Hoja de ejercicios de MÉTODOS MATEMÁTICOS I curso 2021/22

Tema 1: NÚMEROS REALES

1. a) Demuéstrese que entre dos números racionales distintos hay otro racional.
b) Razona si la suma de dos números irracionales es siempre un irracional.

2. Encuéntrese el fallo de la siguiente “demostración”. Sea $x = 1$. Entonces

$$x^2 = x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = x - 1 \quad \Rightarrow \quad (x+1)(x-1) = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 1,$$

y como es $x = 1$, se sigue que $2 = 1$.

3. Resuélvase las siguientes desigualdades

a) $x^2 - 6x + 9 \leq 0$ b) $x^2 - 4x + 4 \geq 0$ c) $2x^2 + 9x + 6 \geq x + 2$

d) $x(2x-1)(3x-5) \leq 0$ e) $x + \frac{1}{x} \geq 1$ f) $\dfrac{2x^2+1}{4-x^2} \leq 0$

g) $\dfrac{x}{x-5} \geq 0$ h) $\dfrac{x}{x-5} > 1/4$ i) $\sqrt{\dfrac{x}{2-3x}} \leq 1.$

4. Resuélvanse las inecuaciones:

$$\text{a)} \quad \left|\frac{1}{4} - x\right| \leq \frac{1}{4}, \qquad \text{b)} \quad \left|x^2 + x + \frac{1}{4}\right| \leq 0, \qquad \text{c)} \quad |x+7| > 2$$

5. Empareja las desigualdades con sus correspondientes soluciones:

a) $\lvert x\rvert < 3$	b) $\lvert x-1\rvert < 3$	1) $4 < x < 6$	2) $-3 < x < 3$
c) $\lvert 3-2x\rvert < 1$	d) $\lvert 1+2x\rvert \leq 1$	3) $x < -1 \curlyvee x > 3$	4) $x > 2$
e) $\lvert x-1\rvert > 2$	f) $\lvert x+2\rvert \geq 5$	5) $-2 < x < 4$	6) $-\sqrt{3} \leq x - 1 \curlyvee 1 \leq x \leq \sqrt{3}$
g) $\lvert 5-x^{-1}\rvert < 1$	h) $\lvert x-5\rvert < \lvert x+1\rvert$	7) $1 < x < 2$	8) $x \leq -7 \curlyvee x > 3$
i) $\lvert x^2-2\rvert \leq 1$	j) $x < x^2 - 12 < 4x$	9) $1/6 < x < 1/4$	10) $-1 \leq x \leq 0$

6. Demuéstrese que $\forall x, y \geq 0$ a) $x^2 \leq y^2 \Rightarrow x \leq y,$ b) $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$

7. Demuéstrese a) $||x| - |y|| \leq |x - y|,$ b) $||x| - |y|| \leq |x + y|.$

8. Hállese ínfimo y mínimo, si existen, de los conjuntos

a) $[0;1),$ b) $(0;1],$ c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\},$ d) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 5x - 6 \leq 0\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\},$ f) $\{-0,9, \ -0,99, \ -0,999, ...\}$ g) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x + 3 \leq 0\}.$

9. Determínense, si existen, supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 7x \leq 0\},\ B = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\},\ C = \left\{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\},\ D = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}.$

10. ¿Qué clase de punto es π respecto del conjunto $B = \{x \in \mathbb{Q} : 2 \leq x \leq 4\}$? Hállense $\mathrm{int}(B), \mathrm{ext}(B)$ y $\mathrm{fr}(B)$. El conjunto B, ¿es un conjunto abierto?

11. Estúdiese si los conjuntos $A = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{Z} \curlywedge n \neq 0\}$ y $B = [1,4] \cap \mathbb{Q}$ son conjuntos cerrados.

12. Demuéstrese que $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$

13. Demuéstrese que $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2$ y como consecuencia que

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

14. Pruébese que si n es un número natural y $n > 3$ entonces $n! > 2^n$.