se expresa simbólicamente diciendo que $-\infty + a = -\infty$, si $a \in \mathbb{R}$, y que $-\infty - \infty = -\infty$.)*

Ejemplo. $s_n = -n^2 + \dfrac{n^3 + n}{n^3 + 2}$ diverge a $-\infty$.

Ejemplos. La suma de una sucesión divergente a ∞ con una sucesión divergente a $-\infty$ puede resultar

- convergente, como en $n + (-n) \to 0$ o $(n + 1) + (-n) \to 1$,
- puede resultar divergente a ∞, como en $2n + (-n) \to \infty$,
- puede resultar divergente a $-\infty$, como en $n + (-2n) \to -\infty$,
- y puede resultar oscilante, como en $(n + (-1)^n) + (-n)$.

Normalmente, esto lo expresaremos diciendo que $\infty - \infty$ es una *indeterminación*.

Producto por una sucesión divergente

Proposición 4.36.

(I) *Si (s_n) es una sucesión divergente a ∞ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $t_n > r$ siempre que $n \geqslant n_0$, entonces la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a ∞.*

(II) *Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $t_n > r$ siempre que $n \geqslant n_0$, entonces la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$.*

(III) *Si (s_n) es una sucesión divergente a ∞ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $t_n < -r$ siempre que $n \geqslant n_0$, entonces la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$.*

(IV) *Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión para la que existen $r > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $t_n < -r$ siempre que $n \geqslant n_0$, entonces la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a ∞.*

Demostración.
(I) Sea $M > 0$. Como $s_n \to \infty$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ es $s_n \geqslant M/r$. Por tanto, si $n \geqslant \max\{n_0, n_1\}$, se tiene $s_n t_n \geqslant M/r \cdot r = M$.

Los demás apartados se prueban de manera completamente análoga. □

Corolario 4.37.

(I) *Si (s_n) es una sucesión divergente a ∞ y (t_n) es una sucesión convergente con límite positivo o divergente a ∞, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a ∞. (Simbólicamente, esto se expresa diciendo que $\infty \cdot a = \infty$ si $a > 0$.)*

(II) *Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite positivo o divergente a ∞, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$. (Simbólicamente, esto se expresa diciendo que $-\infty \cdot a = -\infty$ si $a > 0$.)*

(III) *Si (s_n) es una sucesión divergente a ∞ y (t_n) es una sucesión convergente con límite negativo o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a $-\infty$. (Simbólicamente, esto se expresa diciendo que $\infty \cdot a = -\infty$ si $a < 0$.)*

(IV) *Si (s_n) es una sucesión divergente a $-\infty$ y (t_n) es una sucesión convergente con límite negativo o divergente a $-\infty$, la sucesión $(s_n \cdot t_n)$ diverge a ∞. (Simbólicamente, esto se expresa diciendo que $-\infty \cdot a = \infty$ si $a < 0$.)*

Demostración. Consecuencia directa de 4.36 y 4.3. □

El producto de una sucesión divergente a ∞ o a $-\infty$ por una sucesión convergente a 0 puede resultar convergente, divergente a ∞, divergente a $-\infty$ u oscilante.

Ejemplos. No se puede predecir el comportamiento del producto de una sucesión que converge a 0 por otra divergente:

- $n \cdot \frac{1}{n^2}$ converge a 0.
- $n \cdot \frac{1}{n}$ converge a 1.
- $n \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)$ converge a -1.
- $n^2 \cdot \frac{1}{n}$ diverge a ∞.
- $n^2 \cdot \left(-\frac{1}{n}\right)$ diverge a$-\infty$.
- $n \cdot \frac{(-1)^n}{n}$ es oscilante.

Esto se expresará diciendo que $0 \cdot \infty$ es una indeterminación.

Inversas de sucesiones divergentes

Proposición 4.38.

(I) *Una sucesión (s_n) diverge a ∞ si, y solo si, tiene como mucho un número finito de términos no positivos y su inversa converge a 0. (Esto se expresa simbólicamente diciendo que $1/\infty = 0^+$ y que $1/0^+ = \infty$.)*

(II) *Una sucesión (s_n) diverge a $-\infty$ si, y solo si, tiene como mucho un número finito de términos no negativos y su inversa converge a 0. (Esto se expresa simbólicamente diciendo que $1/(-\infty) = 0^-$ y que $1/0^- = -\infty$.)*

(III) *La sucesión de valores absolutos de una sucesión (s_n) diverge a ∞ si, y solo si, tiene como mucho un número finito de términos nulos y su inversa converge a 0.*

Demostración.
(I) Suponemos primeramente que $s_n \to \infty$. Por definición de sucesión divergente, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ es $s_n > 0$, es decir, tiene como mucho un número finito de términos no positivos. Ahora, para ver que $1/s_n \to 0$, fijemos $\varepsilon > 0$. De nuevo por hipótesis, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$ es $s_n > 1/\varepsilon$. Luego si $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y $n \geqslant n_0$ se tiene $0 < 1/s_n < \varepsilon$.

Recíprocamente, supongamos que $s_n > 0$ si $n \geqslant n_1$ y que $1/s_n \to 0$. Para ver que $s_n \to \infty$ fijamos $M > 0$. Por definición de límite, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_2$ es $1/s_n < 1/M$. Luego si $n_0 = \text{máx}\{n_1, n_2\}$ y $n \geqslant n_0$, se tiene $s_n > M$.

Los otros apartados se prueban análogamente. □

Ejemplos. Debemos considerar $1/0$ como una indeterminación. Para ver esto, basta considerar los siguientes ejemplos:

- Si $s_n = 1/n$, $1/s_n$ diverge a ∞.
- Si $s_n = -1/n$, $1/s_n$ diverge a $-\infty$.
- Si $s_n = (-1)^n/n$, $1/s_n$ es oscilante.

Es fácil comprobar que una sucesión (s_n) converge a 0 si, y solo si, la sucesión $(|s_n|)$ de sus valores absolutos converge a 0. En efecto, ambas propiedades equivalen a que para todo $\varepsilon > 0$ exista un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|s_n| < \varepsilon$ para $n \geqslant n_0$. En general, sin embargo, solo puede afirmarse que si (s_n) es convergente con límite l, entonces $(|s_n|)$ es convergente con límite $|l|$; el recíproco no siempre es cierto si $l \neq 0$. De esto se deduce:

Corolario 4.39. *Una sucesión (s_n) sin términos nulos converge a 0 si, y solo si, la sucesión $1/|s_n|$ de los valores absolutos de los inversos diverge a ∞.*

El Criterio de Comparación

La siguiente proposición es un análogo del Teorema del Bocadillo 4.16, pero para sucesiones divergentes.

Proposición 4.40 (Criterio de Comparación)**.** *Dadas dos sucesiones* (s_n) *y* (t_n) *para las que existe un* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $s_n \leqslant t_n$ *si* $n \geqslant n_0$*, se verifica:*

(I) *Si* (s_n) *diverge a* ∞*, también* (t_n) *diverge a* ∞*.*

(II) *Si* (t_n) *diverge a* $-\infty$*, también* (s_n) *diverge a* $-\infty$*.*

Demostración. Consecuencia inmediata de la definición. □

3.2. La recta ampliada

Propiedades algebraicas de la recta ampliada

Los resultados anteriores sugieren incluir en los números reales los elementos ∞ y $-\infty$ y ampliar la estructura de orden de $\mathbb{R}$ y (parcialmente) sus operaciones algebraicas. Definimos $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$, y añadimos a nuestros dieciséis axiomas de los reales las siguientes propiedades:

(I) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, se tiene $-\infty \leqslant x \leqslant \infty$. Si $x \in \mathbb{R}$, se tiene $-\infty < x < \infty$.

