

Tema 2: FUNCIONES DE VARIABLE REAL

1. Hállese el dominio de las funciones

$$f(x) = \frac{2x}{4(x-1) - x^2}, \quad g(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}, \quad h(x) = \sqrt{|x+5| - |x-7|}.$$

2. Determinése el dominio de las funciones

$$f(x) = \log_2(\log_{1/2} x), \quad g(x) = \sqrt{\operatorname{sen}(x) - \cos(x)}, \quad h(x) = \operatorname{arcsen}\left(\ln \frac{x+3}{7}\right).$$

3. Representa las funciones $y = \ln x$ e $y = e^x$ y a partir de ellas representa la gráfica de estas otras funciones

$$f(x) = \ln(x+3), \quad g(x) = 6 + \ln x, \quad h(x) = 1 - \ln x, \quad F(x) = -e^{x+2} + 3$$

4. Basandote en las gráficas de $y = \operatorname{sen} x$, $y = \cos x$ e $y = \tan x$ representa

$$\text{i) } y = \operatorname{sen}(3x), \quad \text{ii) } y = 3 \cdot \operatorname{sen} x, \quad \text{iii) } y = \cos(x + \pi), \quad \text{iv) } y = 1 + \cos x,$$

$$\text{v) } y = \frac{1}{2} \cos(x - \pi) - 6, \quad \text{vi) } y = \tan(x/4) + 2$$

5. A partir de la hipérbola $y = 1/x$ representa

$$\text{i) } y = \frac{6}{x-2}, \quad \text{ii) } y = \frac{x}{x+1}, \quad \text{iii) } y = \frac{-2}{4x+3}, \quad \text{iv) } y = \frac{1-x}{x}$$

6. Dadas las funciones

$$f(x) = 2x^3 - \frac{3}{x^2}, \quad g(x) = \frac{2+x^2}{x^3-3},$$

calcúlese $g - f$ y $g \cdot f$.

7. Se consideran las funciones

$$g(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x < 0, \\ 1-x^2, & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x < 2, \\ 2x, & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Hállense $h - g$ y g/h .

8. Sea la función $f(x) = |x| + |x-1| - |2x-1|$. Se pide: representarla, determinar $f([0, 1])$ y también $f^{-1}([1/2, 1])$

9. Dadas las funciones

$$g(x) = \frac{2-x}{2x}, \quad h(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x},$$

hállense las composiciones $h \circ g$, $g \circ h$ y $g \circ g$ y sus dominios.

10. Se consideran las funciones

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 0, \\ 1-x, & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1-2x, & \text{si } x < 1, \\ 1+x, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

Determinése la función $g \circ f$.

11. Determinése si las funciones siguientes son pares o impares:

$$f(x) = \cos(-3x), \quad g(x) = \frac{x|x|}{1+|x|}.$$

12. a) Pruébese que el producto de dos funciones impares es una función par.

b) Demuéstrese que el producto de una función par por una impar es una función impar.

13. Haz un bosquejo de la gráfica de las siguientes funciones

$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, \quad g(x) = -f(x) \quad h(x) = x(x-1)(x-4),$$

14. Para $x \in \mathbb{R}$ denotamos por $E(x)$ o $[x]$ a la parte entera de x , es decir, el mayor entero que no supera a x . Representa las funciones $f(x) = E(x)$ y $g(x) = x - E(x)$.

15. Determinése si las siguientes funciones son inyectivas. En caso afirmativo, hállese su inversa.

$$\text{a) } f(x) = \cos 3x, \quad \text{b) } g(x) = 3x + 2.$$

16. Sea la función $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$. Di si siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justifica tu respuesta:

1. La restricción de f al intervalo $[0,1)$ es una biyección de $[0,1)$ sobre $[-1, \infty)$.
2. La restricción de f al intervalo $(1, \infty)$ admite una función inversa.
3. La ecuación $1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$ tiene una única solución.
4. Para todo $a < 0$, la ecuación $f(x) = a$ admite dos soluciones diferentes.

17. Dibújese la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$.

18. Dibújese la gráfica de la función $f(x) = \max\{x^2 + x - 2, -x^2 - 3x\}$.

19. Para cada una de las funciones siguientes determina cuales están acotadas superior o inferiormente y cuales tienen máximo y/o mínimo:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \text{ en } [0, 5] \quad g(x) = \frac{3}{x+2}, \text{ en } [-3, 2]$$

$$h(x) = x + |x|, \text{ en } [-2, 2] \quad F(x) = \frac{x}{1+|x|}, \text{ en } \mathbb{R}$$

20. La ley de Pareto para la distribución del ingreso, en dolares, en un grupo particular es

$$N = \frac{216 \cdot 10^{10}}{x^{3/2}}$$

donde N representa el número de personas cuyos ingresos exceden a x . Se pide:

- a) Cuántas personas son millonarias?
- b) Cuántas personas tienen ingresos entre 3.600 y 10.000 dolares?
- c)Cuál es el ingreso más bajo de las 80 personas que tienen ingresos mas alto?