Curso de Variable Real

Universidad Autónoma de Madrid

Figura 1: JB Joseph Fourier

Curso 2019/2020

Fernando Soria

Índice general

Capítulo 1

Introducción: Breve incursión en la teoría de la medida

En este capítulo hacemos un breve repaso sobre la teoría de la medida, una herramienta que será de capital importancia importante a lo largo del curso.

1.1. Definiciones básicas

DEFINICIÓN 1.1 *Sea X un conjunto y $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra en X si*

1. $\emptyset \in \mathcal{A}$.
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$.
3. $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

DEFINICIÓN 1.2 *Dado X un conjunto y $\mathcal{A}$ una σ-álgebra en X, se dice que $\mu : \mathcal{A} \longmapsto [0, \infty]$ es una medida (positiva) si*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ *para toda familia disjunta* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}$.

Únicamente consideraremos dos medidas a lo largo de este curso:

- la medida de Lebesgue.
- la medida de contar en $\mathbb{N}$ o en $\mathbb{Z}$.

Nota: conviene recordar la construcción de la medida de Lebesgue y de la medida de contar (Tema 2 de los apuntes de Medida).

DEFINICIÓN 1.3 *Toda terna $(X, \mathcal{A}, \mu)$ formada por un conjunto X, una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$ y una medida μ se denomina* **espacio de medida**.

En lo que resta de capítulo daremos por sentado que estamos trabajando en un espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ya fijado.

DEFINICIÓN 1.4 *Decimos que una función $f : X \longmapsto \mathbb{C}$ es medible si $\forall\, A \subset \mathbb{C}$ abierto, se tiene que $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$.*

DEFINICIÓN 1.5 *$s : X \longrightarrow \mathbb{C}$ es una función simple si*

$$s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{E_j}(x),$$

con $E_j \in \mathcal{A}$ y $c_j \in \mathbb{C}$.

DEFINICIÓN 1.6 *Sea $s(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \chi_{E_j}(x)$ una función simple y bien $\mu(E_j) < \infty$ para todo j o bien $\mu(E_j) \leq \infty$ y $c_j \geq 0$ para todo j. Entonces definimos su integral como*

$$\int_X s\, d\mu = \sum_{j=1}^{n} c_j\, \mu(E_j).$$

DEFINICIÓN 1.7 *Sea $f : X \longmapsto \mathbb{C}$ una función medible. Definimos su integral $\int_X f\, d\mu$ como sigue:*

1. *Sea $f \geq 0$, entonces $\int_X f\, d\mu = \sup \left\{ \int_X s\, d\mu, \text{ con } s \text{ función simple y } 0 \leq s \leq f \right\}$.*
2. *Sea $f : X \longmapsto \mathbb{R}$ (a valores reales), escribimos $f = f^+ - f^-$. Si $\int_X f^+ < \infty$ y $\int_X f^- < \infty$, entonces $\int_X f = \int_X f^+ - \int_X f^-$.*
3. *Sea $f : X \longmapsto \mathbb{C}$, (a valores complejos), escribimos $f = u + i\, v$, con u, v funciones reales. Entonces $\int_X f = \int_X u + i \int v$.*

1.2. Teoremas importantes

Enunciaremos aquí los tres teoremas más importantes de Teoría de la Medida: *Teorema de la Convergencia Monótona*, *Lema de Fatou* y *Teorema de la Convergencia Dominada.*

TEOREMA 1.1 (Convergencia Monótona) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles que verifican $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \ldots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \ldots$ y sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces se cumple que*

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

Es importante observar que no se pide en las hipótesis que $\int_X f < \infty$, pero en ese caso también se cumple el teorema.

LEMA 1.2 (Lema de Fatou) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces se cumple que*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

TEOREMA 1.3 (Convergencia Dominada) *Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles tal que $\exists$ una función F con $\int_X F < \infty$ tal que $|f_n(x)| \leq F(x)$ $\forall\, x, n$ y supongamos que hay convergencia puntual, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Entonces se tiene que*

$$\int_X f = \int \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n.$$

De hecho se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f - f_n| = 0,$$

que es una condición mas fuerte que la anterior.

Observación: Estos resultados no se cumplen si consideramos la integral de Riemann (la de "toda la vida"). Por ejemplo, consideramos la **función de Dirichlet** en $[0,1]$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Si hacemos $f_m(x) = \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2\,n} = \begin{cases} 1, & x = \frac{p}{q},\ \text{con } q|_{m!} \\ 0, & \text{en caso contrario} \end{cases}$, entonces

- f_m tiene un numero finito de discontinuidades.
- $f_m(x) \nearrow f(x)$ y $|f_m(x)| \leq \chi_{[0,1]}$.

pero resulta que f no es integrable Riemann.

Ejercicio 1.1 *Si s es una función simple y ≥ 0, probar que*

$$\nu(A) = \int_A s\, d\mu$$

es una medida sobre $\mathcal{A}$.

Con mas generalidad, si $f : X \longmapsto [0,\infty]$ es una función medible, entonces $d\nu_f = f\, d\mu$ (dada por $\nu_f(A) = \int_A f\, d\mu$) también es una medida sobre $\mathcal{A}$.

Ejercicio 1.2 *Probar esta segunda afirmación.*

DEFINICIÓN 1.8 *Dado un espacio de medida (X,$\mathcal{A}$,μ), definimos la clase*

$$\mathcal{L} = \left\{ f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles tales que } \int_X |f| \, d\mu < \infty \right\}$$

de las funciones integrables.

Se verifica entonces que $\mathcal{L}$ es un espacio vectorial con la suma y el producto por escalares habituales.

LEMA 1.4 *Sea $\{f_n\} \subset \mathcal{L}$ y supongamos que $\exists\, F \in \mathcal{L}$ con $F \geq 0$ y $|f_n(x)| \leq F(x)\ \forall\, x$ y que existe el limite puntual, es decir, $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Entonces se tiene que $f \in \mathcal{L}$ y*

$$\int_X |f - f_n| \, d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

DEFINICIÓN 1.9 *Se dice que $f_n \to f$ en la* norma *de $\mathcal{L}$ si* $\lim \displaystyle\int_X |f_n - f| = 0.$

El T.C.D. dice que si $f_n \to f$ puntualmente y de forma "dominada", entonces $f_n \to f$ en norma.

COROLARIO 1.5 (T.C.M.) *Si $\{g_n\}$ es una familia de funciones medibles y ≥ 0, entonces se cumple que*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n \, d\mu \right).$$

Demostración Este resultado se consigue aplicando el T.C.M. a la sucesión $G_N = \sum_{n=1}^{N} g_n$. Para mas detalles, consultar la Notas de *Teoría de la Medida*.

Notas:

- Si $\{f_n\}$ son medibles, entonces $\sup f_n$ y $\inf f_n$ también lo son y entonces $\limsup f_n$ y $\liminf f_n$ también.
- Cuando existe el $\lim f_n$, también es medible.

En el *T.C.D.* la hipótesis de dominación es fundamental. Veamos que pasa si la suprimimos.

Ejemplo: Sean $f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$. Entonces, $\lim f_n(x) = 0$, pero $\displaystyle\int_X f_n = 1 \neq \int_X f = 0.$

$\{f_n\}$ es un ejemplo de lo que denominaremos **núcleo de sumabilidad** o aproximación a la identidad, que tendrán la propiedad

$$\int_X f_n(x-y)\, f(y)\, dy \longrightarrow f(x),$$

si f es "buena".

1.3. Conjuntos de medida 0

DEFINICIÓN 1.10 *Se dice que una propiedad $\mathcal{P}$ se cumple en casi todo punto (* c.t.p. *o* a.e.*) si $\{x \in X \ : \ x$ no cumple $\mathcal{P}\}$ tiene medida 0.*

Ejemplo: En $(\mathbb{R}, dx)$, la función

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (\cos(\pi\, m!\, x))^{2\,n} = 0 \ c.t.p.$$

LEMA 1.6 *Si $f = 0$ c.t.p., entonces $\displaystyle\int_X f = 0$.*

LEMA 1.7 *Si $f = g$ c.t.p., entonces $\displaystyle\int_X f = \int_X g$. De hecho se cumple que $\displaystyle\int_X |f - g| = 0$ (es una condición mas fuerte, ya que $\displaystyle|\int_X f - \int_X g| \leq \int_X |f - g|$).*

Ejercicio 1.3 *$f : X \longmapsto \mathbb{C}$ con $f \in \mathcal{L}$. Probar que si $\displaystyle\int_A f = 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ c.t.p..*

Con esto queda terminado el repaso de Tª de la Medida. Para mas profundidad, consultar los apuntes del curso 2017/2018, disponibles en Moodle.

Capítulo 2

Técnicas de espacios L^p

2.1. Introducción

Dado un espacio de medida (X,$\mathcal{A}$,μ) y el conjunto $\mathcal{L}$ de funciones integrables definido en el capítulo anterior, queremos darle estructura de espacio vectorial métrico (con ello daremos sentido topológico a los teoremas de convergencia). Mejor aun, queremos dar una norma.

DEFINICIÓN 2.1 *En un espacio vectorial Y, una norma es una aplicación $\| \, \| : Y \longmapsto [0, \infty)$ que cumple:*

1. $\|y\| \geq 0$, *con* $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$.
2. $\|\alpha \, y\| = |\alpha| \, \|y\|$ *para todos* $\alpha \in \mathbb{C}$, $y \in Y$.
3. $\|y_1 + y_2\| \leq \|y_1\| + \|y_2\|$ *(desigualdad triangular).*

Diremos entonces que $(Y, \| \, \|)$ *es un espacio normado.*

LEMA 2.1 *Todo espacio normado es un espacio métrico. La métrica viene dada por*

$$d(y, y') = \|y - y'\|.$$

En $\mathcal{L}$, parece lógico definir la norma como

$$\|f\| = \int_X |f| \, d\mu.$$

Las condiciones *2* y *3* de la definición de norma se comprueban de manera muy sencilla. Nos concentramos en la condición *1*:

- $\|f\| \geq 0$ ya que $|f| \geq 0$.
- Sin embargo, no es cierto que $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Lo único que podemos asegurar es que $\int_X |f| \, d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *c.t.p.*. Para solucionar esto, lo que haremos será identificar todas las funciones que son coincidente entre si salvo en un conjunto “despreciable” (i.e., de medida 0).