(II) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ distinto de $-\infty$, es $\infty + x = x + \infty = \infty$.

(III) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$ distinto de ∞, es $(-\infty) + x = x + (-\infty) = -\infty$.

(Quedan así sin definir $\infty + (-\infty)$ y $(-\infty) + \infty$.)

(IV) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, con $x > 0$, es $\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$.

(V) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, con $x < 0$, es $\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty$.

(VI) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, con $x > 0$, es $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$.

(VII) Para todo $x \in \overline{\mathbb{R}}$, con $x < 0$, es $(-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty$.

(Quedan por tanto sin definir $\infty \cdot 0$, $0 \cdot \infty$, $(-\infty) \cdot 0$ y $0 \cdot (-\infty)$.)

(VIII) Si $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, se define $x - y = x + (-1)y$ siempre que la suma tenga sentido.

(Quedan así sin definir $\infty - \infty$ y $(-\infty) - (-\infty)$.)

(IX) $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$.

(X) Si $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, se define $x/y = x \cdot (1/y)$ siempre que el producto tenga sentido.

(Quedan sin definir $\frac{1}{0}$ y por tanto $\frac{x}{0}$ cualquiera que sea $x \in \overline{\mathbb{R}}$, así como $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$ y $\frac{\infty}{-\infty}$.)

(XI) $|\infty| = |-\infty| = \infty$.

Con la estructura resultante, $\overline{\mathbb{R}}$ suele denominarse el *sistema ampliado* o la *recta ampliada* de los reales.

Observaciones.

- En $\overline{\mathbb{R}}$ puede hablarse también de cotas superiores e inferiores de un conjunto no vacío, y de supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En $\overline{\mathbb{R}}$ tenemos una versión más sencilla del Principio del Supremo: todo subconjunto no vacío de $\overline{\mathbb{R}}$ tiene siempre supremo e ínfimo.
- $\mathbb{R}$ es denso en $\overline{\mathbb{R}}$. Es decir, dados dos elementos cualesquiera $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que $x < y$, se puede encontrar siempre un número real z tal que $x < z < y$.
- La Ley de Cancelación de la suma es falsa en $\overline{\mathbb{R}}$. En efecto, $0+\infty = 1+\infty = \infty$, pero claramente $0 \neq 1$.
- Dados $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$, si $x \leqslant y$, entonces $x + z \leqslant y + z$, siempre que las sumas estén bien definidas. (Pero obsérvese que, si $x < y$, no tiene por qué ser $x + z < y + z$. Por ejemplo, $0 + \infty = 1 + \infty = \infty$.)
- En $\overline{\mathbb{R}}$ se siguen verificando las propiedades del valor absoluto, en los casos en que tengan sentido.
- También resulta cómodo definir la exponencial en $\overline{\mathbb{R}}$, dando los valores $e^{\infty} = \infty$, $e^{-\infty} = 0$. Teniendo en cuenta esto, nos aparecen algunas nuevas indeterminaciones:

$$
\begin{aligned}
e^{\infty \cdot 0} &= (e^{\infty})^0 = \infty^0, & e^{0 \cdot \infty} &= (e^0)^{\infty} = 1^{\infty},\\
e^{-\infty \cdot 0} &= (e^{-\infty})^0 = 0^0, & e^{0 \cdot (-\infty)} &= (e^0)^{-\infty} = 1^{-\infty}.
\end{aligned}
$$

Propiedades algebraicas del límite (en la recta ampliada)

Las propiedades algebraicas que anteriormente vimos para límites de sucesiones convergentes y para sucesiones divergentes puede ahora resumirse de la siguiente manera:

Teorema 4.41. *Dada una sucesión (s_n) con limites l (finito o infinito) y una sucesión (t_n) con límite l' (finito o infinito), se tiene:*

(I) *Si $l + l'$ está definido en $\overline{\mathbb{R}}$, $(s_n + t_n)$ tiene límite $l + l'$.*

(II) *Si $l - l'$ está definido en $\overline{\mathbb{R}}$, $(s_n - t_n)$ tiene límite $l - l'$.*

(III) *Si $l \cdot l'$ está definido en $\overline{\mathbb{R}}$, $(s_n \cdot t_n)$ tiene límite $l \cdot l'$.*

(IV) *Si l/l' está definido en $\overline{\mathbb{R}}$, (s_n/t_n) tiene límite l/l'.*

3.3. Dos criterios prácticos

El Criterio del Cociente

Teorema 4.42 (Criterio del Cociente)**.** *Sea (s_n) una sucesión de términos positivos. Supóngase que existe $l = \text{lím}_n(s_{n+1}/s_n)$. Si $l < 1$ la sucesión (s_n) converge a 0. Si $l > 1$, la sucesión (s_n) diverge a ∞.*

Demostración. Supongamos primero que $l < 1$. Se elige un número r tal que $l < r < 1$. Existirá un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant n_0$, entonces $s_{n+1}/s_n < r$, de donde $s_{n+1} < s_n r$. Por tanto, si $n \geqslant n_0 + 1$ se obtiene

$$0 < s_n < s_{n-1}r < s_{n-2}r^2 < \cdots < s_{n_0}r^{n-n_0}.$$

Es decir, si hacemos $C = s_{n_0}/r^{n_0}$, hemos probado que $0 < s_n < Cr^n$ si $n > n_0$. Como $0 < r < 1$, resulta que $\text{lím}_n r^n = 0$, y el Teorema del Bocadillo 4.16 nos asegura así que $\text{lím}_n s_n = 0$.

Supongamos ahora que $l > 1$. Escojamos ahora un número r tal que $l > r > 1$. Existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_{n+1}/s_n > r$ si $n \geqslant n_0$. Por tanto, si $n \geqslant n_0$, será $s_{n+1} > s_n r$. De aquí que se tenga, si $n \geqslant n_0 + 1$,

$$s_n > s_{n-1}r > s_{n-2}r^2 > \cdots > s_{n_0}r^{n-n_0}.$$

Haciendo de nuevo $C = s_{n_0}/r^{n_0}$, obtenemos que $s_n > Cr^n$ si $n > n_0$. Como en esta ocasión es $r > 1$, resulta que $\text{lím}_n r^n = \infty$, y el Criterio de Comparación 4.40 nos asegura por tanto que $\text{lím}_n s_n = \infty$. □

Observemos que el Criterio del Cociente 4.42 solo nos da alguna información sobre la convergencia de (s_n) cuando la sucesión cociente (s_{n+1}/s_n) converge a un límite que es mayor o menor que 1. Si este límite es exactamente 1, el Criterio del Cociente 4.42 no desvela nada sobre el comportamiento de (s_n).

Tampoco da ninguna información cuando no existe el límite de la sucesión cociente. Sin embargo, cuando hayamos estudiado los límites superior e inferior, nos podremos dar cuenta de que el enunciado del Criterio del Cociente 4.42 se puede generalizar a algunos casos en que no existe el límite de dicha sucesión cociente, sin más que sustituir las condiciones $\text{lím}_n s_{n+1}/s_n < 1$ y $\text{lím}_n s_{n+1}/s_n > 1$ por las condiciones más generales $\text{lím sup}_n s_{n+1}/s_n < 1$ y $\text{lím inf}_n s_{n+1}/s_n > 1$.

Ejemplos.

- La sucesión $s_n = \frac{n}{2^n}$ converge a 0.

  Apliquemos el Criterio del Cociente 4.42: tenemos que

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} \longrightarrow \frac{1}{2} < 1.$$

  Por tanto, el Criterio del Cociente 4.42 asegura que (s_n) converge a 0.

