

TEMA 2

MODULACIONES DIGITALES LINEALES

- 2.1 Modulaciones lineales (PAM) paso bajo
 - ▶ 2.1.1. Espectro de PAM banda base
 - ▶ 2.1.2. Transmisión con ruido gaussiano
 - ▶ 2.1.3. Canal discreto equivalente
- 2.2. Criterio de Nyquist
- 2.3. Transmisión PAM sobre canales lineales
- 2.4. Diagrama de ojo
- 2.5. Modulación lineales (PAM) paso banda

2.1. Modulaciones lineales paso bajo

- Modulación lineal en espacio multidimensional (N)

$$s(t) = \sum_n \sum_{j=0}^{N-1} A_j[n] \cdot \phi_j(t - nT_s)$$

- ▶ La información se transporta linealmente
 - ★ En la amplitud de las funciones $\phi_j(t)$
- ▶ Codificador: $\mathbf{A}[n]$
 - ★ Constelación en espacio de dimensión N
 - ★ Diseño considerando una **energía de símbolo** E_s para **minimizar** la probabilidad de error de símbolo P_e
- ▶ Modulador: $\{\phi_j(t)\}_{j=0}^{N-1}$
 - ★ Adecuación al canal
 - ★ Idealmente: canal aditivo gaussiano

Modulación PAM en banda base

- Modulación unidimensional $N = 1$.

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

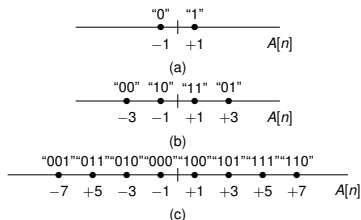
PAM (*Pulse Amplitude Modulation*)

ASK (*Amplitude Shift Keying*)

- Modelo general de constelaciones **unidimensionales**:

$$A[n] \in \{\pm 1, \pm 3, \dots, \pm(M-1)\}$$

- Ejemplos: 2-PAM (a), 4-PAM (b), 8-PAM (c)

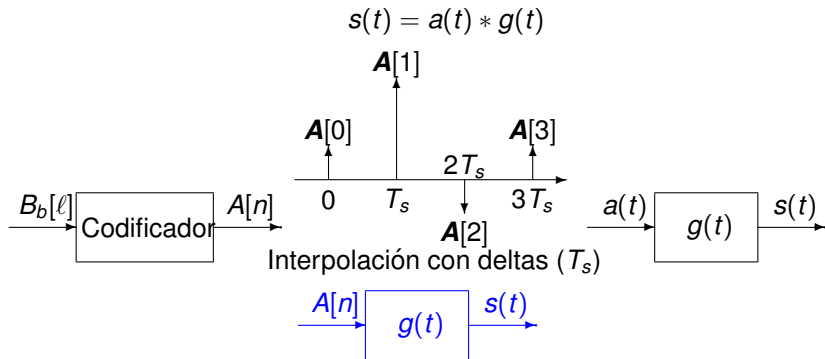


Modulación PAM como filtrado

- Señal de símbolos

$$a(t) = \sum_n A[n] \cdot \delta(t - nT_s)$$

- Generación de la señal PAM



Representación simplificada equivalente

Elección de $g(t)$

- La respuesta $g(t)$ recibe dos nombres:
 - ▶ Filtro transmisor
 - ▶ Pulso conformador (aunque no sea un pulso)

Elección de $g(t)$

- La respuesta $g(t)$ recibe dos nombres:
 - ▶ Filtro transmisor
 - ▶ Pulso conformador (aunque no sea un pulso)
- Selección para poder recuperar la secuencia de símbolos

Elección de $g(t)$

- La respuesta $g(t)$ recibe dos nombres:
 - ▶ Filtro transmisor
 - ▶ Pulso conformador (aunque no sea un pulso)
- Selección para poder recuperar la secuencia de símbolos
 - ▶ Pulsos de duración limitada al tiempo de símbolo
 - ★ No hay solapamiento

$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Elección de $g(t)$

- La respuesta $g(t)$ recibe dos nombres:
 - ▶ Filtro transmisor
 - ▶ Pulso conformador (aunque no sea un pulso)
- Selección para poder recuperar la secuencia de símbolos
 - ▶ Pulsos de duración limitada al tiempo de símbolo
 - ★ No hay solapamiento

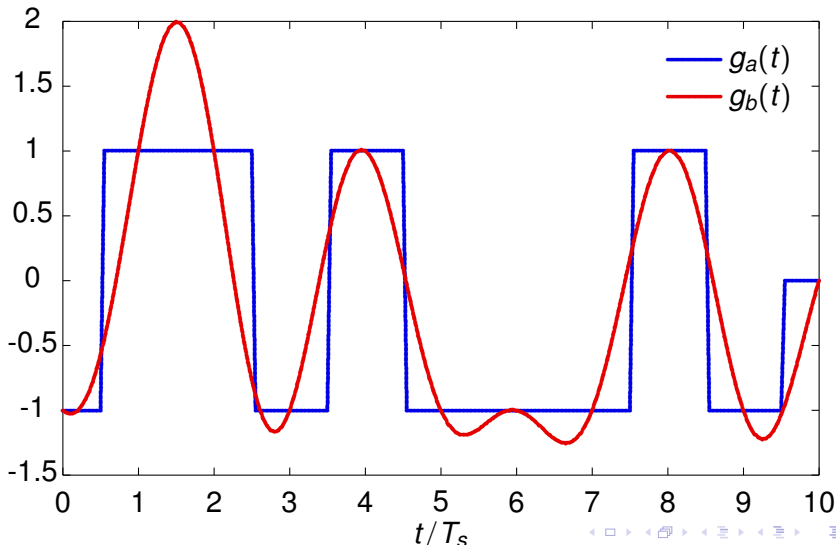
$$g_a(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \cdot \Pi\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

- ▶ Pulsos de mayor duración
 - ★ Interferencia no destructiva en algún punto

$$g_b(t) = \frac{1}{\sqrt{T_s}} \cdot \text{sinc}\left(\frac{t}{T_s}\right)$$

Formas de onda

● Secuencia: $A[n] = \dots, -1, +1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, +1, -1, \dots$



2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de **variables aleatorias** (proceso aleatorio)

2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de **variables aleatorias** (proceso aleatorio)
 - ▶ **Media:** $E[A[n]] = m$

2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de **variables aleatorias** (proceso aleatorio)
 - ▶ **Media:** $E[A[n]] = m$
 - ▶ **Energía:** $E[|A[n]|^2] = E_s$

2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de **variables aleatorias** (proceso aleatorio)
 - ▶ **Media:** $E[A[n]] = m$
 - ▶ **Energía:** $E[|A[n]|^2] = E_s$
 - ▶ **Autocorrelación:** $E[A[k] \cdot A^*[j]] = R_A[k - j] = R_A[j - k] = R_A[n]$