DEFINICIÓN 2.2 *Se dice que* $f\,\mathcal{R}\,g \Leftrightarrow f = g$ *c.t.p..*

La relación $\mathcal{R}$ es de equivalencia (pues cumple las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva).

Consideramos ahora el conjunto cociente de las clases de equivalencia $[\cdot]$

$$L^1 = L^1(d\mu) = \mathcal{L}/\mathcal{R} = \left\{ [f] \ : \ f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ es medible y } \int_X |f|\, d\mu < \infty \right\}.$$

Definimos en L^1 la integral como

$$\int_X [f]\, d\mu = \int_X f\, d\mu$$

que está bien definida, ya que $g \in [f] \Leftrightarrow f = g$ *c.t.p.* $\Rightarrow \displaystyle\int f = \int g.$

Por abuso de notación, identificaremos cada clase de equivalencia $[f]$ y su integral $\displaystyle\int [f]\, d\mu$ con la de uno de sus elementos (pero tendremos que recordar que la función 0 es en realidad la función 0 en *c.t.p.*).

DEFINICIÓN 2.3 *En* L^1 *se define el funciónal*

$$\|[f]\| = \|f\| = \int |f|\, d\mu.$$

Nota: como $[f + g] = [f] + [g]$ y $[\alpha f] = \alpha [f]$, L^1 también tiene estructura de espacio vectorial.

LEMA 2.2 $(L^1, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado.*

Demostración Que la definición de la norma es estable (no depende del representante) es una comprobación sencilla. Veamos el resto de las propiedades:

1. $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *c.t.p..*
2. $\|\alpha f\| = |\alpha|\, \|f\|$.
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ■

DEFINICIÓN 2.4 *Con más generalidad, dado el espacio de medida* $(X,\mathcal{A},\mu)$ *y un numero* p *con* $1 \leq p < \infty$, *se define*

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles y } \int_X |f|^p\, d\mu < \infty \right\}.$$

De manera análoga al caso anterior, definiremos $L^p(d\mu) = \mathcal{L}^p/\mathcal{R}$.

Nota: L^p también es un espacio vectorial. Basta probar que $\mathcal{L}^p$ es cerrado para las operaciones suma y producto por escalares.

Demostración Demostrar que es cerrado para la multiplicación es trivial. Aquí desarrollaremos la suma. Supongamos $f, g \in \mathcal{L}^p$. Entonces

$$\int |f+g|^p \, d\mu \leq 2^p \left(\int |f|^p d\mu + \int |g|^p d\mu \right)$$

ya que

$$(a+b)^p \leq (2 \text{ máx}(a,b))^p = 2^p \text{ máx}(a^p, b^p) \leq 2^p \, (a^p + b^p)$$

■

LEMA 2.3 *Sea* $1 \leq p < \infty$*. Entonces* $(L^p, \| \ \|_p)$ *es un espacio normado con la norma dada por*

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración Veamos que se cumplen las propiedades de norma (las dos primeras son inmediatas):

1. $\|f\|_p \geq 0$ y $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$ *c.t.p.*.
2. $\|\alpha \, f\|_p = \left(\int |\alpha \, f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = \left(|\alpha|^p \int |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = |\alpha| \, \|f\|_p$
3. Para la desigualdad triangular ya hemos visto que se tiene

$$\|f+g\|_p = \left(\int |f+g|^p \, d\mu \right)^{1/p} \leq \left[2^p \left(\int |f|^p \, d\mu + \int |g|^p \, d\mu \right) \right]^{\frac{1}{p}},$$

pero de aquí nos es posible llegar a lo que queremos probar.

Para concluir la demostración, necesitamos la siguiente desigualdad de Hölder:

$$\|f \cdot g\|_{L^1} \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y $1 < p < \infty$.

Con esta herramienta sí podemos probar la desigualdad triangular. Hacemos $h = (f+g)^{p-1}$ y de esta forma se tiene que $\int |h|^q = \int |f+g|^p$. Entonces

$$\begin{aligned}
\int |f+g|^p d\mu = \int |f+g| \, |f+g|^{p-1} d\mu &\leq \int |f| \, |f+g|^{p-1} d\mu + \int |g| \, |f+g|^{p-1} d\mu \\
&\leq \|f\|_p \, \|h\|_q + \|g\|_p \, \|h\|_q = \|f\|_p \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (\|f\|_p + \|g\|_p) \left(\int |f+g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Entonces llegamos a que

$$\left(\int |f+g|^p d\mu\right)^{1-\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

■

PROPOSICIÓN 2.4 (Desigualdad de Hölder) *Dado $1 < p < \infty$, definimos su exponente dual como $q = \dfrac{p}{p-1}$. Entonces, si p y q son duales y $f \in L^p$ y $g \in L^q$, entonces se tiene que $f \cdot g \in L^1$ y además*

$$\|f \cdot g\|_{L^1} = \int |f \cdot g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \tag{2.1}$$

Demostración Para probar la desigualdad de Hölder usaremos la desigualdad numérica

$$a \cdot b \leq \frac{1}{p}\, a^p + \frac{1}{q}\, b^q \tag{2.2}$$

cuando $a, b > 0$.

Sean $F(x) = \frac{f(x)}{\|f\|_p}$ y $G(x) = \frac{g(x)}{\|g\|_q}$ (podemos suponer que las normas de f y g son $\neq 0$, porque en caso contrario no hay nada que probar). Entonces nuestro objetivo es demostrar que

$$\int \frac{|f \cdot g|}{\|f\|_p \, \|g\|_q} \leq 1$$

Usando 2.2 tenemos que

$$|F(x) \cdot G(x)| \leq \frac{1}{p}\, |F(x)|^p + \frac{1}{q}\, |G(x)|^q \;\forall\, x,$$

con lo que

$$\int |F \cdot G| \leq \frac{1}{p} \int |F|^p + \frac{1}{q} \int |G|^q = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

■

Nota: Para probar la desigualdad 2.2, fijamos $a > 0$ y construimos la función auxiliar

$$\varphi(t) = at - \frac{1}{p}\, a^p - \frac{1}{q}\, t^q.$$

Es un sencillo ejercicio de cálculo comprobar que $\varphi(t)$ alcanza su máximo en $t_0 = a^{1/q-1}$ y que $\varphi(t_0) = 0$.

De la misma forma que hemos definido los espacios $\mathcal{L}^p$, podemos definir

$$\mathcal{L}^\infty = \{f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles tales que } \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C\}\,.$$

Definimos de manera similar

$L^\infty = \mathcal{L}^\infty/\mathcal{R} = \{[f] \,:\, f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles tales que } \exists\, C > 0 \text{ tal que } |f(x)| \leq C \; c.t.p.\}\,.$

Entonces, se tiene que $(L^\infty, \|\ \|_\infty)$ es un espacio normado, siendo

$$\|f\|_\infty = \text{ínf}\,\{C < \infty \;:\; |f(x)| \leq C \; c.t.p.\}.$$

Nota: Al valor $\|f\|_\infty$ se le denomina el *supremo esencial* de la función f.

Ejercicio 2.1 *Probar que* $\|\ \|_\infty$ *es en efecto una norma.*

Observamos que también se cumple la desigualdad de Hölder, ya que si $f \in L^1$ y $g \in L^\infty$, entonces $|f \cdot g| \leq C\,|f|$ *c.t.p.*. Esto es porque 1 e ∞ son "duales" $(\frac{1}{1} + \frac{1}{\infty} = 1)$.

DEFINICIÓN 2.5 *Un espacio normado se dice que es de Banach si además es completo.*

TEOREMA 2.5 $(L^p, \|\ \|_p)$ *es un espacio de Banach, para todo* $1 \leq p \leq \infty$*.*

Ejercicio 2.2 *Probar el caso* $p = \infty$*.*

Demostración Lo probaremos para $1 \leq p < \infty$. Usaremos que:

1. Si $F : X \longmapsto \mathbb{C}$ es μ-medible y $\displaystyle\int |F|\, d\mu < \infty$, entonces $|F| < \infty$ *c.t.p.*

2. En un espacio topológico, si $\{y_n\}$ es una sucesión de Cauchy que tiene una subsucesión convergente a y, entonces se tiene que $\{y_n\}$ es también convergente con $y_n \longrightarrow y$.

Ejercicio 2.3 *Probar la segunda afirmación.*

Siguiendo con la demostración, sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en L^p (i.e. $\forall\, \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ t.q. si $m, n > N,$ se tiene que $\|f_n - f_m\|_p < \epsilon$.

Tomando $\epsilon = \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots \frac{1}{2^k}$ podemos elegir una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ con la propiedad de que $\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_p \leq \frac{1}{2^k}$.

Probaremos que esta subsucesión tiene limite y, por *2*, ya habremos terminado.

Sean $g_m(x) = |f_{n_1}(x)| + \displaystyle\sum_{k=2}^{m} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ y $g(x) = |f_{n_1}(x)| + \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$.
Entonces se tiene que $g_m(x) \longrightarrow g(x)$ y $g \in L^p$ ya que (por el T.C.M. en L^p).

$$\|g\|_p = \lim_{m\to\infty} \|g_m\|_p \leq \lim_{m\to\infty} \left(\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=2}^{m} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p \right) =$$

$$= \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

La observación anterior *1* nos dice que $0 \leq g < \infty$ *c.t.p.*, es decir, que la serie $f_{n_1} + \sum_{k=2}^{\infty} \left(f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\right)$ es absolutamente convergente en *c.t.p.* y, por tanto, es convergente. En particular, por la propiedad telescópica de la serie definida,

$$\begin{aligned}\exists\, f(x) = \lim_{m\to\infty} f_{n_m}(x) &= \lim_{m\to\infty} \left(f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{m} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) \right) \\ &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) \quad c.t.p.\ x\end{aligned}$$

La función f es nuestra candidata a ser el limite de las f_{n_m} en L^p. Tenemos que probar:

- $f \in L^p$.
- $\|f - f_{n_m}\|_p \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Ambos resultados son consecuencia del T.C.D. porque

- $f_{n_m} \to f$ *c.t.p.* puntualmente,
- $|f_{n_m}|^p \leq g^p$,

y por tanto, $\displaystyle\int |f_{n_m} - f|^p \, d\mu \longrightarrow 0.$ ■

Nota: Para recalcar que L^p esta asociado al espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se utilizan las notaciones alternativas

$$L^p(X, \mathcal{A}, \mu) \quad \text{ó} \quad L^p(d\mu).$$

Observación: Se puede definir $L^p(d\mu)$ también para $p < 1$ de manera análoga a como lo hemos hecho antes

$$L^p = \left\{ f : X \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles y } \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\} / \mathcal{R}$$

pero en este caso $\|\ \|$ no es una norma (no cumple la desigualdad triangular).