- La sucesión $s_n = \frac{n!}{2^n}$ diverge a ∞,

  Tenemos en esta ocasión

$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)!/2^{n+1}}{n!/2^n} = \frac{n+1}{2} \longrightarrow \infty > 1.$$

  En consecuencia, la sucesión (s_n) diverge a ∞.

- La sucesión $s_n = \frac{n!}{n^n}$ converge a 0.

  En esta ocasión

$$\begin{aligned} \frac{s_{n+1}}{s_n} &= \frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n} = \frac{n+1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\ &= \frac{1}{(1+1/n)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1. \end{aligned}$$

  Así que (s_n) converge a 0.

El Criterio de Stolz

Teorema 4.43. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones tales que (t_n) es estrictamente monótona y se da una de las dos siguientes situaciones:*

(I) $\lim_n s_n = \lim_n t_n = 0$, *o*

(II) (t_n) *diverge.*

Si la sucesión $\left(\frac{s_{n+1}-s_n}{t_{n+1}-t_n}\right)$ tiene límite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces la sucesión $\frac{s_n}{t_n}$ también tiene límite l.

Antes de abordar la demostración, probamos un resultado auxiliar.

Lema 4.44. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones tales que (t_n) es estrictamente monótona y además existen $n_0 \in \mathbb{N}$ y $k, K \in \overline{\mathbb{R}}$ tales que*

$$k < \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} < K \qquad \textit{si } n \geqslant n_0.$$

Entonces

$$k < \frac{s_m - s_n}{t_m - t_n} < K \qquad \textit{si } m > n \geqslant n_0.$$

Demostración. Las fracciones

$$\frac{s_m - s_{m-1}}{t_m - t_{m-1}}, \quad \frac{s_{m-1} - s_{m-2}}{t_{m-1} - t_{m-2}}, \quad \dots, \quad \frac{s_{n+2} - s_{n+1}}{t_{n+2} - t_{n+1}}, \quad \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n}$$

están comprendidas entre k y K si $m > n \geqslant n_0$. Como (t_n) es estrictamente monótona, se puede observar que es $\frac{t_{i+1}-t_i}{t_m-t_n} > 0$, si $m > i \geqslant n$. Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{s_m - s_n}{t_m - t_n} &= \sum_{i=n}^{m-1} \frac{s_{i+1} - s_i}{t_m - t_n} = \sum_{i=n}^{m-1} \frac{s_{i+1} - s_i}{t_{i+1} - t_i} \cdot \frac{t_{i+1} - t_i}{t_m - t_n} \\ &< K \sum_{i=n}^{m-1} \frac{t_{i+1} - t_i}{t_m - t_n} = K. \end{aligned}$$

De la misma forma, se prueba que $\frac{s_m - s_n}{t_m - t_n} > k$. En consecuencia, tenemos

$$k < \frac{s_m - s_n}{t_m - t_n} < K. \qquad \square$$

Ahora podemos ya probar el Criterio de Stolz 4.43.

Demostración.

(I) Supongamos que $l \in \mathbb{R}$. Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $n \geqslant n_0$. Según el Lema 4.44, tiene que ser

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{s_m - s_n}{t_m - t_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

si $m > n \geqslant n_0$. Si ahora pasamos al límite con respecto a m (conservando fijo n) en las desigualdades anteriores, como $\lim_n s_n = \lim_n t_n = 0$, entonces

$$l - \varepsilon < l - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \frac{s_n}{t_n} \leqslant l + \frac{\varepsilon}{2} < l + \varepsilon$$

siempre que $n \geqslant n_0$. Por consiguiente $\lim_n \frac{s_n}{t_n} = l$. Mediante un razonamiento similar se prueban los casos en que $l = \pm\infty$.

(II) Veamos primero el caso $l = \infty$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que (t_n) es estrictamente creciente, y que $t_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como $\lim_n \frac{s_{n+1}-s_n}{t_{n+1}-t_n} = \infty$, dado $M > 0$, existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ es $\frac{s_{n+1}-s_n}{t_{n+1}-t_n} > 2M$. Será entonces, para $n \geqslant n_1 + 1$,

$$\begin{aligned}\frac{s_n}{t_n} &= \frac{s_n - s_{n_1}}{t_n} + \frac{s_{n_1}}{t_n} = \sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{s_{i+1}-s_i}{t_{i+1}-t_i} \cdot \frac{t_{i+1}-t_i}{t_n} + \frac{s_{n_1}}{t_n} \\ &> 2M \sum_{i=n_1}^{n-1} \frac{t_{i+1}-t_i}{t_n} + \frac{s_{n_1}}{t_n} = 2M\frac{t_n - t_{n_1}}{t_n} + \frac{s_{n_1}}{t_n} \\ &= 2M + \frac{s_{n_1} - 2Mt_{n_1}}{t_n}\end{aligned}$$

Como $\lim_n t_n = \infty$, será $\lim_n (s_{n_1} - 2Mt_{n_1})/t_n = 0$. Por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, con $n_0 \geqslant n_1 + 1$, tal que si $n \geqslant n_0$ es $(s_{n_1} - 2Mt_{n_1})/t_n > -M$. Tendremos entonces, para $n \geqslant n_0$, que

$$\frac{s_n}{t_n} > 2M - M = M.$$

Es decir, $\lim_n s_n/t_n = \infty$.

El caso $l = -\infty$ se demuestra de forma similar.

Probemos ahora el caso $l \in \mathbb{R}$. Supondremos de nuevo que (t_n) es estrictamente creciente y estrictamente positiva. Sea $\varepsilon > 0$. Existe un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_1$ entonces

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{s_{n+1} - s_n}{t_{n+1} - t_n} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n \geqslant n_1$. Por el Lema 4.44, tendremos que

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{s_n - s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} < l + \frac{\varepsilon}{2}$$

si $n \geqslant n_1 + 1$. Teniendo en cuenta que

$$\frac{s_n}{t_n} = \frac{s_n - s_{n_1} + s_{n_1}}{t_n - t_{n_1} + t_{n_1}} = \frac{\frac{s_n - s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} + \frac{s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}}{1 + \frac{t_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}},$$

obtenemos que, si $n \geqslant n_1 + 1$,

$$\left|\frac{s_n}{t_n} - l\right| = \left|\frac{\frac{s_n - s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} + \frac{s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}}{1 + \frac{t_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}} - l\right| = \frac{\left|\frac{s_n - s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} + \frac{s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} - l - l\frac{t_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}\right|}{1 + \frac{t_{n_1}}{t_n - t_{n_1}}}$$
$$\leqslant \left|\frac{s_n - s_{n_1}}{t_n - t_{n_1}} - l\right| + \frac{|s_{n_1} - l t_{n_1}|}{t_n - t_{n_1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|s_{n_1} - l t_{n_1}|}{t_n - t_{n_1}}.$$

Como $t_n \to \infty$, el sumando de la derecha de la expresión anterior tenderá a 0, y podemos encontrar un natural $n_0 \geqslant n_1 + 1$, tal que dicho sumando sea menor que $\varepsilon/2$, si $n \geqslant n_0$. En consecuencia, si $n \geqslant n_0$, será

$$\left|\frac{s_n}{t_n} - l\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \qquad \square$$

Ejemplos.

- $\lim_n \frac{\log n}{n} = 0$.

  La sucesión (n) es estrictamente creciente y no acotada superiormente. Calculamos el límite siguiente:

  $$\lim_n \frac{\log(n+1) - \log n}{(n+1) - n} = \lim_n \log \frac{n+1}{n} = \log 1 = 0.$$

  Por tanto, según el Criterio de Stolz 4.43, se sigue que $\lim_n \frac{\log n}{n} = 0$.

- $\lim_n \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$.