2.1.1. Espectro de PAM banda base

- Señal PAM banda base

$$s(t) = \sum_n A[n] \cdot g(t - nT_s)$$

- Sea $\{A[n]\}_{n=-\infty}^{\infty}$ una secuencia de **variables aleatorias** (proceso aleatorio)
 - ▶ **Media:** $E[A[n]] = m$
 - ▶ **Energía:** $E[|A[n]|^2] = E_s$
 - ▶ **Autocorrelación:** $E[A[k] \cdot A^*[j]] = R_A[k - j] = R_A[j - k] = R_A[n]$

La **densidad espectral de potencia** (dep) de $A[n]$ es,

$$S_A(e^{j\omega}) = TF[R_A[n]] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_A[n] \cdot e^{-j\omega n}$$

(Teorema de Wiener-Khinchin)

Densidad espectral de potencia de $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot S_A(e^{j\omega T_s}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

Densidad espectral de potencia de $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot S_A(e^{j\omega T_s}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Dos contribuciones:

- ▶ Una componente **determinista**: $|G(j\omega)|^2$, transformada del filtro transmisor (o pulso conformador) $g(t)$.

Densidad espectral de potencia de $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot S_A(e^{j\omega T_s}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Dos contribuciones:

- ▶ Una componente **determinista**: $|G(j\omega)|^2$, transformada del filtro transmisor (o pulso conformador) $g(t)$.
- ▶ Una componente **estadística**: $S_A(e^{j\omega})$, DEP de $A[n]$

Densidad espectral de potencia de $s(t)$

$$S_s(j\omega) = \frac{1}{T_s} \cdot S_A(e^{j\omega T_s}) \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Dos contribuciones:

- ▶ Una componente **determinista**: $|G(j\omega)|^2$, transformada del filtro transmisor (o pulso conformador) $g(t)$.
- ▶ Una componente **estadística**: $S_A(e^{j\omega})$, DEP de $A[n]$

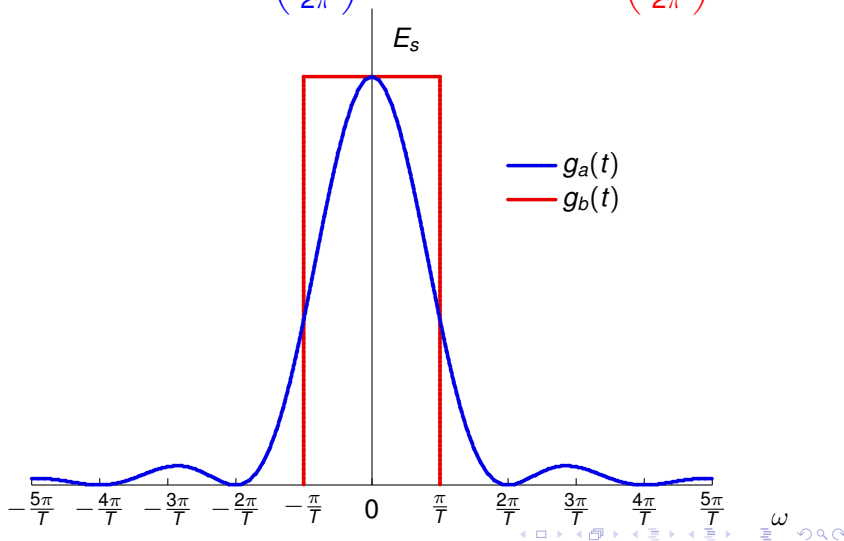
- Para secuencias $A[n]$ blancas

$$R_A[n] = E_s \cdot \delta[n] \quad \Rightarrow \quad S_A(e^{j\omega}) = E_s = E \left\{ |A[n]|^2 \right\}$$

$$S_s(j\omega) = \frac{E_s}{T_s} \cdot |G(j\omega)|^2$$

Espectro para secuencias blancas

$$G_a(j\omega) = \sqrt{T_s} \cdot \text{sinc}\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right), \quad G_b(j\omega) = \sqrt{T_s} \cdot \Pi\left(\frac{\omega T_s}{2\pi}\right)$$



Potencia de una PAM banda base

- La potencia de $s(t)$ se calcula mediante $S_s(j\omega)$

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_s(j\omega) \cdot d\omega$$

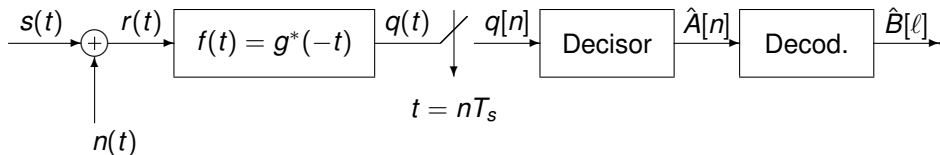
- Para una secuencia blanca de símbolos

$$P = \frac{E_s}{T_s} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 \cdot d\omega$$

- Si $g(t)$ está normalizado, aplicando la relación de Parseval

$$P = \frac{E_s}{T_s} = E_s R_s \Rightarrow \text{Intuitivo!}$$

2.1.2. Transmisión sobre canales gaussianos



- Como $g(t)$ es real, $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$. La señal recibida es

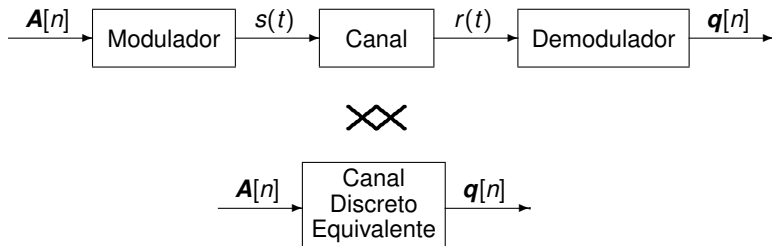
$$r(t) = s(t) + n(t)$$

- La señal a la entrada del muestreador es

$$q(t) = s(t) * g(-t) + n(t) * g(-t)$$

- $n(t)$: ruido blanco, gaussiano, de media nula, $S_n(j\omega) = N_0/2$.