Ejemplo: Sean $p = \frac{1}{2}$ y $d\mu = dx$. Sean $f = \chi_{(0,1)}$ y $g = \chi_{[1,2)} \Rightarrow f + g = \chi_{(0,2)}$.

$$\|f + g\|_p = \left(\int |f + g|^{1/2} \, d\mu \right)^2 = \left(\int |\chi_{(0,2)}| \, d\mu \right)^2 = 4$$

pero

$$\|f\|_p = \|g\|_p = 1,$$

con lo que no se cumple la desigualdad.

L^p con $0 < p < 1$ sí es al menos un espacio métrico con la distancia dada por

$$d(f, g) = \int_X |f - g|^p \, d\mu$$

Veamos que se cumplen las dos propiedades menos evidentes:

1. $d(f,g) \geq 0$ y $d(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ c.t.p.
2. $d(f,g) \leq \displaystyle\int (|f-h| + |h-g|)^p \, d\mu \leq \int (|f-h|^p + |h-g|^p) = d(f,h) + d(h,g)$

   La ultima desigualdad se obtiene de que $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = x^p$ es una función cóncava si $0 < p \leq 1$, $\varphi(0) = 0$, y, por tanto, es subaditiva, es decir $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Ejercicio 2.4 *Probar la subaditividad de una función cóncava.*

TEOREMA 2.6 *Los espacios L^p con $0 < p < 1$ también son completos*

Demostración Es idéntica al caso $p > 1$ porque el argumento utilizado para probar que $g(x) = |f_{n_1}| + \sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k} - f_{n_{k-1}}| \in L^p$ es la desigualdad triangular.

Para $p < 1$ usamos que

$$\int |g|^p \leq \int |f_{n_1}|^p \, d\mu + \sum_{k=2}^{\infty} \int |f_{n_k} - f_{nk-1}|^p \, d\mu$$

■

Para $p \geq 1$, la norma $\| \, \|_p$ induce la métrica $d(f,g) = \|f-g\|_p$.

DEFINICIÓN 2.6 *Se dice que $f_n \longrightarrow f$ en la norma de L^p si $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$.*

El caso $p = \infty$:

$$f_n \longrightarrow f \text{ en } L^\infty \Leftrightarrow \|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$$

es equivalente a

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \text{ tal que } |f_n - f| < \epsilon \; c.t.p. \; \forall n > N$$

En particular

$$\lim f_n(x) = f(x) \; c.t.p.$$

En general esto no es cierto si $p < \infty$:

$$\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0 \not\Rightarrow f_n \longrightarrow f \; c.t.p.$$

Ejercicio 2.5 *Encontrar el contraejemplo.*

Sin embargo, una consecuencia de la demostración de la completitud es el siguiente resultado.

COROLARIO 2.7 *Sean $1 < p < \infty$ y $\{f_n\} \subset L^p$ convergente en la norma a cierta función f. Entonces, $\exists$ una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ tal que $\lim f_{n_k}(x) = f(x)$ c.t.p..*

Demostración Basta recordar como se eligieron los f_{n_k} en el teorema de completitud y que

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)) = \lim f_{n_m}(x) \quad \text{c.t.p..}$$

■

2.2. Escala de espacios L^p

LEMA 2.8 *Sea* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida finita* $(\mu(X) < \infty)$*. Entonces si* $0 < p < r \leq \infty$ *se tiene que*

$$L^r(d\mu) \subset L^p(d\mu).$$

Demostración Lo que queremos ver es que si $f \in L^r \Rightarrow f \in L^p$, o lo que es lo mismo

$$\int_X |f|^r \, d\mu < \infty \Rightarrow \int_X |f|^p \, d\mu < \infty.$$

El caso $r = \infty$ es algo mas directo:

$$\|f\|_\infty < \infty \Rightarrow \int |f|^p \, d\mu \leq \int (\|f\|_\infty)^p \, d\mu = (\|f\|_\infty)^p \, \mu(X) < \infty.$$

Si $r < \infty$, entonces, por la desigualdad de Hölder para los índices $r/p > 1$ y su dual $r/(r-p)$,

$$\begin{aligned}\int |f|^p \, d\mu &= \int |f|^p \cdot 1 \, d\mu \\ &\overset{\substack{\text{Hölder}\\ \downarrow}}{\leq} \left(\int [\, |f|^p \,]^{\frac{r}{p}} \, d\mu \right)^{\frac{p}{r}} \left(\int |1|^{\frac{r}{r-p}} \, d\mu \right)^{\frac{r-p}{r}} = (\|f\|_r)^p \, \mu(X)^{\frac{r-p}{r}} < \infty\end{aligned}$$

■

En la demostración de este lema vemos que podemos dar una cota para $\|f\|_p$.

COROLARIO 2.9 *Si* μ *es una probabilidad y* $p < r < \infty$*, entonces* $\|f\|_p \leq \|f\|_r$*.*

2.3. Espacios de sucesiones ℓ^p

Consideramos el espacio de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, donde

- $X = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$,
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$,
- $\mu =$ medida de contar en X,

junto con la noción de integral correspondiente:

$$\int_X |f|^p \, d\mu = \sum_{n \in X} |f(n)|^p$$

Nota: Escribiremos $L^p(\mathbb{N}, d\mu)$ para denotar a la clase anterior, teniendo en cuenta que también podemos considerar $L^p(\mathbb{Z}, d\mu)$ de manera similar.

Observación: El único conjunto de medida 0 es el $\emptyset$. Entonces la condición *c.t.p.* equivale a decir *t.p* (todo punto).

Como toda función $f : X \longmapsto \mathbb{C}$ se puede identificar con una sucesión $\{a_n = f(n)\}$, se tiene que

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ tal que } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\},$$

$$L^p(\mathbb{Z}, d\mu) = \left\{ a = \{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{ tal que } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

Y para $p = \infty$

$$L^p(\mathbb{N}, d\mu) = \{ \text{ sucesiones acotadas } \},$$

$$L^p(\mathbb{Z}, d\mu) = \{ \text{ sucesiones acotadas } \}.$$

Denotaremos estos espacios por ℓ^p, distinguiendo $\ell^p(\mathbb{N})$ y $\ell^p(\mathbb{Z})$.

PROPOSICIÓN 2.10 *Si $0 < p \leq \infty$, ℓ^p es un espacio métrico completo. Y si $1 \leq p \leq \infty$ entonces ℓ^p es un espacio de Banach.*

Demostración No hay que probar nada porque ya lo hemos hecho para el caso general. ■

Veamos ahora como queda la desigualdad de Hölder para los espacios ℓ^p:

$$\sum |a_n\, b_n| \leq \left(\sum |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum |b_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

2.4. Escala de los espacios ℓ^p

Sea $a = \{a_n\} \in \ell^p$ ($\sum |a_n|^p < \infty$). Entonces $\lim a_n = 0$, y en particular la sucesión $\{a_n\}$ esta acotada (es decir, $a \in \ell^\infty$). Esto prueba directamente el siguiente

LEMA 2.11 *$\ell^p \subset \ell^\infty$ para todo $p \in (0, \infty)$.*

Además se tiene

PROPOSICIÓN 2.12 *Si $0 < p < r \leq \infty$, entonces $\ell^p \subset \ell^r$.*

Aunque parezca lo contrario esto no contradice el lema 2.8, ya que la medida que consideramos no es finita.

Demostración Para el caso $r = \infty$ ya está visto. Veámoslo para $r < \infty$. Sea $a = \{a_n\} \in \ell^p$. Lo que vamos a probar es que $\|a\|_r \leq \|a\|_p$.

Sea $m = \|a\|_p = (\sum_n |a_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Llamamos $c_n = \frac{|a_n|}{m} \in [0, 1]$.

$$\sum_n \left(\frac{|a_n|}{m}\right)^r = \sum_n |c_n|^r \underset{|c_n|\le 1 \Rightarrow (c_n)^r \le (c_n)^p}{\underset{\uparrow}{\le}} \sum_n |c_n|^p = \sum \left(\frac{|a_n|}{m}\right)^p = \frac{m^p}{m^p} = 1.$$

Esto nos dice que $\sum |a_n|^r \le m^r$ y por tanto $\|a\|_r \le m$. ■

2.5. Espacio de sucesiones $\mathcal{C}_0$

$$\mathcal{C}_0 = \left\{ a = \{a_n\} \text{ tal que } \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = 0 \right\}.$$

LEMA 2.13 *$\ell^p \subset \mathcal{C}_0 \subset \ell^\infty$, si $p < \infty$.*

Demostración Este resultado es consecuencia del hecho de que si una sucesión tiene limite, entonces esta acotada. ■

Ejercicio 2.6 *Probar que $\mathcal{C}_0$ es un subespacio cerrado de ℓ^∞, es decir*

- *$\mathcal{C}_0$ es un espacio vectorial.*
- *es normado y completo (con respecto a la norma del supremo: $\|a\|_\infty = \sup\{|a_n|\}$).*

2.6. Desigualdad de Jensen

En esta sección estudiamos una desigualdad que generaliza la ya vista de Hölder. Primero damos la siguiente

DEFINICIÓN 2.7 *Se dice que $\varphi : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ es convexa si $\forall\, u, v \in [a,b]$ con $a \le u < v \le b$ y $\forall\, t \in [0,1]$ se tiene que $\varphi(t\,u + (1-t)\,v) \le t\,\varphi(u) + (1-t)\,\varphi(v)$.*

Ejercicio 2.7 *Probar que si φ es convexa e un intervalo abierto, entonces es continua en dicho intervalo.*

PROPOSICIÓN 2.14 (Desigualdad de Jensen) *Sea $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de probabilidad y $\varphi : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$ una función convexa. Entonces dada una función $f : X \longmapsto [a,b]$ medible, se tiene que*

$$\varphi\left(\int f\,d\mu\right) \le \int \varphi \circ f\,d\mu.$$

Observación:

1. φ convexa $\Rightarrow$ φ continua (y por tanto medible).
2. $a \le f(x) \le b \Rightarrow a \le \displaystyle\int f\,d\mu \le b$ (es decir, tiene sentido hacer $\varphi(\displaystyle\int \ldots)$).

