Continuidad de funciones

Luz M. Fernández-Cabrera
Universidad Complutense de Madrid

Octubre, 2021

Continuidad en un punto

$$f \text{ es continua en } a \text{ cuando } \begin{cases} 1)\ \exists f(a) \\ 2)\ \exists \lim_{x\to a} f(x) \\ 3)\ \lim_{x\to a} f(x) = f(a). \end{cases}$$

Definición $\varepsilon - \delta$:

f es continua en a cuando $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta$ entonces $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

Discontinuidades

Cuando una función no cumple alguna de las tres condiciones de la definición en un punto a, se dice que la función es discontinua en ese punto.

Discontinuidad **evitable** si el límite y el valor de la función no coinciden o bien la función no está definida existiendo el límite. En este caso la función puede redefinirse en el punto de modo que coincidan.

Discontinuidad **de salto** cuando no existe límite, existiendo los límites laterales. El salto puede ser finito, cuando ambos límites laterales son finitos, o infinito, en cuanto uno de ellos lo sea.

Discontinuidad **esencial** cuando uno o ambos límites laterales no existan.

La funciones continuas tienen unas **propiedades** análogas a las de los límites, que enunciamos a continuación:

Si f y g son continuas en $a,$ entonces se tiene que

i) $f+g$ es continua en a,
ii) λf es continua en a, siendo $\lambda \in \mathbb{R}$,
iii) $f \cdot g$ es continua en a,
iv) $\frac{1}{g}$ es continua en a, si es $g(a) \neq 0$,
v) $\frac{f}{g}$ es continua en a, si es $g(a) \neq 0$.

La siguiente propiedad para la composición de funciones nos permitirá poder calcular algunos límites

Si $\lim\limits_{x \to a} f = b$ y g es continua en b, entonces

$$\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(\lim_{x \to a} f(x)) = g(b)$$

.

Empleando la propiedad anterior podemos decir que:

Si f es continua en a y g es continua en $b = f(a)$, entonces la función $g \circ f$ es continua en a.

Propiedades locales de funciones continuas

Propiedad de conservación del signo

Si f es continua en a y además
a) es $f(a) > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que es $f(x) > 0, \forall x \in (a - \delta; a + \delta)$.
b) es $f(a) < 0$, entonces $\exists \delta > 0$ tal que es $f(x) < 0, \forall x \in (a - \delta; a + \delta)$.

(Esta propiedad afirma que si una función es continua y positiva en un punto, es también positiva en un intervalo que contiene a ese punto, y análogamente si la función es negativa en el punto.)

Propiedad de acotación local

Si f es continua en el punto a entonces existe un número $\delta > 0$ tal que f es acotada en el intervalo $(a - \delta; a + \delta)$.

(Esta propiedad afirma que toda función que es continua en un punto está acotada en un entorno del mismo.)

Funciones continuas en un intervalo

En un intervalo abierto la definición es

$$f \text{ es continua en } (a;b) \quad \text{cuando} \quad \forall x \in (a;b) : f \text{ es continua en } x.$$

En un intervalo cerrado se dice que

$$f \text{ es continua en } [a;b] \quad \text{cuando} \quad \begin{cases} f \text{ es continua en } (a;b), \\ f \text{ es continua por la derecha en } a, \\ f \text{ es continua por la izquierda en } b. \end{cases}$$

Teoremas fundamentales de las funciones continuas

Teorema de Bolzano

Si f *es continua en* $[a;b]$ *y* $f(a)\cdot f(b)<0$, *entonces existe al menos un* $c\in(a;b)$ *tal que* $f(c)=0$.

(Este teorema afirma que si una función continua en el intervalo $[a;b]$ toma valores de signo contrario en los extremos del mismo, entonces necesariamente corta al eje de abscisas en algún punto c del intervalo.)

Teorema de los valores intermedios de Darboux

Si f *es continua en* $[a;b]$ *y* $f(x_1)<m<f(x_2)$, $x_1,x_2\in[a;b]$, *entonces existe al menos un* $c\in(x_1;x_2)$ *tal que* $f(c)=m$.

(Es decir, por el hecho de ser continua, la función toma todos los valores intermedios entre dos valores dados $f(x_1)$ y $f(x_2)$.)

Teorema de la acotación de Weierstrass

Si f *es continua en* $[a;b]$, *entonces* f *está acotada superior e inferiormente en* $[a;b]$.

(Por el hecho de ser continua en un intervalo **cerrado** la función está acotada.)

Teorema del máximo y el mínimo de Weierstrass

Si f *es continua en* $[a;b]$, *entonces:*
-. *existe un punto* $x_1\in[a;b]$ *tal que* $f(x_1)\geq f(x),\forall x\in[a;b]$
-. *existe otro punto* $x_2\in[a;b]$ *tal que* $f(x_2)\leq f(x),\forall x\in[a;b]$.

(Es decir, existen puntos en el intervalo en los que la función toma su valor máximo y su valor mínimo; el máximo se alcanza al menos para un x_1 y el mínimo al menos para un x_2.)

Más Propiedades

1). Si f es continua e inyectiva en $[a; b]$ entonces f es estrictamente creciente o decreciente en $[a; b]$.

2). Si f es continua y estrictamente creciente o decreciente en $[a; b]$ entonces es inyectiva.

3).$_{[=\ 1)+2)]}$ Si f es continua en $[a; b]$ entonces

$$\text{es inyectiva} \;\Leftrightarrow\; \text{es estrictamente creciente o decreciente.}$$

4). Si f es continua e inyectiva en $[a; b]$, su función inversa f^{-1} es también continua e inyectiva. Además, si f es estrictamente creciente, f^{-1} también es estrictamente creciente y si f es estrictamente decreciente, f^{-1} también es estrictamente decreciente.