2.1.3. Canal discreto equivalente



- En sistemas **ideales**

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A}[n] + \mathbf{z}[n]$$

- Distribución gaussiana de las observaciones (condicionando a $\mathbf{A}[n] = \mathbf{a}_i$)

$$f_{\mathbf{q}[n]|\mathbf{A}[n]}(\mathbf{q}|\mathbf{a}_i) = \frac{1}{(\pi N_0)^{N/2}} e^{-\frac{\|\mathbf{q}-\mathbf{a}_i\|^2}{N_0}}$$

Canal discreto equivalente (II)

- Señal antes del muestreador

$$\begin{aligned}q(t) &= \left(\sum_k A[k] \cdot g(t - kT_s) \right) * g(-t) + n(t) * g(-t) \\ &= \sum_k A[k] \cdot \left(g(t - kT_s) * g(-t) \right) + n(t) * g(-t) \\ &= \sum_k A[k] \cdot p(t - kT_s) + z(t)\end{aligned}$$

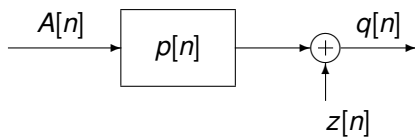
- $p(t) = g(t) * g(-t)$: **respuesta conjunta** de los pulsos transmisor y receptor
- Observación a la salida del demodulador

$$q[n] = q(t)|_{t=nT_s} = \sum_k A[k] \cdot p((n - k)T_s) + z(nT_s)$$

Canal discreto equivalente (III)

- Definición de canal discreto equivalente

$$q[n] = \sum_k A[k] \cdot p[n - k] + z[n] = A[n] * p[n] + z[n]$$

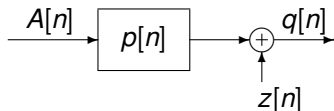


Interferencia intersimbólica (ISI)

- Definición del canal discreto equivalente $p[n]$

$$p[n] = p(t)|_{t=nT} \quad q[n] = o[n] + z[n]$$

$$\text{Salida sin ruido } o[n] = \sum_k A[k] p[n - k] = A[n] * p[n]$$



- Ideal

$$p[n] = \delta[n] \rightarrow o[n] = A[n]$$

- Real: Interferencia entre símbolos (ISI)

$$o[n] = A[n] * p[n] = \sum_k A[k] p[n - k] = \underbrace{A[n]}_{\text{Ideal}} \underbrace{p[0]}_{\text{escalado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n - k]}_{\text{ISI}}$$

Interferencia intersimbólica - Análisis

- Interferencia entre símbolos para el canal discreto $p[n]$

$$o[n] = \underbrace{\underbrace{A[n]}_{\text{Ideal}} \underbrace{p[0]}_{\text{escalado}}}_{\text{deseado}} + \underbrace{\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]}_{\text{interferencia (ISI)}}$$

- ▶ Efecto de la interferencia entre símbolos

$$\text{ISI} = \sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k] p[n-k]$$

Contribución en el instante discreto n de símbolos anteriores y posteriores

$$o[n] = \underbrace{\dots + A[n-2] p[2] + A[n-1] p[1]}_{\text{ISI precursora}} + \underbrace{A[n] p[0]}_{\text{cursor}} + \underbrace{A[n+1] p[-1] + A[n+2] p[-2] + \dots}_{\text{ISI postcursora}}$$

ISI - Efecto : Constelación extendida

- ISI produce una constelación extendida en el receptor

Valores de la salida discreta sin ruido $o[n] = A[n] * p[n]$

- Ejemplo: modulación 2-PAM ($A[n] \in \{\pm 1\}$)

Canal A

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n-1]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{4}A[n-1]$$

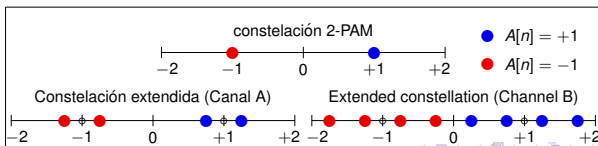
$A[n]$	$A[n-1]$	$o[n]$
+1	+1	+1.25
+1	-1	+0.75
-1	+1	-0.75
-1	-1	-1.25

Canal B

$$p[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$$

$$o[n] = A[n] + \frac{1}{2}A[n-1] + \frac{1}{4}A[n-2]$$

$A[n]$	$A[n-1]$	$A[n-2]$	$o[n]$
+1	+1	+1	+1.75
+1	+1	-1	+1.5
+1	-1	+1	+1.25
+1	-1	-1	+1
-1	+1	+1	-1.25
-1	+1	-1	-1.5
-1	-1	+1	-1.75
-1	-1	-1	-2



ISI : respuesta conjunta transmisor-canal-receptor

$p(t)$

- La respuesta $p(t)$ determina el comportamiento de la ISI
 - ▶ La salida sin ruido depende del valor de $p[n]$, obtenida muestreando la respuesta conjunta transmisor-canal-receptor $p(t)$
- Definición de respuesta conjunta transmisor-canal-receptor
 - ▶ Canal gaussiano

$$p(t) = g(t) * f(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = G(j\omega) F(j\omega)$$

- Receptor habitual: filtro adaptado $f(t) = g^*(-t) = g(-t)$
 - ▶ Canal gaussiano

$$p(t) = r_g(t) \quad \overset{TF}{\leftrightarrow} \quad P(j\omega) = |G(j\omega)|^2$$

2.2. Criterio de Nyquist

- Objetivo: Evitar **Interferencia Intersimbólica**

2.2. Criterio de Nyquist

- Objetivo: Evitar **Interferencia Intersimbólica**
- En el dominio del tiempo

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT_s} = \delta[n]$$

2.2. Criterio de Nyquist

- Objetivo: Evitar **Interferencia Intersimbólica**
- En el dominio del tiempo

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT_s} = \delta[n]$$

- En el dominio de la frecuencia

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \delta(t)$$

2.2. Criterio de Nyquist

- Objetivo: Evitar **Interferencia Intersimbólica**
- En el dominio del tiempo

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT_s} = \delta[n]$$

- En el dominio de la frecuencia

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \delta(t)$$

$$P(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = 1$$

2.2. Criterio de Nyquist

- Objetivo: Evitar **Interferencia Intersimbólica**
- En el dominio del tiempo

$$p[n] = p(t) \Big|_{t=nT_s} = \delta[n]$$

- En el dominio de la frecuencia

$$p(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \delta(t)$$

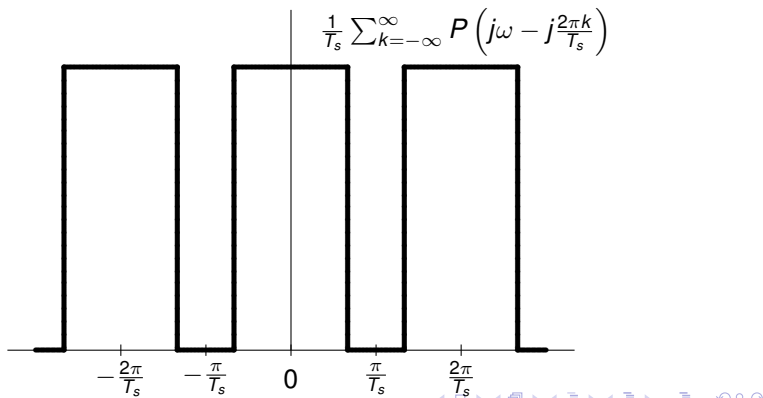
$$P(j\omega) * \frac{2\pi}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = 1$$

$$\frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} P\left(j\omega - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = 1$$

