MATEMÁTICAS EMPRESARIALES I
Series de potencias

1) Determinar el intervalo de convergencia de las siguientes series de potencias

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+2}(x-4)^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^n}(2x+1)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{2n+1}}(x+6)^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{n+1}+3}{n^2+2}(x-2)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+3}(x-1)^{n+1}$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n!(2x+2)^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{4^n}(x+1)^{2n}$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n^2}x^{2n+1}$ k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{8^n}(x+2)^{3n+2}$ l) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+3}}(3x+1)^n$

Solución: a) $\mathbb{R}$ b) $(3,5)$ c) $\mathbb{R}$ d) $(-10,-2)$ e) $(-3,3)$ f) $(3/2,5/2)$ g) $(1/2,3/2)$ h) $(-1,-1)$ i) $(-3,1)$ j) $(-1/\sqrt{e},1/\sqrt{e})$ k) $(-4,0)$ l) $(-2/3,0)$.

2) Calcular el desarrollo en serie de Taylor de la función $f(x)=\frac{1}{x^2}$ en los puntos $a=1$ y $a=2$, y determinar sus intervalos de convergencia.

Solución: En $a=1$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(x-1)^n$ con intervalo de convergencia $(0,2)$. En $a=2$: $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2^{n+2}}(x-2)^n$ con intervalo de convergencia $(0,4)$.

3) (**La función exponencial)** Suponemos que $E(x)$ es una función derivable en $\mathbb{R}$ que cumple $E'(x)=E(x)$ y $E(0)=1$.

a) Demostrar que $E(-x)=1/E(x)$ para todo $x>0$. (Ayuda: derivando demostrar que $f(x)=E(x)E(-x)$ es constante).

b) Demostrar que $E(x+y)=E(x)E(y)$ para todo x,y. (Ayuda: derivando demostrar que para todo y la función $g_y(x)=E(x+y)E(-x)$ es constante).

c) Concluir de b) que $E(n\cdot x)=E(x)^n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, $x\in\mathbb{R}$.

d) Concluir de a) y b) que $E(n/m)=E(1)^{n/m}$ y $E(-n/m)=E(1)^{-n/m}$ para todo $n,m\in\mathbb{N}$ (**Ayuda:** aplicar c) a $E(n\cdot 1)=E(m\cdot(n/m))$). Concluir por continuidad que $E(x)=E(1)^x$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

e) Comprobar que la función $E(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ está definida para todo $x\in\mathbb{R}$ y cumple las condiciones $E'(x)=E(x)$ y $E(0)=1$, y concluir de d) que $E(x)=E(1)^x$ con $E(1)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.

f) Demostrar que si L denota el logaritmo con base el número $E(1)$ se tiene $L'(x)=1/x$ (**Ayuda:** derivar la identidad $E(L(x))=x$).

g) Demostrar que $e := \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = E(1)$, y por tanto $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$ y $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$.

4) a) Demostrar que $n! \leq n^n$ para $n > 1$.

b) Usando el desarrollo en serie de e^x demostrar que $e^n \geq \dfrac{n^n}{n!}$.

c) Usar a) y b) para probar que $\ln(n!) \sim n\ln(n)$ cuando $n \to \infty$.

5) Contestar **razonadamente** a las siguientes cuestiones

a) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-3)^n$ es convergente en $x=0$ y divergente en $x=6$, determinar su campo de convergencia.

b) Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x+1)^n$ es convergente en $x=1$ y divergente en $x=3$ ¿qué valores puede tomar su radio de convergencia?¿Qué caracter tiene la serie en $x=-2$? ¿y en $x=-6$?

c) Si la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ tiene radio de convergencia r, determinar el radio de convergencia de las series

c$_1$) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^n$, c$_2$) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{2n}$, c$_3$) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n x^{3n+1}$.

d) Si de una sucesión b_n sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3$, calcular el intervalo de convergencia de las siguientes series:

d$_1$) $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n)^2 x^n$, d$_2$) $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-3)^n$, d$_3$) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{5^n}(x+1)^n$.

Soluciones:

a) $[0,6)$, b) $2 \leq r \leq 4$, en $x=-2$ es convergente, en $x=-6$ es divergente. c$_1$) $r/2$, c$_2$) $\sqrt{r}$, c$_3$) $\sqrt[3]{r/2}$ d$_1$) $(-1/9, 1/9)$, d$_2$) $(0,6)$, d$_3$) $(-8/3, 2/3)$.