Tema 1.3 Subespacios. Operaciones con subespacios.

ÁLGEBRA LINEAL

DMATIC, ETSI Informáticos
Universidad Politécnica de Madrid

Índice

Sea V EV sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Un subconjunto $\emptyset \neq S \subseteq V$ es un **subespacio vectorial de V** si tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones de suma y multiplicación por escalares que V.

Caracterización 1.

Un subconjunto $\emptyset \neq S \subset V$ es un subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow$

1. $\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in S \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in S$.
2. $\forall\ \vec{u} \in S, \forall a \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot \vec{u} \in S$.

Caracterización 2.

$\emptyset \neq S \subset V$ es un subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow$

$$\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in S, \forall a, b \in \mathbb{K} \Rightarrow a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \in S$$

Observación. Todo subespacio contiene al vector $\vec{0}$.

Ejemplo 1

- $\mathbb{R}^2$ es EV y los subespacios del plano son las rectas que pasan por $(0,0)$.
  $S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : y + 2x = 0 \right\}.$
- $\mathbb{R}^3$ es EV y los subespacios del espacio son las rectas y los planos que pasan por $(0,0,0)$.
  $$S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{r} y + 2x = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\}$$
  $$S = \left\{ \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : y + 2x - z = 0 \right\}.$$

Dimensión del subespacio

La dimensión de un subespacio S de un espacio vectorial V es el número de elementos de una base $\mathcal{B}_S$ de S.
Como $S \subseteq V$, se cumple que $\dim(S) \leq \dim(V)$. Además, si $\dim(S) = \dim(V)$ entonces $S = V$.

Sea $C = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ un conjunto de vectores de V. Se define el **subespacio generado por C** como

$$\mathcal{L}(C) = \{\vec{v} = c_1\vec{u}_1 + \cdots + c_n\vec{u}_n : \; c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}\}.$$

Teorema 1

$\mathcal{L}(C)$ es subespacio de V.

Se dice que $C = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ es un **sistema generador** del subespacio S si $S = \mathcal{L}(C)$.
Dos sistemas de vectores C_1 y C_2 son **equivalentes** si $\mathcal{L}(C_1) = \mathcal{L}(C_2)$.

Proposición 1

Dos sistemas de vectores C_1 y C_2 son equivalentes $\Leftrightarrow$ todo vector de C_1 pertenece a $\mathcal{L}(C_2)$ y todo vector de C_2 pertenece a $\mathcal{L}(C_1)$.

Sea C un sistema de vectores dado. Se obtienen sistemas equivalentes:

- Si se añaden o quitan a C vectores que son combinación lineal de vectores de C.
- Si se suma a un vector de C una combinación lineal de vectores de C.

Ejemplo 2

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ son equivalentes ya que}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$C_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ son equivalentes.}$$

Sea V un EV sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ de dimensión n y $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base.
Sea S un subespacio de V de dimensión $k < n$ y sea $\mathcal{B}_S = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ una base de S.
Los vectores $\vec{w}_j$ se expresan en coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ de V:

$$\vec{w}_j = \begin{pmatrix} c_1^j \\ c_2^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}, \quad j = 1, \cdots, k.$$

Si $\vec{x}$ es un vector de S, entonces $\vec{x} = \lambda_1 \vec{w}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{w}_k$ para ciertos $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}$.
Llamaremos una **ecuación paramétrica de S** a la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \lambda_1 \begin{pmatrix} c_1^1 \\ c_2^1 \\ \vdots \\ c_n^1 \end{pmatrix}_B + \cdots + \lambda_k \begin{pmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_n^k \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad \text{con } \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}.$$

Las **ecuaciones implícitas de S** son las $n-k$ ecuaciones que se obtienen eliminando los k parámetros $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ del sistema:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^1 & \ldots & c_1^k \\ \vdots & & \vdots \\ c_n^1 & \ldots & c_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V. Se define

$$S_1 + S_2 = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \ \ \vec{v}_1 \in S_1, \ \vec{v}_2 \in S_2\}$$

Teorema 2

$S_1 + S_2$ es un subespacio vectorial.

Demos. Sean $\vec{v}, \vec{w} \in S_1 + S_2$. Entonces

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = (\vec{v}_1 + \vec{w}_1) + (\vec{v}_2 + \vec{w}_2) \in S_1 + S_2,$$

puesto que $\vec{v}_i, \vec{w}_i \in S_i$ y, por tanto, $\vec{v}_i + \vec{w}_i \in S_i$, $i = 1, 2$.
Además, si $a \in \mathbb{K}$, entonces $a\vec{v} = a\vec{v}_1 + a\vec{v}_2 \in S_1 + S_2$.

Proposición 2

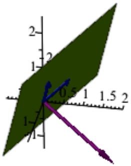
Sean $C_1 = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ y $C_2 = \{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_q\}$ dos sistemas de vectores de V. Entonces $\mathcal{L}(C_1 \cup C_2) = \mathcal{L}(C_1) + \mathcal{L}(C_2)$.

Se define

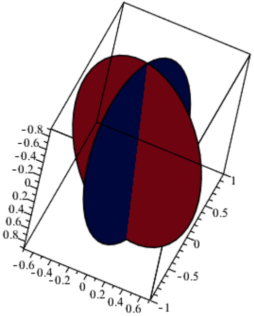
$$S_1 \cap S_2 = \{\vec{v} \in V : \vec{v} \in S_1 \text{ y } \vec{v} \in S_2\}$$

Teorema 3

$S_1 \cap S_2$ es un subespacio vectorial.



Un plano que pasa por el origen (en verde), una base del plano (en azul) y un vector normal al plano (en violeta).



Intersección de dos planos

Si $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$, entonces se dice que $S_1 + S_2$ es **suma directa de S_1 y S_2** y se denota por $S_1 \oplus S_2$.
Si $V = S_1 \oplus S_2$, entonces se dice que S_1 y S_2 son **subespacios suplementarios**.

Teorema 4

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V y sea $W = S_1 + S_2$. Entonces $W = S_1 \oplus S_2 \Leftrightarrow$ para todo vector $\vec{w} \in W$, existen un único $\vec{v}_1 \in S_1$ y un único $\vec{v}_2 \in S_2$ tales que $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.

Demos. Probaremos la necesidad en primer lugar. Supongamos que $\vec{w} \in S_1 + S_2$ se puede expresar de dos formas distintas $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ con $u_1, v_1 \in S_1$ y $u_2, v_2 \in S_2$.
Entonces, $\vec{v}_1 - \vec{u}_1 = \vec{u}_2 - \vec{v}_2 \in S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$. De aquí, $\vec{v}_1 - \vec{u}_1 = \vec{0}$ y $\vec{u}_2 - \vec{v}_2 = \vec{0}$. Entonces, $\vec{v}_1 = \vec{u}_1$ y $\vec{u}_2 = \vec{v}_2$.
Probaremos a continuación la suficiencia. Supongamos que $\vec{v} \in S_1 \cap S_2$. Demostraremos de $\vec{v} = \vec{0}$ por el método de reducción al absurdo. Supongamos que $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $\vec{v} = \vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} \in S_1 + S_2$ son dos descomposiciones en suma distintas. Esta contradicción implica que $S_1 \cap S_2 = \{\vec{0}\}$.

Teorema 5 (Fórmula de las dimensiones (o de Grassmann))

Sean S_1 y S_2 dos subespacios de V. Se verifica que:

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2)$$