Ejemplo: pulsos limitados en banda

$$P(j\omega) = \Pi\left(\frac{\omega}{2W}\right) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & |\omega| > W \end{cases}$$

- Ejemplo: para $W < \frac{\pi}{T_s}$



Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

$$W = n \cdot \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

$$W = n \cdot \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- ▶ Lo que equivale, en el **dominio temporal**, a funciones del tipo

$$p(t) = \text{sinc} \left(n \frac{t}{T_s} \right)$$

Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

$$W = n \cdot \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- ▶ Lo que equivale, en el **dominio temporal**, a funciones del tipo

$$p(t) = \text{sinc} \left(n \frac{t}{T_s} \right)$$

- ▶ **Mínimo ancho de banda** para transmisión sin ISI a $R_s = \frac{1}{T_s}$ simb./s

$$W_{min} = \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

$$W = n \cdot \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- ▶ Lo que equivale, en el **dominio temporal**, a funciones del tipo

$$p(t) = \text{sinc} \left(n \frac{t}{T_s} \right)$$

- ▶ **Mínimo ancho de banda** para transmisión sin ISI a $R_s = \frac{1}{T_s}$ simb./s

$$W_{min} = \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- Dado un ancho de banda W , el período de símbolo y la velocidad son:

Ejemplo: pulsos limitados en banda (II)

- Dada una R_s , pulsos válidos de **ancho de banda**:

$$W = n \cdot \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- ▶ Lo que equivale, en el **dominio temporal**, a funciones del tipo

$$p(t) = \text{sinc} \left(n \frac{t}{T_s} \right)$$

- ▶ **Mínimo ancho de banda** para transmisión sin ISI a $R_s = \frac{1}{T_s}$ simb./s

$$W_{min} = \frac{\pi}{T_s} \text{ rad/s}$$

- Dado un ancho de banda W , el período de símbolo y la velocidad son:

$$T_s = n \cdot \frac{\pi}{W}, \quad R_s = \frac{W}{n\pi}$$

- ▶ **Máxima velocidad sin ISI** sobre un ancho de banda W rad/s

$$R_s|_{max} = \frac{W}{\pi} \text{ baudios (símbolos/s)}$$

Procedimiento general para diseñar $g(t)$

- Procedimiento general para diseñar el filtro transmisor del modulador $g(t)$:

Procedimiento general para diseñar $g(t)$

- Procedimiento general para diseñar el filtro transmisor del modulador $g(t)$:
 - 1 Diseñar $p(t)$ para que cumpla Nyquist a período T_s y calcular $P(j\omega)$.

Procedimiento general para diseñar $g(t)$

- Procedimiento general para diseñar el filtro transmisor del modulador $g(t)$:
 - 1 Diseñar $p(t)$ para que cumpla Nyquist a período T_s y calcular $P(j\omega)$.
 - 2 Hacer $G(j\omega) = \sqrt{P(j\omega)}$

Procedimiento general para diseñar $g(t)$

- Procedimiento general para diseñar el filtro transmisor del modulador $g(t)$:
 - 1 Diseñar $p(t)$ para que cumpla Nyquist a período T_s y calcular $P(j\omega)$.
 - 2 Hacer $G(j\omega) = \sqrt{P(j\omega)}$
 - 3 $g(t) = TF^{-1} \{G(j\omega)\}$

Pulsos en coseno alzado

- Expresión del pulso

$$p(t) = \left(\frac{\text{sen}(\pi t/T_s)}{\pi t/T_s} \right) \left(\frac{\cos(\alpha \pi t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2} \right)$$

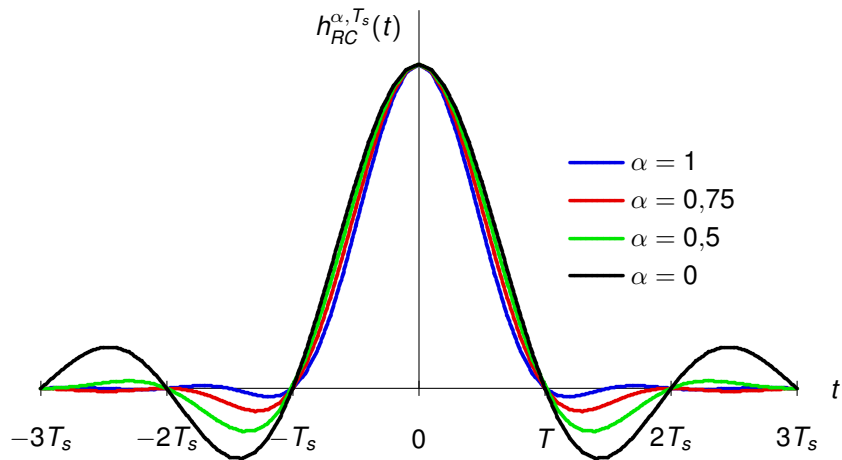
- Transformada de Fourier

$$P(j\omega) = \begin{cases} T_s & 0 \leq |\omega| < (1 - \alpha) \frac{\pi}{T_s} \\ \frac{T_s}{2} \left[1 - \text{sen} \left(\frac{T_s}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T_s} \right) \right) \right] & (1 - \alpha) \frac{\pi}{T_s} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

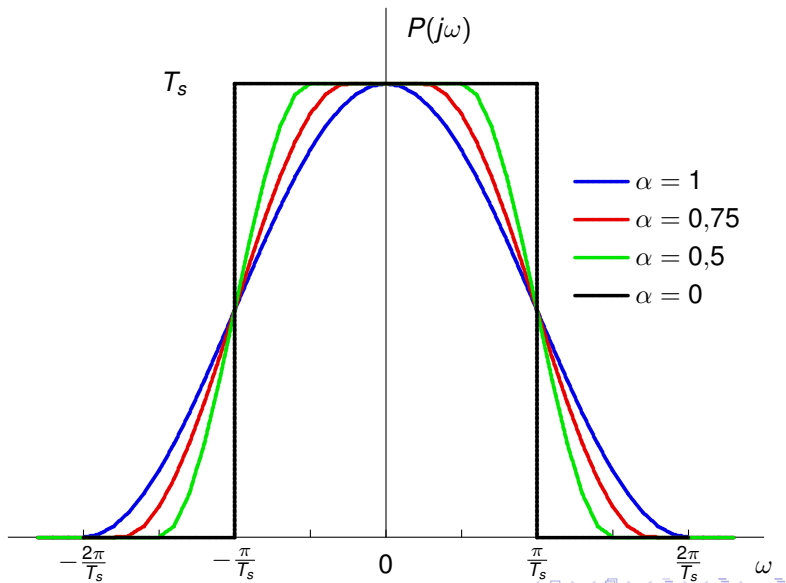
- Ancho de banda

$$W = (1 + \alpha) \frac{\pi}{T_s}, \text{ donde } 0 \leq \alpha \leq 1 \text{ es el factor de roll-off}$$