De la definición se deduce que una función φ es convexa en un intervalo $\Leftrightarrow$ para toda terna de puntos $x < y < z$ de su dominio, $\varphi(y)$ esta por debajo del segmento que une los puntos $(x, \varphi(x))$ y $(z, \varphi(z))$.

Ejercicio 2.8 *Probar que φ es convexa $\Leftrightarrow \forall\, a < s_0 < b$ existe una recta que pasa por el punto $(s_0, \varphi(s_0))$ que queda por debajo de la gráfica.*

Procedemos ahora a probar la desigualdad de Jensen.
Demostración Sea $s_0 = \displaystyle\int f\, d\mu$. Por ser convexa la función φ, $\exists\, m \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(s) \geq \varphi(s_0) + m(s - s_0)$. Tomando $s = f(x)$, queda que $\varphi(f(x)) \geq \varphi(s_0) + m(f(x) - s_0)$, $\forall\, x \in X$. Integrando tenemos

$$\int \varphi(f(x))\, d\mu \geq \varphi(s_0) + m\left(\int f(x)\, d\mu - s_0\right) = \varphi(s_0).$$

■

Ejemplos:

1. $exp\left(\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx\right) \leq \displaystyle\int_0^1 exp\,(f(x))\, dx$, con $\varphi(x) = exp\,(x) = e^x$ y μ la medida de Lebesgue en $[0, 1]$.

2. $\left(\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|\, e^{-x}\, dx\right)^2 \leq \displaystyle\int_0^\infty |f(x)|^2\, e^{-x}\, dx$, con $X = (0, \infty)$ y $d\mu = e^{-x}\, dx$.

3. Otra demostración del lema 2.8:
   Si $f \in L^r$ y $p < r$ entonces la función $\varphi(t) = t^{r/p}$ es convexa y se tiene

$$\int_X |f|^p\, d\mu = \mu(X)\left[\int |f|^p \frac{d\mu(x)}{\mu(X)}\right]^{\frac{r}{p}\cdot\frac{p}{r}} \overset{\text{Jensen}}{\underset{\downarrow}{\leq}} \mu(X)\left[\int |f|^r \frac{d\mu(x)}{\mu(X)}\right]^{\frac{p}{r}} < \infty,$$

   etc.

2.7. Aproximación por funciones continuas en L^p

Nota: A lo largo de esta sección, trabajaremos en el espacio de medida $(\mathbb{R}, dx)$, siendo dx la medida de Lebesgue.

TEOREMA 2.15 *Dados $0 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}, dx)$ y $\epsilon > 0$, existe una función $g \in \mathcal{C}_c$ (la clase de las funciones continuas con soporte compacto) tal que $\|f - g\|_p < \epsilon$.*

En términos topológicos este teorema nos dice que $\mathcal{C}_c$ es una clase densa en $L^p(\mathbb{R}, dx)$, si $p < \infty$.

Observación:

1. $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R}, dx)$ porque si $g \in \mathcal{C}_c$, entonces g esta acotada ($|g| \leq M$) para todo x. Si además $sop\, g = K$ compacto, entonces $\mu(K) < \infty$ y se tiene $|g(x)| \leq M\, \chi_K(x) \in L^p(\mathbb{R}, dx)$.

2. El caso $p = \infty$ es falso.

Antes de dar la demostración, enunciamos un resultado que emplearemos en ella.

LEMA 2.16 *Dados V abierto y K compacto, con $K \subset V$, $\exists$ una función $g \in \mathcal{C}_c$ tal que $\chi_K(x) \leq g(x) \leq \chi_V(x)$.*

Procedemos ahora a dar la demostración del teorema anterior. Desarrollaremos la prueba en varios pasos.

Paso I: las funciones simples forman una clase densa en L^p.

Para ello, podemos suponer que $f \geq 0$ porque si $f = u + i\, v$ con u y v reales, entonces $f = (u^+ - u^-) + i\,(v^+ - v^-)$ y basta resolverlo para cada una de las funciones u_-, u_+, v_-, v_+.

$f \geq 0 \Rightarrow \exists$ una sucesion de funciones simples $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \longrightarrow f$. Entonces $f(x) - s_n(x) \longrightarrow 0$ decreciendo $\Rightarrow (f - s_n)^p \searrow^{n\to\infty} 0$.

Por monotonía, teniendo en cuenta que $\displaystyle\int |f|^p < \infty$, se tiene que

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int |f - s_n|^p = \lim_{n\longrightarrow\infty} (\|f - s_n\|_p)^p = 0.$$

Paso II: basta probar que $\forall\, A$ medible Lebesgue con $\mu(A) < \infty$ y $\forall\, \epsilon > 0$, existe $g \in \mathcal{C}_c$ tal que $\|\chi_A - g\|_p < \epsilon$, porque si eso es así, dada $s = \sum_{j=1}^m c_j\, \chi_{A_j}$ simple y $\epsilon' > 0$, entonces existe $g_j \in \mathcal{C}_c$ tal que $\|\chi_{A_j} - g_j\|_p \leq \epsilon'$, y por tanto $g = \sum_{j=1}^m c_j\, g_j \in \mathcal{C}_c$ y cumple $\|g - s\| = \|\sum_{j=1}^m c_j\,(\chi_{A_j} - g_j)\| \leq \sum |c_j|\, \|\chi_{A_j} - g_j\| < \sum |c_j|\, \epsilon' \leq \epsilon \Rightarrow \epsilon' = \frac{\epsilon}{\sum |c_j|}$.

Paso III: Finalmente, para demostrar lo anterior, sea $A \subset \mathbb{R}$ medible Lebesgue y $\mu(A) < \infty$. Como la medida de Lebesgue es regular, dado $\epsilon > 0$, existen V abierto y K compacto, con $K \subset A \subset V$ tal que $\mu(V \backslash K) < \epsilon$. Entonces, utilizando el lema, $\exists$ $g \in \mathcal{C}_c$ tales que $\chi_K \leq g \leq \chi_V$ y por tanto $|\chi_A - g| \leq \chi_V - \chi_K$. Concluimos viendo que entonces

$$\int |\chi_A - g|^p \leq \int |\chi_{V\backslash K}|^p = \mu(V\backslash K) \leq \epsilon.$$

$\blacksquare$

Nota: Por lo visto en el Paso III, el teorema es cierto para todo espacio topológico y de medida, X, para el cual el lema 3.7 sea cierto y la medida μ sea regular.

Para terminar, damos ahora la demostración del lema:
Demostración del lema 3.7: Si V es abierto, entonces $V = \bigcup I_j$ es la union de sus componentes conexas disjuntas (que también son abiertos). Si K es un compacto, entonces $K \bigcap I_j \neq \emptyset$ para un numero finito de los I_j.

Si $K_j = K \bigcap I_j$ basta encontrar una función $g_j \in \mathcal{C}_c$ tal que $\chi_{K_j} \leq g_j \leq \chi_{I_j}$ y hacer entonces $g = \sum g_j$.

Sea $I = (\alpha, \beta)$ un intervalo abierto $K \subset I$ un compacto, con $a = \inf K$ y $b = \sup K$. Entonces $b < \beta$ y $\alpha < a$. Elegimos $\epsilon > 0$ tal que $(a - \epsilon, b + \epsilon) \subset I$.

La siguiente función cumple con las hipótesis que necesitamos:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a-\epsilon, b+\epsilon] \\ \text{interpolacion lineal,} & \text{resto de los casos.} \end{cases}$$

■

Observación: Como resumen, en la demostración de que la clase $\mathcal{C}_c$ es densa en $L^p(\mathbb{R}, dx)$ hemos usado únicamente lo siguiente:

- Hemos hecho primero una aproximación por funciones simples $\sum c_j \chi_{A_j}$.
- Hemos usado que cada conjunto A medible se puede aproximar en medida por abiertos $V \supset A$ y por compactos $K \subset A$ (es decir, que la medida es regular).
- El lema 2.7.

Con esta observación en mente nos fijamos en el siguiente resultado:

LEMA 2.17 (Lema de Urysohn) *Si X es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto, entonces dados un compacto K y un abierto V, $K \subset V$, existe una función $g \in \mathcal{C}_c$ tal que $\chi_K \leq g \leq \chi_V$.*

Encontramos así la generalización del teorema

TEOREMA 2.18 *Si X es un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto y existe una medida μ que es regular con respecto a la topología de X, entonces $\mathcal{C}_c$ es denso en $L^p(X, d\mu)$, con $p < \infty$.*

La estructura topológica de $\mathbb{R}$ es mucho más rica y nos permite de hecho dar un resultado más fuerte en el que sustituiremos la clase $\mathcal{C}_c$ por la de $\mathcal{C}_c^\infty$:

TEOREMA 2.19 *En $(\mathbb{R}, dx)$ la clase $\mathcal{C}_c^\infty$ es densa en cualquier $L^p(dx)$ con $p < \infty$.*

Demostración Por el argumento anterior solo hace falta probar que dados K compacto y V abierto cualesquiera, con $K \subset V$, entonces $\exists\ g \in \mathcal{C}_c^\infty$ tal que $\chi_K \leq g \leq \chi_V$. Esto se deduce del siguiente

LEMA 2.20 *Dados $a < b$ y $\epsilon > 0$, existe $g : \mathbb{R} \to [0,1]$, con $g \in \mathcal{C}^\infty$, de forma que*

$$g(x) = \begin{cases} 1, & en\ [a,b] \\ 0, & en\ \mathbb{R} \setminus [a-\epsilon, b+\epsilon]. \end{cases}$$

Demostración Basta encontrar $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ tal que $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ y

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Si eso es así, dados a, b y $\epsilon > 0$, podemos construir las funciones $\varphi\left(\frac{x-b}{\epsilon}\right)$ y $\varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$. Ahora es fácil concluir que la la función $g = \varphi\left(\frac{x-b}{\epsilon}\right) \cdot \varphi\left(\frac{a-x}{\epsilon}\right)$ cumple los requisitos impuestos.

Construimos ahora φ. Para ello consideramos la función

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

Es fácil ver que $\psi \in \mathcal{C}^\infty$, ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ y $x > 0$ se tiene $\left(\frac{d^k}{dx^k}\right)\psi(x) = P(\frac{1}{x}) \cdot \psi(x)$ para cierto polinomio P y $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{P(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{y \longrightarrow \infty} \dfrac{P(y)}{e^y} = 0$. Observamos ahora que

$$h(x) = e^{-1} - \psi(x) = \begin{cases} e^{-1}, & x \leq 0 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

Además, $h(x) < 0$, si $x > 1$.

