ECUACIONES EN DIFERENCIAS FINITAS DE PRIMER ORDEN

1) Calcular la solución de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

a) $y_{n+1} = \frac{1}{n}y_n, y_1 = A,$

b) $y_{n+1} = \frac{2}{(n+1)^2}y_n, y_1 = A,$

c) $y_{n+1} = \frac{n+1}{n-1}y_n, y_2 = A,$

d) $y_{n+1} = (y_n)^3, y_0 = A,$

e) $y_{n+1} = \sqrt{(y_n)^2 + 3}, y_0 = A.$

f) $y_{n+1} = 3(y_n)^2, y_0 = A.$

Solución: a) $y_n = \frac{A}{(n-1)!},$ b) $y_n = \frac{2^{n-1}}{(n!)^2}A,$ c) $y_n = \frac{n!}{(n-2)!}A$ d) $y_n = A^{3^n},$ e) $y_n = \sqrt{A+3n},$ f) $y_n = 3^{2^n-1}A^{2^n}.$

2) Invertimos un dinero en un depósito bancario que paga intereses cada año (con interés compuesto).

a) Si invertimos 1000 euros y después de 5 años tenemos 1500 euros en el depósito, ¿cuál es el interés anual que nos está dando el banco?

b) Si el interés es del 5% anual, ¿cuántos años tendremos que esperar para tener más del doble del dinero inicial?

c) Si el interés es del 3% anual, y después de 5 años tenemos 2000 euros en el depósito, ¿cuánto dinero invertimos inicialmente?

Solución: a) $i = \left(\frac{1500}{1000}\right)^{1/5} - 1 \simeq 0.084 = 8.4\%$ b) Tiene que ser $n \geq \frac{\ln 2}{\ln(1.05)} \simeq 14.2,$ y por tanto, a partir de 15 años. c) $\frac{2000}{1.03^5} \simeq 1725.22$ euros.

3) Calcular la solución general y la solución particular que cumple la condición inicial de las siguientes ecuaciones en diferencias finitas

a) $2y_{n+1} = y_n + 3,$ con la condición inicial $y_2 = 5.$

Solución general: $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n A + 3.$

Solución: $y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n 8 + 3.$

b) $y_{n+1} = 2y_n + 3 \cdot 2^n,$ con la condición inicial $y_1 = 1.$

Solución general: $y_n = 2^n A + \frac{3}{2}n \cdot 2^n.$

Solución: $y_n = -2^n + \frac{3}{2}n \cdot 2^n.$

c) $y_{n+1} = y_n + 3n,$ con la condición inicial $y_2 = 7.$

Solución general: $y_n = A + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$

Solución: $y_n = 4 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n.$

d) $3y_{n+1} = 2y_n + n + 5 \cdot 2^n,$ con la condición inicial $y_1 = 2.$

Solución general: $y_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n A + n - 3 + \frac{5}{4}2^n.$

Solución: $y_n = \frac{9}{4} \left(\frac{2}{3}\right)^n + n - 3 + \frac{5}{4}2^n$.

4) Nos tocan 10 millones de euros en la lotería y decidimos vivir de las rentas de la siguiente forma: Ingresamos el dinero en un depósito bancario que da un interés anual del 10%, y al inicio de cada año sacamos un millón de euros para nuestros gastos de ese año.

a) Determinar el capital del depósito pasados n años.

b) ¿Cuántos años pasarán hasta que se nos termine el dinero?

c) ¿Cuántos millones deberían habernos tocado para que nunca se nos terminara el dinero?

Solución:

a) $y_n = -(1.1)^n + 11$. b) 25 años. c) 11 millones.

5) Pedimos un préstamo a un banco por un capital inicial C . Cada año el banco nos cobra un interés anual i y al final de cada año pagamos al banco una cantidad fija d . Se pide:

a) Demostrar que si y_n es el dinero que debemos al banco después de n años, se satisface la ecuación en diferencias $y_{n+1} = (1+i)y_n - d$.

b) Calcular el valor de y_n resolviendo la ecuación en diferencias.

c) Si pedimos un préstamo de $C = 10000$ euros, con un interés $i = 5\%$ y con $d = 1000$ euros, se pide:

c₁) determinar el dinero que debemos al banco después de 10 años.

c₂) ¿Cuántos años pasarán hasta que terminemos de pagar el préstamo? ¿cuánto pagaremos el último año?

d) Si $C = 10000$ euros, $i = 5\%$ y queremos terminar de pagar el préstamo en 10 años, calcular el valor de la cuota anual d . Cuando terminemos de pagar el préstamo, ¿cuánto dinero en total habremos pagado al banco?

Solución:

b) $y_n = (1+i)^n \left(C - \frac{d}{i}\right) + \frac{d}{i}$. c₁) $y_{10} = 3711$ euros, c₂) 15 años (el último año sólo tendríamos que pagar 210.7 euros para cancelar el préstamo). d) $d = 1295$ euros. Pagaremos en total $1295 \cdot 10 = 12950$.

6) (Modelo de la telaraña) Supongamos que la oferta O y la demanda D de un bien vienen dadas por las siguientes funciones del precio P del bien:

$$O(P) = aP + b$$

$$D(P) = -cP + d$$

con $a, b, c, d > 0$. Se supone el precio cambia cada año y que la oferta de

un año viene determinada por el precio del año anterior $O_n = O(P_{n-1})$, mientras que la demanda depende del precio actual $D_n = D(P_n)$. Además el precio se determina por la condición de equilibrio $D_n = O_n$. Se pide:

- a) Demostrar que el precio sigue la ecuación recurrente $P_n = -\frac{a}{c}P_{n-1} + \frac{d-b}{c}$.
- b) Calcular el precio de equilibrio P_E , es decir, la solución de la ecuación $O(P_E) = D(P_E)$.
- c) Resolver la ecuación en diferencias del apartado a).
- d) ¿Qué relación tienen que cumplir a y c para que el precio converja al precio de equilibrio P_E cuando $n \rightarrow \infty$?

Solución:

b) $P_E = \frac{d-b}{a+c}$, c) $P_n = \left(-\frac{a}{c}\right)^n A + \frac{d-b}{a+c}$, d) $a < c$.

- 7) Consideremos el siguiente algoritmo para ordenar n números $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$.

Comparamos el primer y segundo números, y los reordenamos en orden creciente. Después comparamos el segundo y el tercero y los reordenamos, después el tercero y el cuarto, y así hasta llegar al último. Tras este proceso sabemos que el número más alto está en el último lugar. Eliminamos el último número y repetimos el proceso con los $n - 1$ números restantes. Si denotamos por c_n el número de comparaciones necesarias para ordenar n números mediante este método, demostrar que se cumple la ecuación recurrente $c_{n+1} = c_n + n$ con la condición inicial $c_1 = 0$. Determinar el valor de c_n resolviendo la ecuación.

Solución: $c_n = \frac{n^2-n}{2}$.