Pulsos en coseno alzado: $p(t)$



Pulsos en coseno alzado: $P(j\omega)$



Pulsos en raíz de coseno alzado

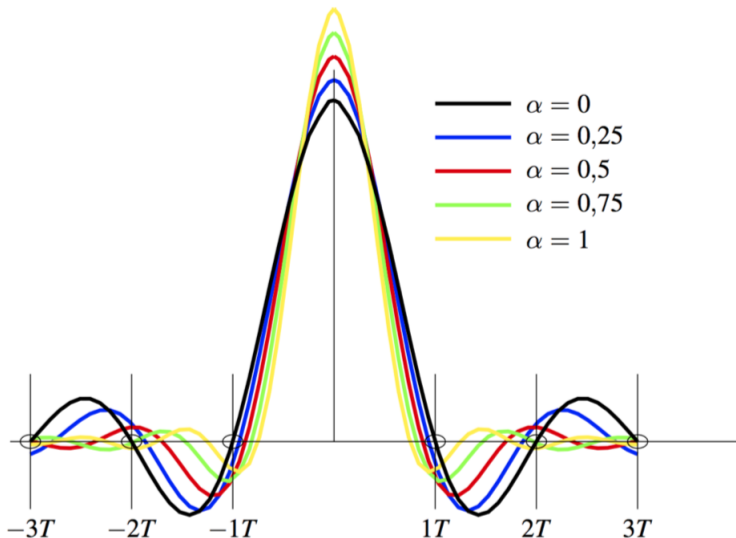
- Pulsos en raíz de coseno alzado (dominio de la frecuencia)

$$G(j\omega) = \begin{cases} \sqrt{T_s} & 0 \leq |\omega| < (1 - \alpha) \frac{\pi}{T_s} \\ \frac{\sqrt{T_s}}{2} \left[1 + \cos \left(\frac{T_s}{2\alpha} \left(|\omega| - \frac{\pi}{T_s} (1 - \alpha) \right) \right) \right] & (1 - \alpha) \frac{\pi}{T_s} \leq |\omega| \leq (1 + \alpha) \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & |\omega| > (1 + \alpha) \frac{\pi}{T_s} \end{cases}$$

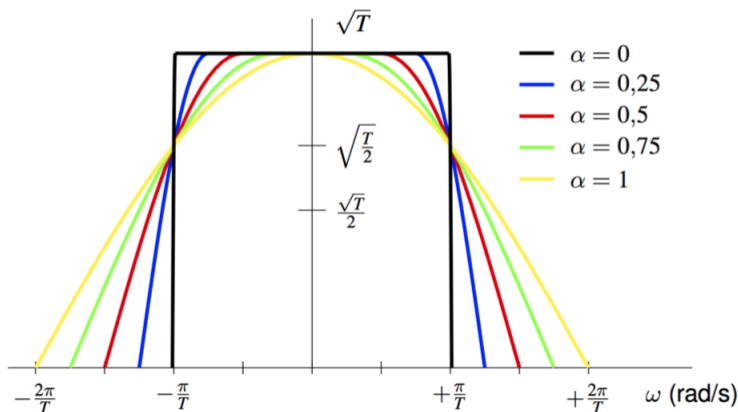
- Pulsos en raíz de coseno alzado (dominio del tiempo)

$$g(t) = \frac{4\alpha}{\pi\sqrt{T_s}} \frac{\cos \left((1 + \alpha) \frac{\pi t}{T_s} \right) + T_s \frac{\text{sen} \left((1 - \alpha) \frac{\pi t}{T_s} \right)}{4\alpha t}}{1 - \left(\frac{4\alpha t}{T_s} \right)^2}$$

Pulsos en raíz de coseno alzado: $g(t)$



Pulsos en raíz de coseno alzado: $G(j\omega)$



Relación espectro continuo/discreto

- Relación señal continua $x(t)$ y discreta $x[n]$ muestreada a T_s seg.

$$x[n] = x(t)|_{t=nT_s} = x(nT_s)$$

- Normalmente se emplea la notación

- ▶ $X(j\omega)$: espectro de $x(t)$
- ▶ $X(e^{j\omega})$: espectro de $x[n]$

- La relación entre ambos es la siguiente

- ▶ Para pasar de **continuo a discreto**

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T_s} \cdot \sum_k X\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right)$$

- ▶ Para pasar de **discreto a continuo**

$$X(j\omega) = T_s \cdot X(e^{j\omega T_s})$$

2.2.2 Consecuencias del Criterio de Nyquist

2.2.2 Consecuencias del Criterio de Nyquist

- El ruido a la salida del filtro adaptado: ruido coloreado

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |G(j\omega)|^2$$

2.2.2 Consecuencias del Criterio de Nyquist

- El ruido a la salida del filtro adaptado: ruido coloreado

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Ruido a la salida del demodulador

$$\begin{aligned} S_z(e^{j\omega}) &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k \left| G\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \right|^2 \\ &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

2.2.2 Consecuencias del Criterio de Nyquist

- El ruido a la salida del filtro adaptado: ruido coloreado

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Ruido a la salida del demodulador

$$\begin{aligned} S_z(e^{j\omega}) &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k \left| G\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \right|^2 \\ &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

- Si se cumple el Criterio de Nyquist $z[n]$ es blanca !!!

$$\frac{1}{T_s} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = \text{constante.}$$

2.2.2 Consecuencias del Criterio de Nyquist

- El ruido a la salida del filtro adaptado: ruido coloreado

$$S_z(j\omega) = S_n(j\omega) \cdot |G(j\omega)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot |G(j\omega)|^2$$

- Ruido a la salida del demodulador

$$\begin{aligned} S_z(e^{j\omega}) &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k \left| G\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \right|^2 \\ &= \frac{N_0}{2T_s} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) \end{aligned}$$

- Si se cumple el Criterio de Nyquist $z[n]$ es blanca !!!

$$\frac{1}{T_s} \sum_k P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right) = \text{constante.}$$

- Estas expresiones son válidas si no hay canal $h(t)$ y el canal equivalente es de la forma $p(t) = g(t) * g(-t)$

Relación señal a ruido

- Si se satisface el criterio de Nyquist, la señal recibida es

$$q[n] = A[n] + z[n]$$

- En este caso, la relación señal a ruido es

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{E\{|A[n]|^2\}}{\sigma_z^2} = \frac{E_s}{\sigma_z^2}$$

- ▶ σ_z^2 es la varianza o potencia del ruido $z[n]$

$$\sigma_z^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_z(e^{j\omega}) d\omega$$