Entonces tenemos que

$$\psi(h(x)) = \begin{cases} \psi(e^{-1}) = e^{-e}, & x \leq 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

Finalmente elegimos $\varphi(x) = e^e \psi(h(x))$ que es $\mathcal{C}^\infty$ porque tanto ψ como h lo son. ■

Capítulo 3

El problema de la convergencia

En este capitulo recopilamos los distintos tipos de convergencia que hemos visto hasta ahora y establecemos relaciones entre ellos. Asimismo, estudiamos diversos procesos en matemáticas cuya resolución está directamente relacionada con un resultado de convergencia.

Tipos de convergencia.

La expresión $f_n \to f$ puede significar:

Puntual: $\lim f_n(x) = f(x)$ *c.t.p.*

Uniforme: $\|f_n - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

En norma: $\|f_n - f\|_p \longrightarrow 0$.

En medida: $\mu(\{x : |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}) \longrightarrow 0$.

Veamos que relación hay entre ellas:

- conv. puntual + dominación $\Rightarrow$ conv. en norma L^p, con $p < \infty$

$$\left.\begin{array}{l} f_n(x) \longrightarrow f(x) \text{ c.t.p.} \\ |f_n| \leq F \in L^p \end{array}\right\} \Rightarrow \|f_n - f\|_p \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- conv. en norma $\Rightarrow$ conv. puntual de una subsucesión (es el corolario 2.1).
- conv. en norma $\Rightarrow$ conv. en medida (desigualdad de Chebyshev).
- conv. en medida $\Rightarrow$ conv. puntual de una subsucesión (ejercicio #7 de la Hoja 1).

LEMA 3.1 *Si $\mu(\Omega) < \infty$, entonces conv. uniforme (L^∞)* $\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{conv. en norma } L^p \textit{ con } p < \infty \\ \textit{conv. puntual c.t.p.} \end{array}\right.$
Además, en este caso también se tiene conv. puntual c.t.p. $\Rightarrow$ conv. en medida

3.1. Algunos ejemplos que involucran procesos de convergencia

En lo que queda de este capítulo consideraremos únicamente como dominios de nuestras funciones dos espacios: $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \{$funciones 1-periodicas$\}$. En este segundo caso

$$L^p(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{C} \text{ medibles y 1-periodicas y tales que } \int_0^1 |f|^p < \infty \right\} /\mathcal{R}.$$

3.1.1. La ecuación de Laplace en el disco unidad

Este ejemplo está relacionado con lo visto en la introducción (Capítulo 1):

Consideremos (en coordenadas polares) la ecuación de Laplace en el disco unidad con dato inicial f (una función 1-periódica)

$$\begin{cases} \Delta u(r,x) = 0, & \text{si } r < 1, \\ u(1,x) = f(x). \end{cases}$$

Puesto que el laplaciano en polares viene dado por $\Delta = \partial^2_{rr} + \frac{1}{r}\partial_r + \frac{1}{4\pi^2 r^2}\partial^2_{xx}$, es fácil ver que las funciones de la forma

$$u_n(r,x) = ar^{|n|}\, e^{2\pi i n x}, \quad a \in \mathbb{C},$$

satisfacen $\Delta u_n = 0$. Como hiciera Fourier con la ecuación de la cuerda vibrante, parece lógico considerar soluciones que vengan dadas por la suma infinita de estas u_n

$$u(r,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, r^{|n|}\, e^{2\pi i n x}. \tag{3.1}$$

Al hacer $r \to 1^-$ observamos que el dato inicial vendría dado por

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\, e^{2\pi i n x} \tag{3.2}$$

cuyos coeficientes estarían determinados por la fórmula

$$a_n = \int_0^1 f(y)\, e^{-2\pi i n y}\, dy,$$

ya que el sistema de funciones $\{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es ortonormal.

Observaciones

1. Si la función f pertenece al espacio $L^1(\mathbb{T})$, es decir a la clase de funciones 1-periódicas e integrables $[0,1]$, entonces los coeficientes a_n están acotados (de hecho, $|a_n| \leq \|f\|_1$) y por tanto la serie (3.1) tiene perfecto sentido.

2. La serie (3.2) que representa a la función f se denomina serie de Fourier de f y sus propiedades serán tema de debate de los capítulos 5 y 6.

3. De acuerdo con la definición dada en el ejercicio 1 de la hoja 2, la solución dada por (3.1) representa la sumación Abel de la serie de Fourier de f y, como ya se indica en dicho ejercicio, puede tener mejores propiedades de convergencia que ésta.

A continuación, damos una forma cerrada que describa mejor la función solución. Para ello, manipulando las distintas expresiones que aparecen, se tiene que

$$u(r,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 f(y)\, e^{-2\pi iny}\, dy \right) r^{|n|}\, e^{2\pi inx} = \int_0^1 f(y) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{2\pi in(x-y)} \right] dy.$$

Sea $P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{2\pi inx}$. Entonces lo que hemos obtenido se puede escribir como

$$u(r,x) = \int_0^1 f(y)\, P_r(x-y)\, dy.$$

Al igual que en el caso de la cuerda vibrante, el problema de nuevo es saber si se cumple $u(r,x) \overset{r\to 1^-}{\longrightarrow} f(x)$ y muy especialmente en que sentido (puntual, uniforme, norma L^p, medida).

DEFINICIÓN 3.1 *Dadas 2 funciones en un espacio (vectorial) de medida $(X, \mathcal{A}, \mu)$, se define su convolución como*

$$f * g(x) = \int_X f(y)\, g(x-y)\, d\mu(y).$$

En el caso μ la medida de Lebesge y $X = \mathbb{T}$ se tiene

$$f * g(x) = \int_0^1 f(y)\, g(x-y)\, dy,$$

mientras que si $X = \mathbb{R}$ tenemos

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, g(x-y)\, dy,$$

En ambos casos es fácil ver que la convolución es una operación conmutativa y, por Fubini, que si $f,\, g \in L^1$ entonces $f * g \in L^1$. Además $\|f * g\|_1 \le \|f\|_1 \|g\|_1$. (Ejercicio)

Conclusión: Con esta notación concluimos que la solución a la ecuación de Laplace con dato inicial f viene dada por

$$u(r,x) = f * P_r(x).$$

La familia de funciones $\{P_r\}_{0<r<1}$ se denomina **Núcleo de Poisson**. Por abuso de lenguaje se suele decir directamente que $P_r(x)$ es el núcleo de Poisson.

LEMA 3.2 *La función $P_r(x)$ viene dada en forma cerrada por la expresión:*

$$P_r(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\, e^{2\pi inx} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos 2\pi x}.$$

Demostración Usaremos simplemente que P_r viene dada por la suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{2\pi inx} = \sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{2\pi inx} + \sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{2\pi inx} = \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-2\pi inx} + \sum_{n=0}^{\infty}(r\cdot e^{2\pi ix})^n$$
$$= \frac{r\cdot e^{-2\pi ix}}{1-re^{-2\pi ix}} + \frac{1}{1-re^{2\pi ix}} = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos 2\pi x}.$$

■

Propiedades de P_r: Nos fijamos a continuación en alguna propiedades del núcleo de Poisson.

1. P_r es 1-periódica.
2. P_r es par.
3. $P_r(x) \geq 0, \quad \forall x$
4. $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} P_r(x)dx = 1, \quad \forall 0 < r < 1$, (i.e., la masa se conserva).
5. $\forall \delta \in (0,1/2)$ se tiene $\displaystyle\lim_{r\to 1^-} \int_{\delta<|x|<1/2} P_r(x)dx = 0$

Los tres primeros apartados son obvios. Para el cuarto usamos el siguiente argumento:

$$\int_{-1/2}^{1/2} P_r(x)dx = \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{2\pi inx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\int_{-1/2}^{1/2} r^{|n|}e^{2\pi inx}\,dx}_{*} = 1$$

Observamos que hemos intercambiado la integral con el sumatorio gracias al TCD y que de todas la integrales de $*$, la única que no se anula (y de hecho vale 1) es aquella que se da cuando $n = 0$, ya que

$$\int_{-1/2}^{1/2} e^{2\pi inx}\,dx = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Para el apartado 5 usaremos que P_r es par y decreciente en $(0,1/2)$. De esta forma

$$0 \leq \int_{\delta<|x|<1/2} P_r(x)dx = 2\int_{\delta}^{1/2} P_r(x)dx \leq P_r(\delta) = \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} \to 0, \quad \text{si} \quad r \to 1^-.$$

EJEMPLOS:

- En $\mathbb{R}$, la familia de funciones $g_r(x) = \dfrac{1}{2r}\chi_{(-r,r)}(x)$ cumple la propiedades 2-5 si sustituimos el límite $r \to 1^-$ por $r \to 0^+$. En este caso se tiene

$$g_r * f = \int g_r(y)\cdot f(x-y)\,dy = \frac{1}{2r}\int_{-r}^{r} f(x-y)\,dy = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)\,dt\,.$$

- Sea $G(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} e^{\frac{-x^2}{4}}$ y sea $G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} G(\frac{x}{\sqrt{t}})$. Entonces $\{G_t(x)\}_{t>0}$ cumple de nuevo las propiedades 2-5 para $t \to 0^+$, denominado núcleo del calor o núcleo de Gauss.

NOTA IMPORTANTE: Una de las propiedades mas interesantes de la convolución es que se puede utilizar para regularizar funciones. Si tomamos

- $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$,
- g una función "buena" (por ejemplo que sea de clase $\mathcal{C}^\infty$ y esté acotada tanto ella como sus derivadas),

entonces se tiene que $f * g \in \mathcal{C}^\infty$. Veamos por qué:

$$\frac{d}{dx}((g * f)(x)) = \int \frac{\partial}{\partial x}(f(y) \cdot g(x-y))\, dy = \int f(y) \cdot g'(x-y)\, dy = (f * g')(x),$$

y, por inducción, podemos probar que

$$D^k(f * g)(x) = f * (D^k g)(x).$$

El motivo por el que podemos meter la derivada dentro de la integral proviene del hecho de que

$$\left| \frac{\partial}{\partial x}(f(y) \cdot g(x-y)) \right| \leq K \cdot |f(y)| \in L^1,$$

siendo $K = \|g'\|_\infty$, y esto nos permite usar el TCD.