  La sucesión (n^3) es estrictamente creciente y no acotada. Calculamos el límite siguiente:

  $$\lim_n \frac{(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{(n+1)^3 - n^3}$$
  $$= \lim_n \frac{(n+1)^2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3} = \lim_n \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 3n + 1} = \frac{1}{3}.$$

  Por tanto, según el Criterio de Stolz 4.43, se sigue que

  $$\lim_n \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

- $\lim_n \frac{1+2+\cdots+n}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}} = \infty$.

  En efecto, se verifican las hipótesis del Criterio de Stolz 4.43, y aplicándolo obtenemos

$$\begin{aligned}\lim_n \frac{1+2+\cdots+n}{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}\\ &= \lim_n \frac{(1+2+\cdots+n+(n+1)) - (1+2+\cdots+n)}{(1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}) - (1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n})}\\ &= \lim_n \frac{n+1}{\sqrt{n+1}} = \lim_n \sqrt{n+1} = \infty.\end{aligned}$$

4. Límites superior e inferior. Límites subsecuenciales

4.1. Límites superior e inferior

Límites superior e inferior

Pasamos ahora a estudiar las sucesiones oscilantes, es decir, aquellas que no tienen límite. Vamos a ver que, aun en este caso, se puede hablar de ciertos conceptos cercanos al de límite, que además están, como se verá, muy relacionados con los límites de las subsucesiones.

Sea (s_n) una sucesión acotada superiormente. Si consideramos la sucesión $(\overline{s_n})$, dada por

$$\overline{s_n} = \sup\{\, s_k \mid k \geqslant n \,\},$$

es evidente que $\overline{s_n}$ está bien definido para todo $n \in \mathbb{N}$. Además, la sucesión $(\overline{s_n})$ es decreciente, por lo que tiene límite (que puede ser finito o infinito). Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 4.45. Sea (s_n) una sucesión. Si (s_n) está acotada superiormente llamamos *límite superior* de (s_n) al número (finito o infinito)

$$\limsup_n s_n = \lim_n \overline{s_n} \qquad \text{donde} \quad \overline{s_n} = \sup\{\, s_k \mid k \geqslant n \,\}.$$

Si (s_n) no está acotada superiormente, definimos $\limsup_n s_n = \infty$.

Análogamente, podemos hacer la siguiente definición, completamente simétrica.

Definición 4.46. Sea (s_n) una sucesión. Si (s_n) está acotada inferiormente, llamamos *límite inferior* de (s_n) al número (finito o infinito)

$$\liminf_n s_n = \lim_n \underline{s_n} \qquad \text{donde} \quad \underline{s_n} = \inf\{\, s_k \mid k \geqslant n \,\}.$$

Si (s_n) no está acotada inferiormente, definimos $\liminf_n s_n = -\infty$.

Observaciones.

- Los límites inferior y superior de una sucesión siempre existen.
- Una consecuencia inmediata de la definición es que siempre es

$$\liminf_n s_n \leqslant \limsup_n s_n.$$

Ejemplos.

- $\liminf_n (-1)^n = -1, \qquad \limsup_n (-1)^n = 1.$
- $\liminf_n (-1)^n n = -\infty, \qquad \limsup_n (-1)^n n = \infty.$
- $\liminf_n \dfrac{(-1)^n}{n} = 0, \qquad \limsup_n \dfrac{(-1)^n}{n} = 0.$
- $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$: el límite inferior es 0 y el límite superior es 1.
- $(0, 1, 0, 2, 0, 3, \dots)$: el límite inferior es 0 y el límite superior es ∞.
- $(0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \dots)$: el límite inferior es 0 y el límite superior es 0 también.
- $(a, b, c, a, b, c, \dots)$: el límite inferior es $\min\{a, b, c\}$ y el límite superior es $\max\{a, b, c\}$.
- $\liminf_n \operatorname{sen} n = -1, \qquad \limsup_n \operatorname{sen} n = 1.$

  Probaremos solo lo referente al límite superior. Como $\operatorname{sen} n \leqslant 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, está claro que, para todo $n \in \mathbb{N}$, es

  $$\overline{s_n} := \sup\{\operatorname{sen} k \mid k \geqslant n\} \leqslant 1.$$

  Por tanto, $\limsup_n \operatorname{sen} n = \lim_n \overline{s_n} \leqslant 1$. Para ver la otra desigualdad, probaremos que $\limsup_n \operatorname{sen} n \geqslant 1 - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$. Esto es lo mismo que decir que $\overline{s_n} \geqslant 1 - \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\overline{s_n}$, esto supone probar que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $k \geqslant n$ tal que $\operatorname{sen} k \geqslant 1 - \varepsilon$. Es decir, bastará probar que existen infinitos números naturales n tales que $\operatorname{sen} n \geqslant 1 - \varepsilon$.

  Supongamos sin pérdida de generalidad que $\varepsilon < 1$. Sea $\delta = (1 - (1-\varepsilon)^2)^{1/2}$. Consideremos la sucesión $(\cos 2n)$. Esta sucesión es claramente acotada, así que el Teorema de Bolzano-Weierstrass nos asegura que tiene una subsucesión convergente (y, por tanto, de Cauchy). En consecuencia, podemos encontrar dos números naturales m y n, $m > n$, de manera que

$$|\cos 2m - \cos 2n| < 2\delta^2.$$

Pero

$$\begin{aligned}|\cos 2m - \cos 2n| &= \left|2 \operatorname{sen} \frac{2m+2n}{2} \operatorname{sen} \frac{2m-2n}{2}\right| \\ &= 2|\operatorname{sen}(m+n)||\operatorname{sen}(m-n)|,\end{aligned}$$

así que al menos uno de los dos números naturales $m+n$ o $m-n$ verifica que su seno es en valor absoluto menor que δ. Es decir, si llamamos n_0 a este número natural, entonces $|\operatorname{sen} n_0| < \delta$. Será por tanto

$$\cos^2 n_0 = 1 - \operatorname{sen}^2 n_0 > 1 - \delta^2 = (1-\varepsilon)^2.$$

Es decir, $|\cos n_0| > 1 - \varepsilon$.

Existe un número entero k tal que $k\pi - \pi/2 < n_0 < k\pi + \pi/2$. (No puede ser $k\pi - \pi/2 = n_0$ porque eso implicaría que π es racional). Sea $h = n_0 - k\pi$. Entonces $-\pi/2 < h < \pi/2$ y $\cos h = |\cos n_0| > 1 - \varepsilon$. Observemos que no puede ser $h = 0$ porque eso también implicaría que π es racional. Consideraremos dos casos:

- $(0 < h < \pi/2)$. Sea $p \in \mathbb{N}$. El intervalo $(2p\pi + \pi/2 - h, 2p\pi + \pi/2 + h)$ tiene longitud $2h$ y, por tanto, contendrá *exactamente dos* múltiplos *consecutivos* de h. (*¿Por qué?*) De estos dos múltiplos, escojamos el múltiplo par, que tendrá la forma $2q_ph$, con $q_p \in \mathbb{N}$. Como el seno es creciente en $[2p\pi, 2p\pi + \pi/2]$ y decreciente en $[2p\pi + \pi/2, (2p+1)\pi]$, el hecho de que $2p\pi + \pi/2 - h < 2q_ph < 2p\pi + \pi/2 + h$ implica que

  $$\operatorname{sen} 2q_ph > \operatorname{sen}(2p\pi + \pi/2 - h) = \operatorname{sen}(\pi/2 - h) = \cos h > 1 - \varepsilon.$$

  Por otra parte, $2q_ph = 2q_pn_0 - 2q_pk\pi$. Obsérvese que $n_p := 2q_pn_0 \in \mathbb{N}$ y además

  $$\operatorname{sen} n_p = \operatorname{sen} 2q_pn_0 = \operatorname{sen}(2q_ph + 2q_pk\pi) = \operatorname{sen} 2q_ph > 1 - \varepsilon.$$

  Fijémonos también en que, para valores diferentes de p, obtenemos valores también diferentes de q_p, y por tanto obtenemos números naturales n_p diferentes. De esta forma hemos encontrado infinitos números naturales con la propiedad buscada.