- ▶ Si se cumple el criterio de **Nyquist** (con $p[0] = 1$) y **no** hay **ISI**, entonces $S_z(e^{j\omega}) = N_0/2$ y por tanto:

$$\sigma_z^2 = \frac{N_0}{2}$$

Cálculo de probabilidades de error

- Probabilidad de error de símbolo

$$Pe = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot P_{e|a_i}$$

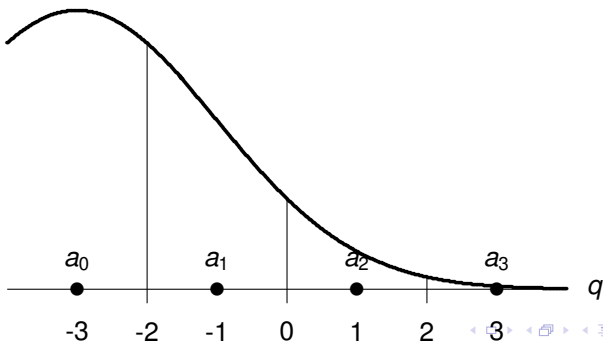
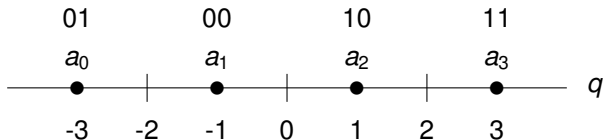
$$P_{e|a_i} = \int_{q \notin I_i} f_{q|A}(q|a_i) dq$$

- Probabilidad de error de bit

$$BER = \sum_{i=0}^{M-1} p_A(a_i) \cdot BER_{a_i}$$

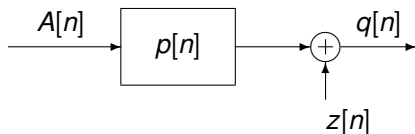
$$BER_{a_i} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{M-1} P_{e|a_i \rightarrow a_j} \cdot \frac{m_{e|a_i \rightarrow a_j}}{m}$$

Ejemplo 2: Cálculo de la $P_{e|a_0}$ y de la BER_{a_0}



2.3 Transmisión PAM sobre canales lineales

- Canal discreto equivalente, similar al caso sin canal



$$p(t) = g(t) * \mathbf{h}(t) * g(-t)$$

$$p[n] = p(nT_s) = (g(t) * \mathbf{h}(t) * g(-t)) \Big|_{t=nT_s}$$

$$P(j\omega) = G(j\omega)\mathbf{H}(j\omega)G^*(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega) |G(j\omega)|^2$$

- Criterio de Nyquist

- ▶ Debe cumplirlo el nuevo $p[n]$ (o $P(j\omega)$)

Eliminación de la ISI

- 1 Diseñar el pulso $p(t)$ para cumplir Nyquist a período de símbolo T_s . Calcular su transformada $p(t) \xrightarrow{\text{TF}} P(j\omega)$
- 2 Calcular

$$G(j\omega) = \begin{cases} \left(\frac{P(j\omega)}{H(j\omega)} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{si } H(j\omega) \neq 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De esta forma el filtro receptor está adaptado al utilizado en transmisión.

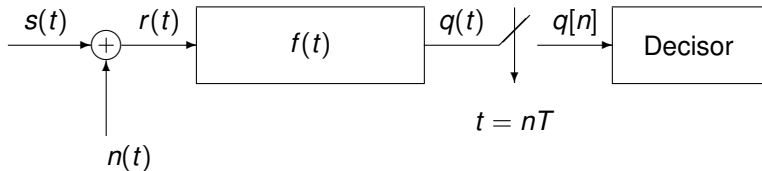
Eliminación de la ISI - Problemas

- Hay que conocer la respuesta del canal, $H(j\omega)$
 - ▶ Puede ser difícil
 - ▶ El canal puede ser variante
- El ruido deja de ser blanco

$$S_z(e^{j\omega}) = \frac{N_0}{2T_s} \sum_k \left| \frac{P\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right)}{H\left(j\frac{\omega}{T_s} - j\frac{2\pi k}{T_s}\right)} \right|$$

- ▶ El decisor símbolo a símbolo no es óptimo
- ▶ Es preciso utilizar toda la secuencia $q[n]$ para estimar el símbolo $A[n_0]$
- ▶ Se puede amplificar el ruido

Filtro receptor genérico



$$p(t) = g(t) * h(t) * f(t)$$

$$p[n] = p(nT_s) = (g(t) * h(t) * f(t)) \Big|_{t=nT_s}$$

$$P(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)F(j\omega)$$

$$z(t) = n(t) * f(t)$$

Criterios de diseño de $f(t)$

- Filtro adaptado a la **respuesta conjunta** de transmisor y canal

$$g_r(t) = g(t) * h(t), \quad f(t) = g_r(-t)$$

Criterios de diseño de $f(t)$

- Filtro adaptado a la **respuesta conjunta** de transmisor y canal

$$g_r(t) = g(t) * h(t), \quad f(t) = g_r(-t)$$

- ▶ Maximiza la relación señal a ruido

Criterios de diseño de $f(t)$

- Filtro adaptado a la **respuesta conjunta** de transmisor y canal

$$g_r(t) = g(t) * h(t), \quad f(t) = g_r(-t)$$

- ▶ Maximiza la relación señal a ruido
- ▶ No garantiza la ausencia de ISI y el ruido no es blanco

Criterios de diseño de $f(t)$

- Filtro adaptado a la **respuesta conjunta** de transmisor y canal

$$g_r(t) = g(t) * h(t), \quad f(t) = g_r(-t)$$

- ▶ Maximiza la relación señal a ruido
 - ▶ No garantiza la ausencia de ISI y el ruido no es blanco
- Eliminación de la ISI y reducción del ruido es un problema acoplado:
Criterio MMSE: maximizar

$$SNR = \frac{E \left\{ (A[n]p[0])^2 \right\}}{E \left\{ \left(\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k]p[n-k] + z[n] \right)^2 \right\}}$$

Criterios de diseño de $f(t)$

- Filtro adaptado a la **respuesta conjunta** de transmisor y canal

$$g_r(t) = g(t) * h(t), \quad f(t) = g_r(-t)$$

- ▶ Maximiza la relación señal a ruido
- ▶ No garantiza la ausencia de ISI y el ruido no es blanco
- Eliminación de la ISI y reducción del ruido es un problema acoplado:
Criterio MMSE: maximizar

$$SNR = \frac{E \left\{ (A[n]p[0])^2 \right\}}{E \left\{ \left(\sum_{\substack{k \\ k \neq n}} A[k]p[n-k] + z[n] \right)^2 \right\}}$$

- Pero con ISI no podemos detectar los símbolos independientemente...
→ Tema 4 (Algoritmo de Viterbi)

