Ejercicios 4. Subespacios vectoriales. Operaciones con subespacios

4.1 En los siguientes apartados, estudie si es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$:

$$\text{(a)}\ \ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x = y + 1 \right\}, \quad \text{(b)}\ \ T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ x + y + z - 2 = 0 \right\}$$

$$\text{(c)}\ \ W = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ 1-b \\ 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

4.2 Sea $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : 2x - y - z = 0 \right\}$. Determine cuál de las siguientes respuestas es una base de T:

$$\text{(a)} \quad \mathcal{B}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \qquad \text{(b)} \quad \mathcal{B}_T = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.3 Halle las ecuaciones paramétricas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$ y la dimensión:

$$\text{(a)}\ \ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ 2x + y = 0 \right\}, \qquad \text{(b)}\ \ T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \ : \ \begin{array}{r} 2x + y = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}.$$

4.4 Halle una base y la dimensión del subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{array}{r} x - z = 0 \\ y + t = 0 \end{array} \right\}$.

4.5 Obtenga una base de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

$$\text{(a)}\ \ S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \ \begin{array}{r} z - t = 0 \\ y + z = 0 \\ 2z + y - t = 0 \end{array} \right\} \qquad \text{(b)}\ \ T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{array}{l} x + z - t = 0 \\ x + y + z = 0 \\ y + z = 0 \end{array} \right\}.$$

4.6 Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ tales que $\dim(S) = 2$, donde

$$S = \mathcal{L} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ -a \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.7 Halle las ecuaciones paramétricas y la dimensión del subespacio

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{array}{r} z - t = 0 \\ y + z = 0 \\ y + t = 0 \end{array} \right\}.$$

4.8 Escriba las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$:

(a) $S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$, (b) $T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$,

(c) $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$.

4.9 Halle las ecuaciones implícitas de los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^4$:

(a) $S = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, (b) $T = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

4.10 Demuestre que $S = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $T = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son el mismo subespacio. Pruebe que el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ no pertenece a dicho subespacio.

4.11 Sea $\mathcal{B}_S = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de un subespacio S de $\mathbb{R}^3$.

(a) Halle el vector de coordenadas de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ respecto de la base $\mathcal{B}_S$.

(b) Estudie si el vector $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio S.

4.12 Sea $\mathcal{B}_S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} \right\}$ una base de un subespacio S de $\mathbb{R}^3$ y sea $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Determine si $\vec{x}$ pertenece al subespacio S.

4.13 Sea $\mathcal{B}_T = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ una base de un subespacio T de $\mathbb{R}^4$.

(a) Halle el vector de coordenadas de $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ de T respecto de la base $\mathcal{B}_T$.

(b) Estudie si $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ pertenece al subespacio T.

4.14 Sean los subespacios de $\mathbb{R}^3$:

$$S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : \begin{array}{r}x=0\\y+z=0\end{array}\right\},\quad T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : 2y+2z=0\right\},\quad W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x+y=0\right\}.$$

(a) Halle la dimensión y una base de los subespacios intersección $S\cap T$ y $T\cap W$.

(b) Halle la dimensión y una base de los subespacio suma $S+W$ y $T+W$.

4.15 En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $S=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x=z\right\}$, $T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x=y=0\right\}$ y $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x+y+z=0\right\}$. Pruebe que: (a) $\mathbb{R}^3=S+T$, (b) $\mathbb{R}^3=S+W$, (c) $\mathbb{R}^3=T+W$. ¿En qué casos la suma es directa?

4.16 Sea $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$. Halle un subespacio Z tal que $\mathbb{R}^3=S\oplus Z$.

4.17 Sean W_1 y W_2 los subespacios de $\mathbb{R}^3$ definidos por

$$W_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 : z=0\right\},\qquad W_2=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\right\}.$$

Obtenga un sistema de generadores y la dimensión de $W_1\cap W_2$ y W_1+W_2.

4.18 Sean $S_1=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right\}$ y $S_2=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\right\}$. Halle el subespacio S_1+S_2 y su dimensión.

4.19 Sean $S=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\-1\\5\\-6\end{pmatrix}\right\}$ y $T=\mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

(a) Una base de S es $B_S=\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\4\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$.

(b) Una base de S es $B_S=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\\2\end{pmatrix}\right\}$.

(c) $S\subset T$ y $S\cap T=S$.

(d) $S+T=\mathbb{R}^4$.

4.20 Sean $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ y $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ z \end{pmatrix} : y, z \in \mathbb{R} \right\}$ dos subespacios de $\mathbb{R}^3$. Estudie si la suma de ambos subespacios es directa.

4.21 Halle un subespacio W de $\mathbb{R}^3$ suplementario de $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} x+y=0 \\ z=0 \end{array} \right\}$.

4.22 Sea el subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} x=0 \\ y+z=0 \end{array} \right\}$. Halle un subespacio T tal que $\mathbb{R}^3 = S \oplus T$. Escriba $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ como suma de un vector de S y un vector de T.

4.23 En $\mathbb{R}^4$, ¿es posible encontrar dos subespacios W_1 y W_2 tales que $\dim(W_1) = 3$, $\dim(W_2) = 2$ y $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$?

4.24 Sean $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -\alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}$ y $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x - y + 2z = 0 \right\}$. Determina si se cumple que $\mathbb{R}^3 = W_1 \oplus W_2$.

4.25 Halle una base de $S+T$ cuyos vectores al colocarlos por filas formen una matriz escalonada reducida, donde

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x=0 \\ y+z=0 \end{array} \right\}, \quad T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x=0 \\ z+t=0 \end{array} \right\}.$$

4.26 En un espacio vectorial V con $\dim(V) = 5$ ¿es posible encontrar dos subespacios W_1 y W_2 tales que $\dim(W_1) = 4$, $\dim(W_2) = 2$ y $W_1 \cap W_2 = \{\vec{0}\}$?

4.27 Sean los subespacios W_1 y W_2 que se dan a continuación. Halle una base de $W_1 + W_2$. ¿Es la suma directa? Obtenga $\dim(W_1 \cap W_2)$.

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x-y+z=0 \\ x-t=0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \mathcal{L}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

4.28 Halle unas ecuaciones paramétricas e implícitas de $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$, donde

$$W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x+z=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} : \begin{array}{r} x-y=0 \\ z-t=0 \end{array} \right\}.$$

4.29 Halle unas ecuaciones paramétricas e implícitas de $W_1 \cap W_2$ y $W_1 + W_2$, donde

$$W_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\6\\-2\end{pmatrix}\right\}, \quad W_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

4.30 Sean $S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ z + t = 0\right\}$ y $T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{matrix} x + t = 0 \\ y + t = 0 \end{matrix}\right\}$. Obtenga una ecuación paramétrica del subespacio intersección $S \cap T$.

4.31 Sean $S_1 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}2\\4\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\5\\2\end{pmatrix}\right\}$ y $S_2 = \mathcal{L}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-3\\0\end{pmatrix}\right\}$. Halle el subespacio $S_1 + S_2$.

4.32 Sean $S = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ x + y + 2t = 0\right\}$ y $T = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \ \begin{matrix} x + t = 0 \\ y + t = 0 \end{matrix}\right\}$. Halle una ecuación paramétrica del subespacio intersección $S \cap T$.