- $(-\pi/2 < h < 0)$. La demostración es análoga, pero buscando múltiplos de h en el intervalo $(-2p\pi + \pi/2 - h, -2p\pi + \pi/2 + h)$, con $p \in \mathbb{N}$.

(En la demostración anterior, el punto esencial es que determinado intervalo contiene varios múltiplos de h. Utilizando esta misma estrategia, podríamos adaptar la prueba para demostrar una propiedad muy curiosa que tiene la sucesión $(\operatorname{sen} n)$: si $-1 \leqslant a < b \leqslant 1$, entonces existe un número natural n tal que $a < \operatorname{sen} n < b$, es decir, el conjunto $\{\operatorname{sen} n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es *denso* en $[-1, 1]$.)

Límites superior e inferior y límite

Proposición 4.47.

(I) (s_n) *es convergente con límite* $l \in \mathbb{R}$ *si, y solo si,*

$$\liminf_n s_n = \limsup_n s_n = l.$$

(II) (s_n) *es divergente a* ∞ *si, y solo si,*

$$\liminf_n s_n = \infty,$$

y en tal caso también es $\limsup_n s_n = \infty$.

(III) (s_n) *es divergente a* $-\infty$ *si, y solo si,*

$$\limsup_n s_n = -\infty,$$

y en tal caso también es $\liminf_n s_n = -\infty$.

Demostración.

(I) Pongamos, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\overline{s_n} = \sup\{ s_k \mid k \geqslant n \}, \qquad \underline{s_n} = \inf\{ s_k \mid k \geqslant n \}.$$

Está claro que $\underline{s_n} \leqslant s_n \leqslant \overline{s_n}$. Como $\liminf_n s_n = \lim_n \underline{s_n}$ y $\limsup_n s_n = \lim_n \overline{s_n}$, si $\liminf_n s_n = \limsup_n s_n = l \in \mathbb{R}$, basta aplicar el Teorema del Bocadillo 4.16 para obtener que (s_n) es convergente con límite l.

Recíprocamente, si (s_n) es convergente con límite l, dado $\varepsilon > 0$ hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ es

$$l - \varepsilon < s_n < l + \varepsilon,$$

con lo que para todo $n \geqslant n_0$ el conjunto $\{ s_k \mid k \geqslant n \}$ está acotado superiormente por $l + \varepsilon$ e inferiormente por $l - \varepsilon$, y así para todo $n \geqslant n_0$ es

$$l - \varepsilon \leqslant \underline{s_n} \leqslant \overline{s_n} \leqslant l + \varepsilon,$$

de donde

$$l - \varepsilon \leqslant \lim_n \underline{s_n} = \liminf_n s_n \leqslant \limsup_n s_n = \lim_n \overline{s_n} \leqslant l + \varepsilon.$$

Finalmente, como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, tendrá que ser

$$l \leqslant \liminf_n s_n \leqslant \limsup_n s_n \leqslant l,$$

es decir, $\liminf_n s_n = \limsup_n s_n = l$.

(II) Para que $\liminf_n s_n = \infty$, la sucesión (s_n) debe estar acotada inferiormente y, definiendo $\underline{s_n}$ como arriba, debe ser $\lim_n \underline{s_n} = \infty$. Como $\underline{s_n} \leqslant s_n$, el Criterio de Comparación 4.40 obliga a que (s_n) también sea divergente a ∞.

Recíprocamente, si (s_n) diverge a ∞ entonces no está acotada superiormente y por definición es $\limsup_n s_n = \infty$. También es $\liminf_n s_n = \infty$, ya que dado $M \in \mathbb{R}$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se verifica $s_n > M + 1$, con lo que $\underline{s_n} \geqslant \underline{s_{n_0}} \geqslant M + 1 > M$, es decir, $\lim_n \underline{s_n} = \infty$.

(III) Razonamiento análogo al anterior. □

Cuando pasamos a la recta ampliada, los resultados de la proposición anterior se pueden resumir en uno.

Corolario 4.48. *Una sucesión (s_n) tiene límite (en $\overline{\mathbb{R}}$) si, y solo si,*

$$\liminf_n s_n = \limsup_n s_n.$$

En este caso, el límite es igual al límite superior y al límite inferior. La sucesión (s_n) es oscilante si, y solo si,

$$\liminf_n s_n < \limsup_n s_n.$$

4.2. Límites subsecuenciales

¿Qué es un límite subsecuencial?

Una descripción interesante, que muestra todo el potencial de los límites superior e inferior, se expresa mediante el siguiente concepto.

Definición 4.49. Se dice que un número $x \in \overline{\mathbb{R}}$ es un *límite subsecuencial* de una sucesión (s_n) si es límite de alguna subsucesión de (s_n).

Proposición 4.50. *Toda sucesión tiene al menos un límite subsecuencial.*

Demostración. Dicho de otra forma, el hecho ya conocido de que toda sucesión tiene una subsucesión con límite (finito o infinito). □

Límite superior e inferior y límites subsecuenciales

Teorema 4.51.

(I) *El límite superior de una sucesión es el máximo (en $\overline{\mathbb{R}}$) de sus límites subsecuenciales.*

(II) *El límite inferior de una sucesión es el mínimo (en $\overline{\mathbb{R}}$) de sus límites subsecuenciales.*

Demostración. Sea (s_n) una sucesión. Veamos primeramente que el límite superior (y análogamente se vería el límite inferior) es un límite subsecuencial.

Caso 1. Supongamos que $\operatorname{lím\,sup}_n s_n = l \in \mathbb{R}$. Sea $\overline{s_n} = \sup\{s_k \mid k \geqslant n\}$ con lo que $l = \operatorname{lím}_n \overline{s_n}$. Ahora, por la definición de límite, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $l - 1 < \overline{s_{n_1}} < l + 1$ y, por la definición de supremo, existe $i_1 \geqslant n_1$ tal que $l - 1 < s_{i_1} < l+1$. Repitiendo la misma idea, existe $i_2 > i_1$ tal que $l-1/2 < s_{i_2} < l+1/2$, y en general existen $i_n > i_{n-1} > \cdots > i_1$ tales que $l - 1/n < s_{i_n} < l + 1/n$. Claramente, por el Teorema del Bocadillo 4.16, la subsucesión (s_{i_n}) converge a l.

Caso 2. Ahora supongamos que $\operatorname{lím\,sup}_n s_n = \infty$. Entonces (s_n) no está acotada superiormente, y, por la Proposición 4.32, tiene una subsucesión que diverge a ∞.

Caso 3. Obsérvese que el caso $\operatorname{lím\,sup}_n s_n = -\infty$ queda cubierto por la Proposición 4.47.

Para finalizar basta demostrar que cualquier otro límite subsecuencial de (s_n) está entre el límite superior y el inferior. Sea (s_{i_n}) una subsucesión convergente a un límite subsecuencial. Claramente, como $i_n \geqslant n$, con la notación de la definición se tiene $\underline{s_n} \leqslant s_{i_n} \leqslant \overline{s_n}$, y tomando límites se obtiene así la tesis del enunciado. □

4.3. Propiedades de los límites superior e inferior

Límites superiores o inferiores comparadas con una constante

El conocer los límites superior e inferior nos permite a veces deducir cosas sobre el comportamiento de la sucesión, tal como se ve en la proposición siguiente.