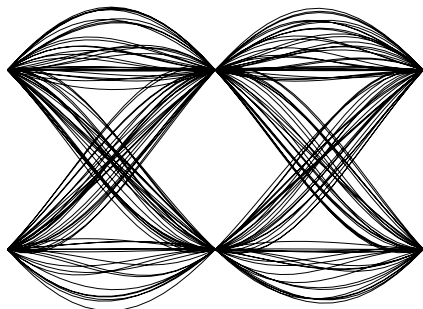
2.4. Diagrama de Ojo

- Herramienta de visualización del sistema
 - ▶ Superposición de formas de onda en torno al punto de muestreo
 - ▶ Duración: $2T_s$

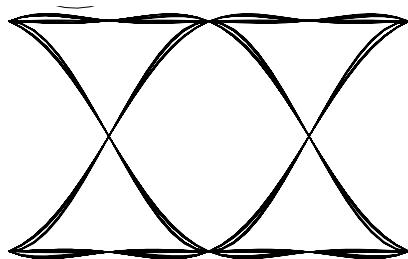
2.4. Diagrama de Ojo

- Herramienta de visualización del sistema
 - ▶ Superposición de formas de onda en torno al punto de muestreo
 - ▶ Duración: $2T_s$
- Permite detectar varios problemas:
 - ▶ Problemas/sensibilidad al sincronismo
 - ▶ Nivel de ruido
 - ▶ Presencia (y nivel) de la ISI

Diagrama de ojo

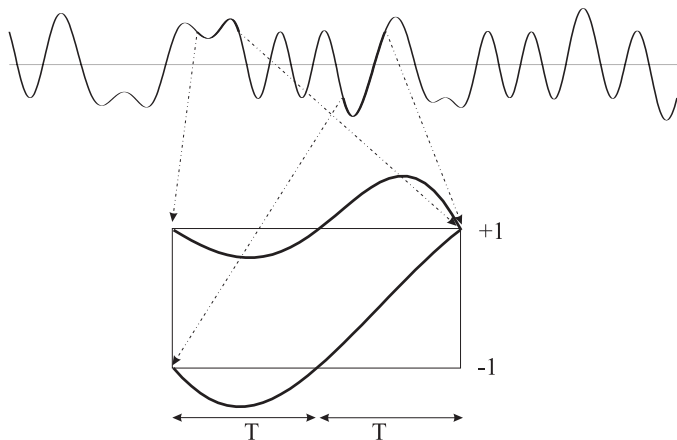


Factor de caída $\alpha = 0,35$



Factor de caída $\alpha = 1$

Diagrama de ojo: Idea



Idea: Dibujar la señal de 2 en 2 periodos.