EJEMPLO: Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, por ejemplo, la función

$$u_t(x) = f * G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}} f(y)\, e^{\frac{-(x-y)^2}{4t}}\, dy \in \mathcal{C}^\infty.$$

NOTA: Imaginemos ahora una familia de funciones $\{g_n\} \subset \mathcal{C}^\infty$ como antes y que tengan la propiedad de que $g_n * f \longrightarrow f$, cuando $n \to \infty$. Entonces, lo que estamos haciendo es aproximar la función f por funciones $\mathcal{C}^\infty$. Con ese fin introducimos el siguiente concepto:

3.1.2. Núcleos de sumabilidad

DEFINICIÓN 3.2 (Núcleos de sumabilidad) *Dado $X = \mathbb{R}, \mathbb{T}$, diremos que la familia $\{K_r\}_{a<r<b}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to b^-$ o $r \to a^+$, respectivamente, si cumple*

1. $K_r(x) \geq 0, \ \forall r, \forall x \in X.$
2. $\int_X K_r(x) = 1, \ \forall r.$
3. $\forall \delta > 0, \ \int_{|x|>\delta} K_r \, dx \longrightarrow 0,$ *cuando $r \to b^-$ o, respectivamente, $r \to a^+$.*

Observaciones: Para las aplicaciones que se van a ver a continuación, en la definición de núcleo se sumabilidad podemos sustituir *1* por la condición $\int |K_r(x)|\,dx \leq C,\ \forall\, r$. En ese caso, el integrando del apartado *3* debe considerarse en valores absolutos. También podemos suponer que la familia es discreta ($r \in \mathbb{N}$) y en este caso el límite hay que tenerlo en cuenta cuando $r \to \infty$.

Ejercicio 3.1 *Sea* $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ *con* $\int \varphi\,dx = 1$ *y sean* $\varphi_t(x) = \frac{1}{t}\varphi(x/t)$ *y* $\varphi^R(x) = R \cdot \varphi(R \cdot x)$. *Probar que* $\{\varphi_t\}_{t>0}$ *es un núcleo para* $t \to 0^+$ *y que* $\{\varphi^R\}_{R>0}$ *también lo es para* $R \to \infty$.

El resultado principal que veremos en este contexto es el siguiente:

TEOREMA 3.3 *Sea* $\{K_r\}_{a<r<b}$ *un núcleo de sumabilidad para* $r \to b^-$ *o* $r \to a^+$. *Entonces*

1. *si* f *es continua en* x_0 *y acotada,* $\lim_{r \longrightarrow b^-} (K_r * f)(x_0) = f(x_0)$.
2. *si* f *es uniformemente continua y acotada, entonces* $K_r * f \longrightarrow f$ *uniformemente (es decir,* $\|K_r * f - f\|_\infty \longrightarrow 0$*).*
3. *si* $f \in L^p$*, con* $1 \leq p < \infty$*, entonces* $K_r * f \longrightarrow f$ *en norma* L^p ($\|K_r * f - f\|_p \longrightarrow 0$).

Para probar el apartado *3*, necesitaremos el siguiente resultado:

LEMA 3.4 *Dado* $h \in \mathbb{R}$*, sea* $\tau_h f(x) = f(x-h)$. *Entonces,* $\forall\, p < \infty$*, si* $f \in L^p$*,*

$$\|\tau_h f - f\|_p \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Ejercicio 3.2 *Probar este resultado. (Para ello usar que la clase* $\mathcal{C}_c$ *es densa en* L^p*).*

Demostración del teorema: Lo haremos de forma esquemática para cada uno de los apartados:

1.

$$\begin{aligned}(K_r * f)(x_0) - f(x_0) &= \left[\int K_r(y)\cdot f(x_0-y)\,dy\right] - f(x_0)\underbrace{\int K_r(y)\,dy}_{=1}\\ &= \int K_r(y)[f(x_0-y)-f(x_0)]\,dy = \int_{|y|<\delta} K_r(y)[f(x_0-y)-f(x_0)]\,dy\\ &+ \int_{|y|>\delta} K_r(y)[f(x_0-y)-f(x_0)]\,dy = I_1 + I_2\end{aligned}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|y| < \delta \Rightarrow |f(x_0-y) - f(x_0)| < \epsilon'$ y para ese δ, $\exists\, r_0$ tal que si $r > r_0$, entonces $\int_{|y|>\delta} |K_r(y)|\,dy < \epsilon'$. Por tanto

- $|I_1| \le \int_{|y|<\delta} |K_r(y)|\,\epsilon'\,dy \le C\cdot\epsilon'$
- $|I_2| \le \int_{|y|>\delta} |K_r(y)|\,2\,\|f\|_\infty \le 2\,\|f\|_\infty\,\epsilon'$

Tomando $\epsilon' < \dfrac{\epsilon}{C+2\,\|f\|_\infty}$ queda que $|(K_r * f)(x_0) - f(x_0)| \le \epsilon$.

ii) Si f es uniformemente continua, δ no depende de x_0 y por tanto, en este caso, $\forall\,\epsilon > 0$, $\exists\, r_0$ tal que si $r > r_0$, entonces $\sup|(K_r * f)(x_0) - f(x_0)| \le \epsilon$, es decir, $\|K_r * f - f\|_\infty \longrightarrow 0$.

iii) Para $p = 1$:

$$\|K_r * f - f\|_{L^1} = \int \left|\int K_r(y)(f(x-y) - f(x))\,dy\right| dx \underset{\text{Fubini}}{\le}$$

$$\le \int |K_r(y)| \underbrace{\left[\int |f(x-y) - f(x)|\,dx\right]}_{\|\tau_y f - f\|_{L^1}} dy = \int_{|y|<\delta} \dots + \int_{|y|>\delta} \dots = \star$$

Por el lema 3.4, dado $\epsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$, entonces $\|\tau_h f - f\|_{L^1} < \epsilon'$ y por la propiedad *3* de núcleo de sumabilidad $\exists\, r_0 \le r$ tal que $\displaystyle\int_{|y|>\delta} |K_r(y)|\,dy < \epsilon'$, y entonces

$$\star \le \epsilon'\,C + \epsilon'\,2\,\|f\|_{L^1} < \epsilon \text{ si } \epsilon' = \frac{\epsilon}{C + 2\,\|f\|_{L^1}}$$

■

Para el caso $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, usaremos que $\|K_r * f - f\|_p \le \displaystyle\int |K_r(y)|\|\tau_y f - f\|_p\,dy$. Esto es consecuencia de la siguiente desigualdad integral de Minkowski.

LEMA 3.5 (Desigualdad integral de Minkowski) *Dada una función $F : X\times Y \longmapsto \mathbb{R}$ medible, entonces*

$$\left\|\int_Y |F(\cdot,y)|\,d\mu(y)\right\|_{L^p(d\mu(x))} \le \int_Y \|F(\cdot,y)\|_{L^p(d\mu(x))}\,d\mu(y)$$

EJEMPLOS: Damos a continuación algunos ejemplos de núcleos de sumabilidad:

- En $\mathbb{T}$, $P_r(x) = \dfrac{1-r^2}{1+r^2-2\cos 2\pi x}$ es un núcleo de sumabilidad para $r \to 1^-$.
- Si $\varphi \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ y $\displaystyle\int \varphi\,dx = 1$, entonces $\{\frac{1}{t}\varphi(\frac{x}{t})\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad para $t \to 0^+$.

- Como caso particular del anterior, tenemos $\varphi = \frac{1}{2}\chi_{(-1,1)}$. Entonces $\varphi_r = \frac{1}{2r}\chi_{(-r,r)}$ y por tanto, dada $f \in L^p$, tenemos que

$$(\varphi_r * f)(x) = m_r f(x) = \int_{x-r}^{x+r} \frac{1}{2r} f(y)\, dy.$$

3.2. El teorema de diferenciación de Lebesgue

El teorema de núcleos de sumabilidad aplicado al último ejemplo anterior nos da el siguiente resultado:

$$m_r f \longrightarrow f \begin{cases} \text{en norma } L^p \\ \text{puntualmente si } f \text{ es continua y acotada} \end{cases}$$

Sin embargo, el teorema de diferenciación de Lebesgue nos dice que de hecho hay convergencia puntual en *c.t.p.* si $f \in L^p$, $p \geq 1$, (para ello no hace falta que esté acotada).

Recordamos primero algunos resultados clásicos de la integración Riemann ...

TEOREMA 3.6 (Teorema Fundamental del cálculo, Newton-Leibniz) -

1. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *acotada e integrable Riemann. Entonces, la función* $F(x) = \int_a^x f(u)du$ *es continua.*
2. *Sean* f *y* F *como en el apartado 1. Si* f *es continua en* x_0*, entonces* F *es derivable en* x_0 *y* $F'(x_0) = f(x_0)$*.*
3. *Sea* $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*, de clase* C^1*. Entonces se tiene:* $F(a) + \int_a^x F'(u)du = F(x)$*.*

... y uno de la Teoría de la Medida de Lebesgue:

TEOREMA 3.7 (Derivación dentro del signo integral) *Sean* $(X, \mathcal{M}, \mu)$ *un espacio de medida y* $f : X \times [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$*. Supongamos que* $f^t \in L^1(d\mu)$ $\forall t$ *y definamos*

$$F(t) = \int_X f^t(x)d\mu(x) = \int_X f(x,t)d\mu(x).$$

1. *Si* f_x *es continua en* t_0 $\forall x$*, y* $\exists g \in L^1(d\mu)$ *tal que* $|f^t(x)| \leq g(x), \forall x, \forall t$*, entonces* F *es continua en* t_0*.*
2. *Si* $\exists \frac{\partial f}{\partial t}$ $\forall t$ *y* $\exists g \in L^1(d\mu)$ *con* $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g(x)$ $\forall t$*,* $\forall x$*, entonces* $\exists F'(t)$ *y se tiene:*

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_X f(x,t)d\mu(x)\right) = \int_X \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu(x).$$

La demostración de este último es en ambos casos una consecuencia del T.C.D.

Demostración:

1. Sea $\{t_n\}$ una sucesión arbitraria que converge a t_0. Definimos $g_n(x) = f^{t_n}(x)$. Si f_x es continua en t_0, $\forall x$

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} g_n(x) = \lim_{n\longrightarrow\infty} f(x,t_n) = f(x,t_0) \quad \forall x$$

   Como además $|g_n(x)| \leq g(x) \in L^1(d\mu)$, $\forall n$, por el TCD,

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} F(t_n) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X g_n(x)d\mu(x) \overset{T.C.D.}{=} \int_X f(x,t_0)d\mu(x) = F(t_0)$$

   luego F es continua en t_0.