Proposición 4.52. *Sea (s_n) una sucesión.*

(I) *Si* $\operatorname{lím\,sup}_n s_n < c$*, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n < c$ para todo $n \geqslant n_0$.*

(II) *Si* $\operatorname{lím\,sup}_n s_n > c$*, existen infinitos n para los que $s_n > c$.*

(III) *Si* $\operatorname{lím\,inf}_n s_n > c$*, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s_n > c$ para todo $n \geqslant n_0$.*

(IV) *Si* $\operatorname{lím\,inf}_n s_n < c$*, existen infinitos n para los que $s_n < c$.*

Demostración.

(I) Si $\overline{s_n} = \sup\{s_k \mid k \geqslant n\}$, entonces, $\text{lím}_n \overline{s_n} = \text{lím sup}_n s_n < c$, de donde existe n_0 tal que $\overline{s_{n_0}} < c$. Por definición, esto implica claramente que $s_n < c$ para todo $n \geqslant n_0$.

(II) Con la notación de antes, será $\text{lím}_n \overline{s_n} = \text{lím sup}_n s_n > c$, y como la sucesión $(\overline{s_n})$ es decreciente, resulta que $\overline{s_n} > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por la definición de $\overline{s_n}$, obtenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $k \geqslant n$ tal que $s_k > c$. En consecuencia, el número de términos de (s_n) que son mayores que c es infinito.

Los dos restantes apartados se prueban de forma análoga. □

Ejemplo. Consideremos la sucesión $(-1)^n$.

Se tiene $\text{lím sup}_n(-1)^n = 1 < 2$, y podemos observar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que$(-1)^n < 2$ si $n \geqslant n_0$, De hecho, basta considerar $n_0 = 1$, ya que la desigualdad anterior se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto es justamente lo que afirma el apartado (I) de la Proposición 4.52.

Por otra parte, se tiene que $\text{lím sup}_n(-1)^n = 1 > 0$. No se puede afirmar, sin embargo, que exista $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(-1)^n > 0$ si $n \geqslant n_0$, ya que $(-1)^n < 0$ para todo n impar. Pero también se ve que $(-1)^n > 0$ si n es par, de donde $(-1)^n > 0$ para infinitos n, como afirma (II) de la Proposición 4.52.

Límites superior e inferior y desigualdad

Las siguientes proposiciones nos dan reglas de cálculo de los límites superior e inferior, tal como obtuvimos en su momento para los límites ordinarios.

Proposición 4.53. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones. Si para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ es $s_n \leqslant t_n$ si $n \geqslant n_0$, entonces*

$$\text{lím inf}_n s_n \leqslant \text{lím inf}_n t_n \qquad y \qquad \text{lím sup}_n s_n \leqslant \text{lím sup}_n t_n$$

Demostración. Obviamente, si $n \geqslant n_0$ es

$$\overline{s_n} := \sup\{s_k \mid k \geqslant n\} \leqslant \sup\{t_k \mid k \geqslant n\} =: \overline{t_n}.$$

Por tanto,

$$\text{lím sup}_n s_n = \text{lím}_n \overline{s_n} \leqslant \text{lím}_n \overline{t_n} = \text{lím sup}_n t_n.$$

La otra desigualdad es análoga. □

A continuación enunciamos reglas para los límites superior e inferior de la suma y el producto. Estas reglas, no obstante, no son tan satisfactorias como las obtenidas para los límites ordinarios.

Límites superior e inferior de la suma

Proposición 4.54. *Sean* (s_n) *y* (t_n) *dos sucesiones. Entonces*

$$
\begin{aligned}
\liminf_n s_n + \liminf_n t_n &\leqslant \liminf_n (s_n + t_n) \\
&\leqslant \liminf_n s_n + \limsup_n t_n \\
&\leqslant \limsup (s_n + t_n) \leqslant \limsup_n s_n + \limsup_n t_n,
\end{aligned}
$$

siempre que las sumas implicadas estén definidas.

Demostración. Probemos la primera desigualdad. Es obvia si $\liminf_n s_n = -\infty$ o $\liminf_n t_n = -\infty$, así que supondremos que no se cumplen estos casos, conque ambas sucesiones serán acotadas inferiormente. Sean

$$\underline{s_n} = \inf\{s_k \mid k \geqslant n\}, \quad \underline{t_n} = \inf\{t_k \mid k \geqslant n\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, es obvio que

$$\underline{s_n} + \underline{t_n} = \inf\{s_k \mid k \geqslant n\} + \inf\{t_k \mid k \geqslant n\} \leqslant s_n + t_n.$$

En consecuencia,

$$\liminf_n s_n + \liminf_n t_n = \lim_n \underline{s_n} + \lim_n \underline{t_n} = \lim_n (\underline{s_n} + \underline{t_n}) \leqslant \liminf_n (s_n + t_n).$$

Veamos ahora la segunda desigualdad. Es trivial si $\liminf_n s_n = \infty$, o si $\limsup_n t_n = \infty$, o bien si $\limsup_n (s_n + t_n) = -\infty$, así que supongamos que no se da ninguno de estos tres casos. Definamos también

$$\overline{t_n} = \sup\{s_k \mid k \geqslant n\}, \quad \underline{r_n} = \inf\{s_k + t_k \mid k \geqslant n\}.$$

Si $n \in \mathbb{N}$, es inmediato que

$$\underline{r_n} - \overline{t_n} = \inf\{s_k + t_k \mid k \geqslant n\} - \sup\{t_k \mid k \geqslant n\} \leqslant (s_n + t_n) - t_n = s_n.$$

De aquí que

$$\liminf_n (s_n + t_n) - \limsup_n t_n = \lim_n \underline{r_n} - \lim_n \overline{t_n} = \lim_n (\underline{r_n} - \overline{t_n}) \leqslant \liminf_n s_n.$$

Las otras desigualdades se prueban de forma análoga. $\square$

Ejemplo. Sean $s_n = \cos\frac{n\pi}{2}$, $t_n = \cos\frac{(n+1)\pi}{2}$. Si expresamos estas dos sucesiones término a término, tendremos

$$\begin{aligned} s_n &= (0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1 \dots), \\ t_n &= (-1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0 \dots), \end{aligned}$$

y también

$$s_n + t_n = (-1, -1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, \dots).$$

Se ve fácilmente que

$$\begin{aligned} \liminf_n s_n + \liminf_n t_n &= -1 - 1 = -2, \\ \liminf_n (s_n + t_n) &= -1, \\ \liminf_n s_n + \limsup_n t_n &= -1 + 1 = 0, \\ \limsup_n (s_n + t_n) &= 1, \\ \limsup_n s_n + \limsup_n t_n &= 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Comprobamos de esta manera que para este ejemplo concreto todas las desigualdades de la Proposición 4.54 son estrictas.

Corolario 4.55. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones y supongamos que (t_n) tiene límite. Entonces*

$$\liminf_n (s_n + t_n) = \liminf_n s_n + \lim_n t_n$$

y

$$\limsup_n (s_n + t_n) = \limsup_n s_n + \lim_n t_n,$$

siempre que las sumas de los miembros derechos estén definidas.

Ejemplo.

$$\limsup_n \Big((-1)^n + \frac{5n+1}{n} \Big) = \limsup_n (-1)^n + \lim_n \frac{5n+1}{n} = 1 + 5 = 6.$$

Límites superior e inferior de un múltiplo

Proposición 4.56. *Sea (s_n) una sucesión y c un número real. Entonces*

(I) *Si $c > 0$,*

$$\liminf_n (cs_n) = c \liminf_n s_n \quad y \quad \limsup_n (cs_n) = c \limsup_n s_n$$

si los productos de la derecha de cada igualdad están definidos.