Diagrama de ojo - 4-PAM y $\alpha = 0$

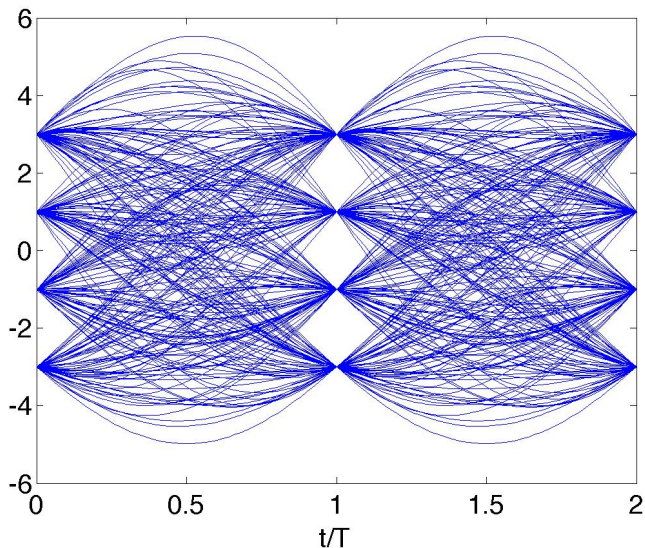


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,25$

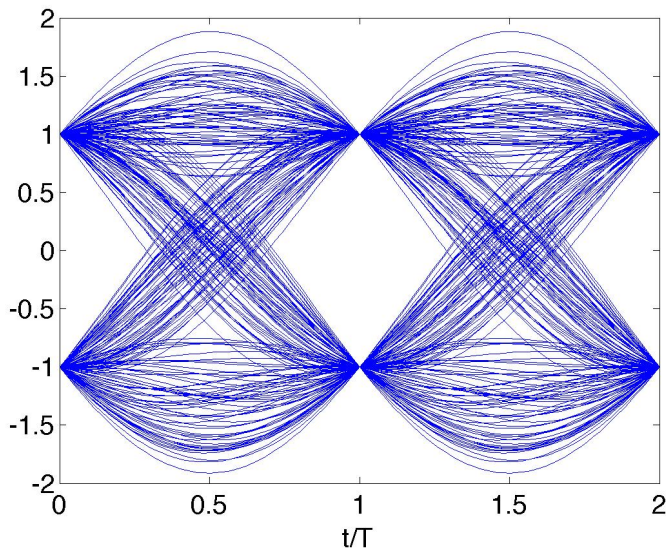


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,75$

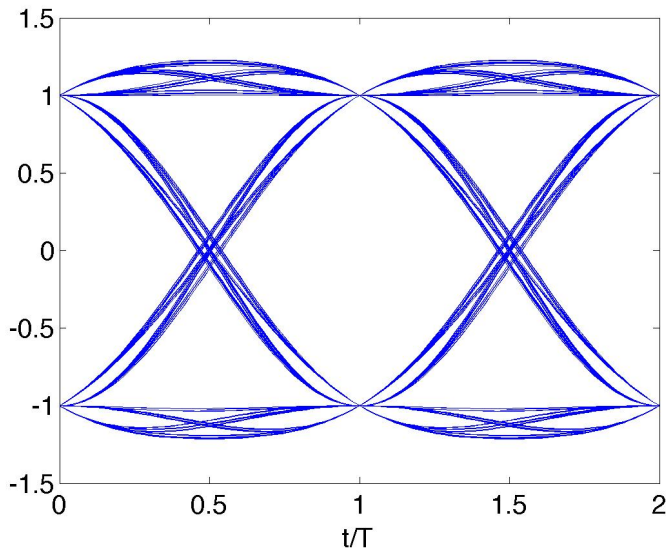


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 1$

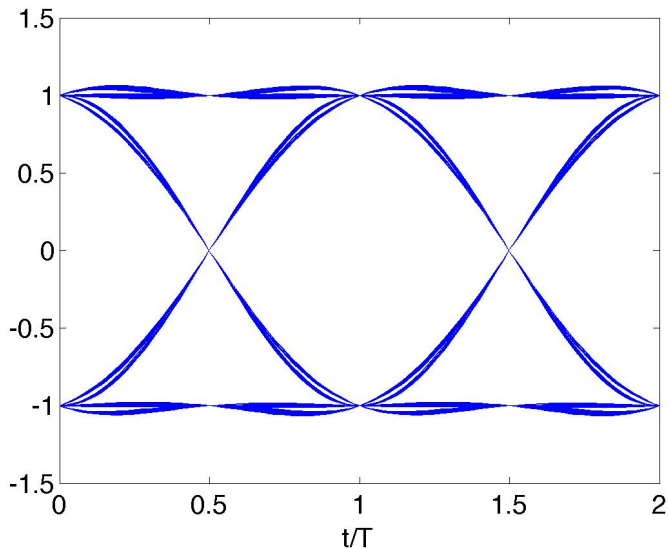


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,25$ con ruido

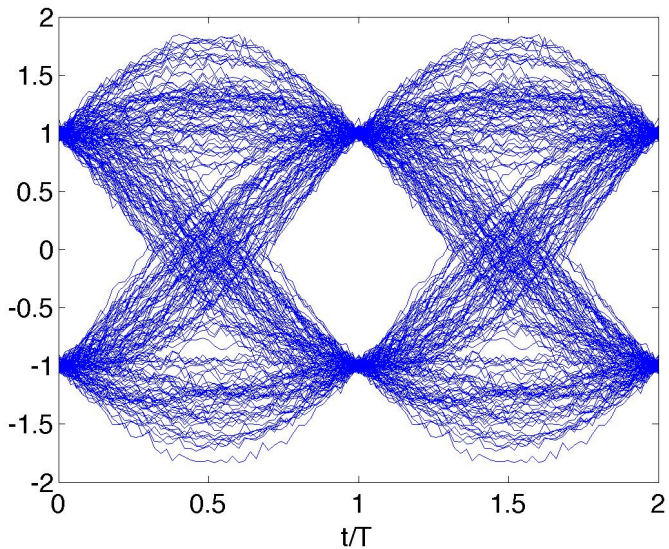


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0$ con ISI

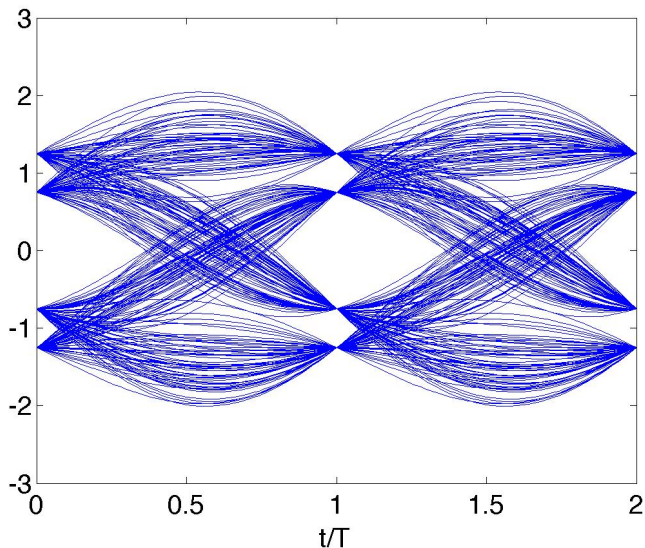


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,25$ con ISI

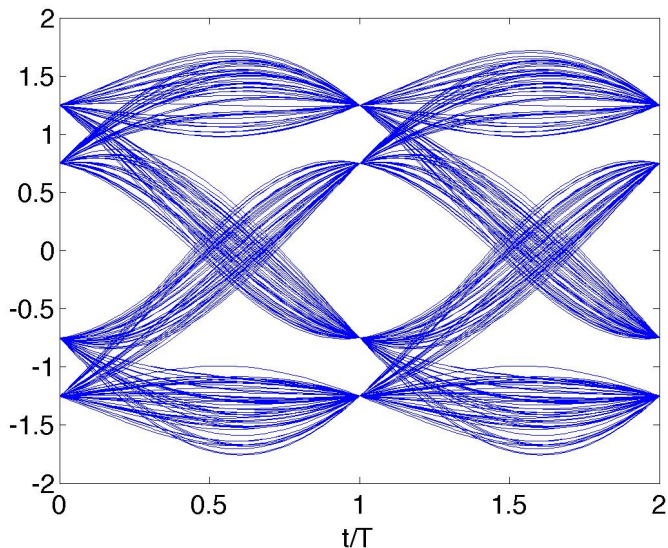


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,5$ con ISI

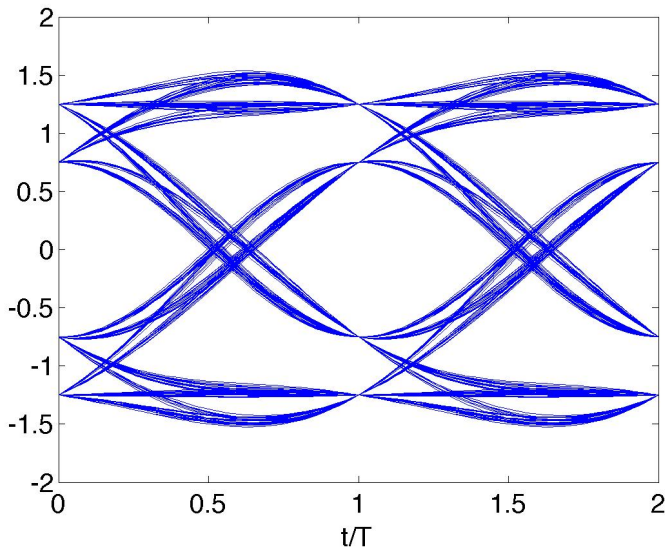


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 0,75$ con ISI

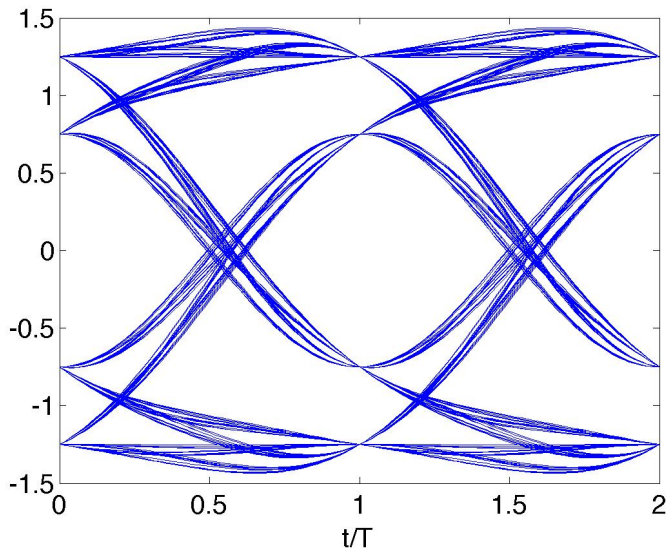


Diagrama de ojo - 2-PAM y $\alpha = 1$ con ISI