2. Sea de nuevo $t_n \longrightarrow t_0$ arbitraria ($t_n \neq t_0$), definimos: $h_n(x) = \dfrac{f(x,t_n) - f(x,t_0)}{t_n - t_0}$. Claramente h_n es medible y $\exists \lim_{n\longrightarrow\infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t_0)$, que también es medible.

   Por el teorema del valor medio, $\forall x$, $\exists s$ tal que $h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s)$ y, por hipótesis, deducimos $|h_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \, \forall x$.

   Aplicando de nuevo el TCD, concluimos,

$$F'(t_0) = \lim_{n\longrightarrow\infty} \frac{F(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n\longrightarrow\infty} \int_X h_n(x)d\mu(x) \overset{T.C.D.}{=} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x,t_0)d\mu(x).$$

Q.E.D.

Veamos a continuación la extensión natural del apartado 2 del Teorema Fundamental del Cálculo

TEOREMA 3.8 (Teorema de diferenciación de Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ y definimos $F(x) = \int_a^x f(u)du$, entonces F es diferenciable en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue [escribimos c.t.p.(dx)] y además $F'(x) = f(x)$ en c.t.p. (dx).*

DEFINICIÓN 3.3 *Dada $f \in L^1(d\mu)$ se define el* ***conjunto de puntos de Lebesgue de*** *f, denotado $\mathcal{L}_f$, como:*

$$\mathcal{L}_f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{h\longrightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(u) - f(x_0)|du = 0 \right\}$$

Ejercicio: Probar que si f es continua entonces $\mathcal{L}_f = \mathbb{R}$ (es decir, todo $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de Lebesgue de una función continua).

Demostración del Teorema de diferenciación de Lebesgue.

Se trata de probar que

$$F'(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u)du = \lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} f(u)du = f(x) \qquad c.t.p.\ (dx),$$

pero esto es lo mismo que

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x))du = 0 \qquad c.t.p.\ (dx),$$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} (f(u) - f(x))du = 0 \qquad c.t.p.\ (dx).$$

Como

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x))du \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)|\, du,$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x} (f(u) - f(x))du \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)|\, du,$$

el resultado se sigue de probar que la medida de Lebesgue de $\mathcal{L}_f^c$ es cero ($|\mathcal{L}_f^c| = 0$); es decir, que c.t.p. x es punto de Lebesgue de f.

Sea, para $h > 0$,

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)|du.$$

Queremos ver que

$$\limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) = 0, \qquad c.t.p.\ x$$

(y el resultado es cierto, por el ejercicio anterior, para funciones continuas, $\forall x$.)

Como

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \ :\ \limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \frac{1}{n} \right\},$$

basta probar que dado $\lambda > 0$ cualquiera, el conjunto

$$A_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R} \ :\ \limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \lambda \right\},$$

tiene medida cero.

Para ello definimos el siguiente **Operador de Hardy-Littlewood**:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)|du,$$

y usaremos el siguiente resultado:

TEOREMA 3.9 (Desigualdad de Hardy-Littlewood) *Si $f \in L^1$ y $\lambda > 0$, se tiene*

$$|\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int |f(x)|dx.$$

Para terminar con la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue, tomamos una función continua (e integrable) g cualquiera. Se tiene

$$m_h(f)(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - g(u)|du + \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |g(u) - g(x)|du + |g(x) - f(x)|.$$

Tomando límites

$$\limsup_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) \leq \mathcal{M}(f-g)(x) + |f(x) - g(x)|.$$

Por tanto

$$A_\lambda \subset \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ \mathcal{M}(f-g) > \frac{\lambda}{2}\right\} \bigcup \left\{x \in \mathbb{R} \ : \ |f(x) - g(x)| > \frac{\lambda}{2}\right\}.$$

Usando las desigualdades de Hardy-Littelwood y Chebychev

$$|A_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda/2} \int |f-g|dx + \frac{1}{\lambda/2} \int |f-g|dx = \frac{6}{\lambda} \int |f-g|dx$$

y esto para cualquier función g continua e integrable. Usando ahora el lema de aproximación, dado $\epsilon > 0$, elegimos g continua e integrable tal que

$$\int |f-g|dx \leq \epsilon \cdot \frac{\lambda}{6}$$

De esta forma obtenemos $|A_\lambda| \leq \epsilon, \quad \forall \epsilon > 0$, y por tanto $|A_\lambda| = 0$.

Q.E.D.

Demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood.

Si $\mathcal{M}f(x) > \lambda$, entonces existe un intervalo abierto I centrado en x ($I = (x-h, x+h)$) tal que

$$(\star) \qquad \frac{1}{|I|} \int_I |f|du > \lambda.$$

(En particular $|I| < \frac{1}{\lambda} \int_I |f|du$).

Por tanto

$$\{x \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\} \subset \bigcup \left\{I \ : \ \frac{1}{|I|} \int_I |f|du > \lambda\right\} = D_\lambda,$$

y basta probar $|D_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f|du$.

Como la medida de Lebesgue es regular, es suficiente probar que para todo K, compacto, $K \subset D_\lambda$, se tiene

$$|K| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du.$$

Pero si $K \subset D_\lambda$ es compacto, existe un número finito de intervalos $I_1, I_2, ..., I_N$ que cumplen $(\star)$ y tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} I_j.$$

Podemos suponer que ningún I_j está contenido en la unión de los otros. Además los ordenamos de forma que si $I_j = (a_j, b_j)$ entonces $a_1 < a_2 < ... < a_N$.

Es fácil ver que en esta situación las familias $\{I_j\}_j$, j par e $\{I_j\}_j$, j impar, son de intervalos disjuntos. Deducimos entonces que cada punto $x \in \mathbb{R}$ está como mucho en dos intervalos I_j, es decir $\sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(x) \leq 2$
Finalmente

$$|K| \leq \sum_{j=1}^{N} |I_j| \leq \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| du = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| \sum_{j=1}^{N} \chi_{I_j}(u) du \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du, \qquad \textbf{q}.e.d.$$

Comentarios al Teorema de diferenciación de Lebesgue

DEFINICIÓN 3.4 *Se dice que una función medible, $f(x)$ es **Localmente integrable** si para todo conjunto acotado D, $f\chi_D$ (la restricción de f a D) es integrable. Escribiremos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$. Obsérvese que $L^p(\mathbb{R}, dx) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$*

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ son funciones localmente integrables pero <u>no</u> integrables.

<u>Observación</u>: El teorema de diferenciación de Lebesgue es cierto también para funciones localmente integrables.

Demostración:
Basta probar que si $f \in L^1_{loc}$, $\forall R$ el conjunto

$$\left\{ x \in (-R, R) \ : \ \limsup_{n \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\},$$

tiene medida cero, donde

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

Si llamamos $\widetilde{f} = f\chi_{[-2R,2R]}$, entonces $\widetilde{f} \in L^1$ y $\forall x \in (-R, R)$

$$\lim_{h \longrightarrow 0^+} m_h(f)(x) = \lim_{h \longrightarrow 0^+} m_h(\widetilde{f})(x) = 0 \quad c.t.p.$$

por el teorema habitual. **q.e.d.**

TEOREMA 3.10 (Teorema de diferenciación en $\mathbb{R}^n$) *Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n, dx)$, $p \geq 1$ entonces*

$$\lim_{r \longrightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y)dy = f(x) \quad c.t.p.$$

donde $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |y - x| < r\}$ (bola de radio r centrada en x).

La demostración sigue los mismos pasos que en dimensión $n = 1$, incluida la

Desigualdad de Hardy-Littlewood en $\mathbb{R}^n$:

Sea

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{B_r(x)} \int_{B_r(x)} |f(u)|du.$$

Entonces $\forall \lambda > 0$ se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx.$$

TEOREMA 3.11 *Si $\{K_r\}_r$ es un núcleo de sumabilidad y definimos el operador maximal*

$$K^* f(x) = \sup_{r>0} |K_r * f(x)|,$$

entonces si K^* verifica el Teorema de Hardy Littlewood en L^p $(1 \leq p < \infty)$, entonces

$$\lim_{r \to b^-} K_r * f(x) = f(x) \ c.t.p., \ \forall f \in L^p.$$

Caso particular:

LEMA 3.12 *Si $F : \mathbb{R} \longmapsto [0, \infty)$ es par y decreciente en $(0, \infty)$ entonces, $\forall f \in L^1$,*

$$|F * f(x)| \leq \|F\|_{L^1} \cdot Mf(x).$$

Conclusion: si el núcleo de sumabilidad está formado por funciones positivas, pares y decrecientes en $(0, \infty)$(e.g., el núcleo de Poisson, el de Gauss, etc.) entonces

$$K^* f(x) \leq Mf(x)$$

y por tanto hay convergencia puntual,

$$K_r * f(x) \longrightarrow f(x) \ c.t.p. \ \forall f \in L^p, \ 1 \leq p < \infty.$$

Capítulo 4

Espacios de Hilbert

En este capítulo queremos dar sentido a la noción de "serie de Fourier"

$$f(x) = \sum a_n \, e^{2\pi inx}, \qquad \text{con} \qquad a_n = \int_0^1 f(x) \, e^{-2\pi inx} dx.$$

Como veremos más adelante, el espacio natural en el que esta teoría se puede desarrollar es $L^2(\mathbb{T})$. Nuestra intención es conocer las propiedades métricas de este tipo de espacios y las técnicas relacionadas con ellos.

Comencemos recordando lo que la desigualdad de Hölder nos dice:

Si $f \in L^p(d\mu), g \in L^q(d\mu)$, y $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, entonces $\left| \int f \, g \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q$.