(II) *Si $c < 0$,*

$$\liminf_n (cs_n) = c \limsup_n s_n \quad y \quad \limsup_n (cs_n) = c \liminf_n s_n$$

si los productos de la derecha de cada igualdad están definidos.

Demostración. Basta observar que, si $c > 0$, se tiene

$$\inf\{cs_k \mid k \geqslant n\} = c \inf\{cs_k \mid k \geqslant n\}$$

y

$$\sup\{cs_k \mid k \geqslant n\} = c \sup\{cs_k \mid k \geqslant n\}.$$

Si $c < 0$, en cambio, lo que se tiene es

$$\inf\{cs_k \mid k \geqslant n\} = c \sup\{cs_k \mid k \geqslant n\}$$

y

$$\sup\{cs_k \mid k \geqslant n\} = c \inf\{cs_k \mid k \geqslant n\}. \qquad \square$$

Límites superior e inferior del producto

Proposición 4.57. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones no negativas. Entonces*

$$\begin{aligned}\liminf_n s_n \cdot \liminf_n t_n &\leqslant \liminf_n (s_n \cdot t_n)\\ &\leqslant \liminf_n s_n \cdot \limsup_n t_n\\ &\leqslant \limsup (s_n \cdot t_n)\\ &\leqslant \limsup_n s_n \cdot \limsup_n t_n,\end{aligned}$$

siempre que los productos implicados estén definidos.

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición 4.54. $\square$

Corolario 4.58. *Sean (s_n) y (t_n) dos sucesiones no negativas y supongamos que (t_n) tiene límite. Entonces*

$$\liminf_n (s_n \cdot t_n) = \liminf_n s_n \cdot \lim_n t_n$$

y

$$\limsup_n (s_n \cdot t_n) = \limsup_n s_n \cdot \lim_n t_n,$$

siempre que los productos de los miembros derechos estén definidos.

Corolario 4.59. *Sea* (s_n) *una sucesión de términos positivos. Entonces,*

$$\limsup_n \frac{1}{s_n} = \frac{1}{\liminf_n s_n}$$

y

$$\liminf_n \frac{1}{s_n} = \frac{1}{\limsup_n s_n}$$

(tomando los convenios $1/\infty = 0$*,* $1/0 = \infty$*).*

Demostración. Se tiene

$$1 = \liminf_n \Big(s_n \cdot \frac{1}{s_n}\Big) \leqslant \liminf_n s_n \cdot \limsup_n \frac{1}{s_n} \leqslant \limsup_n \Big(s_n \cdot \frac{1}{s_n}\Big) = 1.$$

Por tanto, $\liminf_n s_n \limsup_n \frac{1}{s_n} = 1$. La otra igualdad se prueba de manera análoga. □

Ejemplo. Sea $s_n = \frac{n+1+\operatorname{sen} n}{2n+5+n\cos n}$. Entonces $\liminf_n s_n = 1/3$ y $\limsup_n s_n = 1$.

En efecto, podemos escribir esta sucesión como

$$s_n = \frac{1 + \frac{1}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n}}{2 + \frac{5}{n} + \cos n}.$$

Podemos observar que el numerador y el denominador son siempre positivos, así que

$$\begin{aligned}
\liminf_n s_n &= \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n}\Big) \cdot \liminf_n \frac{1}{2 + \frac{5}{n} + \cos n} \\
&= \frac{1}{\limsup_n (2 + \frac{5}{n} + \cos n)} \\
&= \frac{1}{\lim_n (2 + \frac{5}{n}) + \limsup_n \cos n} \\
&= \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\limsup_n s_n &= \lim_n \Big(1 + \frac{1}{n} + \frac{\operatorname{sen} n}{n}\Big) \cdot \limsup \frac{1}{2 + \frac{5}{n} + \cos n} \\
&= \frac{1}{\liminf_n (2 + \frac{5}{n} + \cos n)} \\
&= \frac{1}{\lim_n (2 + \frac{5}{n}) + \liminf_n \cos n} \\
&= \frac{1}{2-1} = 1.
\end{aligned}$$

Una relación entre límites superiores e inferiores

La siguiente relación, aunque no parezca muy útil por el momento, nos dará jugosos resultados más adelante.

Proposición 4.60. *Si* (s_n) *es una sucesión positiva, se tiene*

$$\liminf_n \frac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant \liminf_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \limsup_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \limsup_n \frac{s_{n+1}}{s_n}.$$

Demostración. Probaremos solo la tercera desigualdad, ya que la primera es análoga, y la segunda es trivial.

Si $\limsup_n(s_{n+1}/s_n) = \infty$, la desigualdad es claramente cierta, así que supongamos que $\limsup_n(s_{n+1}/s_n) = \alpha \in \mathbb{R}$. Es evidente que $\alpha \geqslant 0$. Sea $\varepsilon > 0$. Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant n_0$, entonces $s_{n+1}/s_n < \alpha + \varepsilon$. En particular, $s_{n_0+1}/s_{n_0} < \alpha + \varepsilon$, de donde

$$s_{n_0+1} < (\alpha + \varepsilon)s_{n_0}.$$

También será $s_{n_0+2}/s_{n_0+1} < \alpha + \varepsilon$, de donde

$$s_{n_0+2} < (\alpha + \varepsilon)s_{n_0+1} < (\alpha + \varepsilon)^2 s_{n_0}.$$

Realizando este proceso repetidas veces (o utilizando inducción), podemos probar que, si $n \geqslant n_0$, es

$$s_n \leqslant (\alpha + \varepsilon)^{n-n_0} s_{n_0} = \frac{s_{n_0}}{(\alpha + \varepsilon)^{n_0}}(\alpha + \varepsilon)^n.$$

Por tanto,

$$\sqrt[n]{s_n} \leqslant \left(\frac{s_{n_0}}{(\alpha + \varepsilon)^{n_0}}\right)^{1/n}(\alpha + \varepsilon),$$

y así,

$$\limsup_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \lim_n \left(\frac{s_{n_0}}{(\alpha + \varepsilon)^{n_0}}\right)^{1/n}(\alpha + \varepsilon) = 1 \cdot (\alpha + \varepsilon) = \alpha + \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, resulta finalmente que $\limsup_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \alpha$. $\square$

Una consecuencia inmediata de la proposición anterior es que si existe el límite s_{n+1}/s_n, entonces también existe el límite de $\sqrt[n]{s_n}$ y coincide con el anterior.

Corolario 4.61. *Sea* (s_n) *una sucesión de términos positivos. Supongamos que* $\lim_n(s_{n+1}/s_n) = l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. *Entonces también es* $\lim_n \sqrt[n]{s_n} = l$.

Demostración. En efecto, utilizando la cadena de desigualdades vistas en el resultado anterior,

$$l = \liminf_n \frac{s_{n+1}}{s_n} \leqslant \liminf_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \limsup_n \sqrt[n]{s_n} \leqslant \limsup_n \frac{s_{n+1}}{s_n} = l.$$

En consecuencia, $\liminf_n \sqrt[n]{s_n} = \limsup_n \sqrt[n]{s_n} = l$. □

Esto vuelve a la Proposición 4.61 útil a la hora de calcular límites, como se observa en los siguientes ejemplos.

Ejemplos.

- Si consideramos la sucesión constante $s_n = a$, donde $a > 0$, obtenemos

  $$\lim_n \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_n \frac{a}{a} = 1.$$

  En consecuencia, utilizando la observación precedente, se tiene de forma sencilla el hecho ya conocido de que

  $$\lim_n \sqrt[n]{a} = \lim_n \sqrt[n]{s_n} = 1.$$

- Si ahora la aplicamos a la sucesión $s_n = n$, obtenemos que

  $$\lim_n \frac{s_{n+1}}{s_n} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$$

  de donde $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

- Aplicando esta estrategia ahora a $s_n = n!$, tendremos

  $$\lim_n \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_n (n+1) = \infty.$$

  Se sigue que $\lim_n \sqrt[n]{n!} = \infty$.

- Utilizando este mismo criterio con $s_n = \binom{2n}{n}$, se obtiene

  $$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)\cdots(n+3)(n+2)}{(n+1)!}}{\frac{(2n)\cdots(n+2)(n+1)}{n!}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4.$$

  Por tanto, $\lim_n \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$.

- Sea ahora la sucesión
$$s_n = \frac{n!e^n}{n^n}.$$
Se tiene
$$\frac{s_{n+1}}{s_n} = \frac{(n+1)!e^{n+1}/(n+1)^{n+1}}{n!e^n/n^n} = \frac{e/(n+1)^n}{1/n^n} = \frac{e}{(1+1/n)^n} \to 1.$$
Por tanto,
$$\lim_n \frac{\sqrt[n]{n!}}{n/e} = \lim_n \sqrt[n]{s_n} = 1.$$
Esto nos indica que la sucesión $\sqrt[n]{n!}$ se comporta de forma muy parecida a la sucesión n/e.

5. Apéndice: Límites de sucesiones y funciones elementales

5.1. Funciones que conmutan con el límite

El límite de la función y la función del límite

Si $f(x)$ representa una cualquiera de las funciones e^x, $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\arccos x$, $\arctan x$, x^r, $|x|$, se cumple lo siguiente:

$$\text{Si } \lim_n s_n = l, \text{ entonces } \lim_n f(s_n) = f(l)$$

para cualquier punto l del dominio de la función y cualquier sucesión (s_n) contenida en el dominio de la función.

Veremos más adelante que estas funciones para las que se cumple que “el límite de la función es la función del límite” no son en absoluto casos aislados, y que realmente esta relación es cierta para una clase muy amplia de funciones (las continuas).

Otros límites

Otros límites, que se podrán justificar cuando veamos límites de funciones, son los siguientes:

- Si $\lim_n s_n = -\infty$ entonces $\lim_n e^{s_n} = 0$.
- Si $\lim_n s_n = \infty$ entonces $\lim_n e^{s_n} = \infty$.
- Si $\lim_n s_n = 0$ y $s_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n \log s_n = -\infty$.

- Si $\lim_n s_n = \infty$ y $s_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n \log s_n = \infty$.
- si $\lim_n s_n = -\infty$ entonces $\lim_n \arctan s_n = -\frac{\pi}{2}$.
- Si $\lim_n s_n = \infty$ entonces $\lim_n \arctan s_n = \frac{\pi}{2}$.
- Si $\lim_n s_n = 0$ y $s_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n s_n^r = \begin{cases} 0, & \text{si } r > 0, \\ \infty, & \text{si } r < 0. \end{cases}$
- Si $\lim_n s_n = \infty$ y $s_n > 0$ para todo n, entonces $\lim_n s_n^r = \begin{cases} \infty, & \text{si } r > 0, \\ 0, & \text{si } r < 0. \end{cases}$

5.2. Sucesiones equivalentes

¿Qué son sucesiones equivalentes?

Definición 4.62. Decimos que dos sucesiones (s_n) y (t_n) son *equivalentes* y escribimos $s_n \sim t_n$ si se verifica que $\lim_n s_n/t_n = 1$.

¿Para qué sirven?

La principal utilidad que tiene el que dos sucesiones sean equivalentes consiste en que se puede frecuentemente sustituir una por la otra al calcular un determinado límite. Concretamente,

Proposición 4.63. *Sean (s_n), (t_n) y (u_n) tres sucesiones, y supongamos que se tiene $s_n \sim t_n$. Entonces,* $\lim_n s_n u_n = \lim_n t_n u_n$.

Demostración. $\lim_n t_n u_n = \lim_n (1 \cdot t_n u_n) = \lim_n (\frac{s_n}{t_n} \cdot t_n u_n) = \lim_n s_n u_n$. □

Equivalencias habituales

Las principales equivalencias de sucesiones son:

- Si $s_n \to 0$,

$$e^{s_n} - 1 \sim s_n, \qquad \log(1 + s_n) \sim s_n,$$
$$\operatorname{sen} s_n \sim s_n, \qquad 1 - \cos s_n \sim \frac{1}{2} s_n^2,$$
$$(1 + s_n)^\alpha - 1 \sim \alpha s_n.$$

- Si $f(x) = a_r x^r + a_{r-1} x^{r-1} + \cdots + a_0$, con $a_r \neq 0$, entonces si $s_n \to \infty$,

$$f(s_n) \sim a_r s_n^r, \qquad \log f(s_n) \sim r \log s_n \quad (\text{si } a_r > 0).$$

- (Fórmula de Stirling) $\quad n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$

Ejemplos.

- Como $1/n^5 \to 0$, una de las equivalencias anteriores nos dice que
$$e^{1/n^5} - 1 \sim \frac{1}{n^5}$$
En consecuencia,
$$\lim_n (n^5(e^{1/n^5} - 1)) = \lim_n n^5 \frac{1}{n^5} = 1.$$
Debemos observar que las operaciones anteriores son una abreviatura de los siguientes cálculos:
$$\lim_n (n^5(e^{1/n^5} - 1)) = \lim_n \Big(n^5 \cdot \frac{1}{n^5} \cdot \frac{e^{1/n^5} - 1}{1/n^5} \Big) = 1 \cdot 1 = 1.$$
(Recuérdese que $e^{1/n^5} - 1 \sim 1/n^5$ no es más que otra forma de decir que $\lim_n (e^{1/n^5} - 1)/(1/n^5) = 1$.)

- Como $1/(2n^3) \to 0$, será $\operatorname{sen}(1/(2n^3)) \sim 1/(2n^3)$, de donde
$$\lim_n \Big((n^3+1) \operatorname{sen} \frac{1}{2n^3} \Big) = \lim_n \frac{n^3+1}{2n^3} = \frac{1}{2}.$$
De nuevo, este cálculo, sin utilizar el signo de equivalencia, se escribe
$$\lim_n \Big((n^3+1) \operatorname{sen} \frac{1}{2n^3} \Big) = \lim_n \left(\frac{n^3+1}{2n^3} \cdot \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2n^3}}{\frac{1}{2n^3}} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

- Calcular el límite de $\frac{e^n n!}{\sqrt{n}(n+1)^n}$.
Utilizando la Fórmula de Stirling,
$$\begin{aligned} \lim_n \frac{e^n n!}{\sqrt{n}(n+1)^n} &= \lim_n \frac{e^n n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{n}(n+1)^n} \\ &= \lim_n \frac{\sqrt{2\pi}}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}. \end{aligned}$$
Implícitamente, los cálculos que se han hecho son los que siguen:
$$\begin{aligned} \lim_n \frac{e^n n!}{\sqrt{n}(n+1)^n} &= \lim_n \frac{e^n \cdot n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} \cdot \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}}}{\sqrt{n}(n+1)^n} \\ &= \lim_n \frac{\sqrt{2\pi} \cdot 1}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{e}. \end{aligned}$$

Referencias

[1] R. G. Bartle y D. R. Sherbert, *Introducción al Análisis Matemático de una variable*, Limusa, México, 1990.

[2] M. de Guzmán y B. Rubio, *Problemas, conceptos y métodos del Análisis Matemático I*, Pirámide, 1993.

[3] K. A. Ross, *Elementary Analysis: The theory of Calculus*, Springer-Verlag, Berlín, 1980.

[4] B. Rubio, *Números y convergencia*, B. Rubio, 2006.

[5] M. Spivak, *Cálculo infinitesimal*, Reverté, 1994.