Esto implica, entre otras cosas, que la aplicación bilineal

$L^p(d\mu) \times L^q(d\mu) \longrightarrow \mathbb{C} \quad$ dada por $\quad (f, g) \longrightarrow \int f \, g \, d\mu$

es continua. Hay un caso especial, que es cuando ambos índices coinciden $p = q = 2$. Además se tiene:

LEMA 4.1 *La aplicación*

$$\begin{array}{rcl} L^2(d\mu) \times L^2(d\mu) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (f, g) & \longrightarrow & < f, g >= \int f \, \overline{g} d\mu \end{array}$$

tiene las propiedades siguientes:

1. $< f, f > \left(= \int |f|^2 \right) \geq 0 \quad$ *y* $\quad < f, f >= 0 \Leftrightarrow f = 0.$
2. $\overline{< f, g >} =< g, f >$
3. $\forall \, \alpha \in \mathbb{C}, < \alpha \, f, g >= \alpha \, < f, g >$
4. $< f_1 + f_2, g >=< f_1, g > + < f_2, g >$

NOTA: una aplicación con estas cuatro propiedades se denomina *sesquilineal.*

DEFINICIÓN 4.1 *Un espacio vectorial X sobre $\mathbb{C}$, dotado de una aplicación $<,>$ (que llamaremos producto interior o producto escalar) con las propiedades $1-4$ anteriores, se denomina **espacio pre-Hilbert**.*

NOTA: Si X es pre-Hilbert, también es normado con la norma dada por

$$\|u\|_X = \sqrt{< u, u >}. \tag{4.1}$$

En particular también es métrico.

DEFINICIÓN 4.2 *Si $(X, <,>)$ es pre-Hilbert y completo (i.e., toda sucesión de Cauchy tiene límite), entonces decimos que es un **espacio de Hilbert**.*

TEOREMA 4.2 *$L^2(d\mu)$, con respecto a cualquier medida, es un espacio de Hilbert.*

OBSERVACIÓN: Como veremos al final del capítulo, el recíproco también es cierto: si H es un espacio de Hilbert, entonces existe una medida μ tal que $H = L^2(d\mu)$, la igualdad en el sentido de los isomorfismos.

EJEMPLO: $\mathbb{R}^n = L^2(\{1, 2, \ldots, n\}, \mu =$ medida de contar).

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \longmapsto \mathbb{R}, \text{ siendo } f(j) = x_j.$$

Entonces tenemos que

$$\left(\int |f|^2 d\mu\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{N} |x_j|^2\right)^{1/2}, \quad \text{y} \quad < f, g >= \sum_{j=1}^{N} x_j\, y_j.$$

4.1. Desigualdad de Cauchy-Schwarz

Uno de los ingredientes para demostrar que la expresión (4.1) es una norma viene dado por

PROPOSICIÓN 4.3 *En todo espacio de pre-Hilbert H se tiene $\forall x, y \in H$*

$$| < x, y > | \leq \|x\|\, \|y\|.$$

Antes de dar la demostración, desarrollamos la expresión

$$\|x + y\|^2 =< x + y, x + y >= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\, Re\, (< x, y >)$$

Demostración (*Desigualdad de Cauchy-Schwarz*) Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ y supongamos que $x \neq 0$. Entonces

$$0 \leq \|\alpha\, x + y\|^2 = \|\alpha\, x\|^2 + \|y\|^2 + 2\, Re\, (\alpha < x, y >).$$

Si tomamos $\alpha = \frac{-\overline{<x,y>}}{\|x\|^2}$, entonces

$$0 \leq \frac{| < x, y > |^2}{\|x\|^4} \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \frac{| < x, y > |^2}{\|x\|^2}.$$

Despejando, queda
$$| < x, y > |^2 \leq \|x\|^2 \, \|y\|^2$$

■

Ejercicio 4.1 *Probar la ley del paralelogramo:*
$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

NOTA: recordemos que un subconjunto E de un espacio vectorial es convexo si $\forall\, x, y \in E$ y $\forall\, t \in [0, 1]$ se tiene que $t\, x + (1 - t)\, y \in E$.

PROPOSICIÓN 4.4 *Sea H un espacio de Hilbert y sea E convexo y cerrado. Entonces $\exists\, ! x_0 \in E$ tal que $dist\,(E, 0) = \inf\,\{\|x\| \ : \ x \in E\} = \|x_0\|$.*

Demostración Sea $m = \inf\{\|x\| : x \in E\}$. Sean $x, y \in E$, entonces por la ley del paralelogramo, $\|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4m^2$.

Elegimos $x_j \in E$ tal que $\|x_j\| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} m$. Para esta sucesión se tiene que
$$\|x_j - x_k\|^2 \leq 2\|x_j\|^2 + 2\|x_k\|^2 - 4m^2 \overset{k,j\to\infty}{\longrightarrow} 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0.$$

Luego $\{x_j\}$ es una sucesión de Cauchy, y por ser E cerrado, $\exists\, \lim x_j = x_0 \in E$. Además, $\|x_0\| = \lim \|x_j\| = m$. El x_0 es único ya que si $\exists\, y_0 \in E$ tal que $\|x_0\| = \|y_0\| = m$, entonces
$$\|x_0 - y_0\|^2 \leq 2\|x_0\|^2 + 2\|y_0\|^2 - 4m^2 = 2m^2 + 2m^2 - 4m^2 = 0 \Rightarrow x_0 = y_0.$$

■

COROLARIO 4.5 *Sea H un espacio de Hilbert y E un subespacio cerrado. Entonces, $\forall\, x \in H$, $\exists!\, x_E \in E$ tal que $dist\,(x, E) = \|x - x_E\|$.*

DEFINICIÓN 4.3 *Se dice que $x, y \in H$ son ortogonales (y escribimos $x \perp y$) si $< x, y >= 0$.*

DEFINICIÓN 4.4 *Si H es un espacio de Hilbert y $A \subset H$, se define el ortogonal de A como*
$$A^\perp = \{y \in H \, : y \perp x \text{ para todo } x \in A\}.$$

PROPOSICIÓN 4.6 *En un espacio de Hilbert H, $\forall\, A \subset H$ se tiene que $A^\perp$ es un subespacio cerrado.*

En la demostración de este teorema usaremos el siguiente lema:

LEMA 4.7 *Dado $u \in H$, la aplicación*

$$\begin{aligned} L_u : H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longrightarrow < x, u > \end{aligned}$$

es lineal y continua.

Demostración (*del lema*) Veamos que es lineal: $L_u(\alpha\, x_1 + \beta\, x_2) = \alpha_1\, L_u(x_1) + \beta\, L_u(x_2)$, por las propiedades del producto interior. Para ver la continuidad, probaremos que es Lipschitz:

$$|L_u(x_1) - L_u(x_2)| = |L_u(x_1 - x_2)| = |< x_1 - x_2, u >| \underset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \|u\|\, \|x_1 - x_2\|$$

■

Demostración (*de la proposición*) Dado $u \in H$, $\{u\}^{\perp} = \{y \in H :\ < y, u >= 0\} = \ker L_u$ es un espacio vectorial cerrado (porque es continua). Entonces

$$A^{\perp} = \bigcap_{x \in A} \{x\}^{\perp}$$

es un espacio vectorial cerrado. ■

Ejercicio 4.2

i) $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

ii) $A \subset \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

iii) $A \cap A^{\perp} \subset \{\overrightarrow{0}\}$ *para todo* $A \subset H$.

TEOREMA 4.8 (Descomposición en suma directa) *Sea M un subespacio cerrado del espacio de Hilbert H. Entonces podemos escribir $H = M \oplus M^{\perp}$, es decir, existen dos aplicaciones lineales (denominadas proyecciones)*

$$\begin{aligned} P : H &\longrightarrow M, \\ Q : H &\longrightarrow M^{\perp}, \end{aligned}$$

de forma que $\forall x \in H$, se cumple que $x = Px + Qx$. Además P y Q verifican la propiedad de "idempotencia": $P^2 = P$ y $Q^2 = Q$. En general escribiremos $P = P_M$ para indicar que se trata de la proyección sobre el espacio M.

NOTA: Si $u \perp v$, por el Teorema de Pitágoras se tiene

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

En particular, con la notación del Teorema, $\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2$.

Demostración Dado x, sea $Px \in M$ el único vector garantizado por el Corolario 4.5 tal que $dist\,(x, M) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in M\} = \|x - Px\|$. Definimos entonces $Qx = x - Px$ y vemos que P y Q cumplen los requisitos.

- Obviamente se tiene por la construcción de Q que $x = Px + Qx$.
- Veamos que $Qx \in M^{\perp}$

  Para ello sea $y \in M$. Queremos ver que $Qx \perp y$. Podemos suponer que $\|y\| = 1$. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ (a determinar). Como $Qx - \alpha\, y = x - Px - \alpha\, y \in x + M$, se tiene

  $$\|Qx\|^2 = \|x - Px\|^2 \leq \|Qx - \alpha\, y\|^2 = \|Qx\|^2 + |\alpha|^2 - 2Re\,\overline{\alpha} < Qx,\, y > \overset{\alpha = <Qx,y>}{=}$$

  $$= \|Qx\|^2 + |< Qx, y >|^2 - 2|< Qx, y >|^2.$$

  Por lo tanto, $|< Qx, y >|^2 \leq 0$, de donde deducimos $< Qx, y >= 0$.
- Idempotencia: Si $x \in M$ entonces $Qx = 0$ porque $Qx = x - Px \in M^{\perp} \cap M = \{\overrightarrow{0}\}$. Esto implica $Px = x$ y de aquí $P(Px) = Px$.

  De forma similar se prueba $Q(Qx) = Qx$.
- Falta probar la linealidad de P y Q:

  Sean $x, y \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Por un lado se tiene por definición

  $$\alpha\, x + \beta\, y = P(\alpha\, x + \beta\, y) + Q(\alpha\, x + \beta\, y)$$

  Como también es cierto que $x = Px + Qx$, $y = Py + Qy$, sustituyendo y despejando en la ecuación anterior tenemos

  $$\alpha\, Px + \beta\, Py - P(\alpha\, x + \beta\, y) = Q(\alpha\, x + \beta\, y) - \alpha\, Qx - \beta\, Qy$$

  Como la parte izquierda anterior está en M y la derecha en $M^{\perp}$ ambas deben ser el vector $\overrightarrow{0}$. Por lo tanto,

  $$P(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, Px + \beta\, Py, \quad \text{y} \quad Q(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, Qx + \beta\, Qy.$$

■

Hemos visto que si $u \in H$, L_u es una aplicación lineal continua. El siguiente resultado muestra que el recíproco también es cierto.

PROPOSICIÓN 4.9 *Si $L : H \longmapsto \mathbb{C}$ es una aplicación lineal y continua, entonces existe $u \in H$ tal que $L = L_u$.*

Demostración Si L es una aplicación lineal y continua, $M = \ker L$ es un subespacio cerrado de H. Entonces $H = \ker L \oplus (\ker L)^{\perp}$. Supongamos que $L \neq 0$ entonces $\exists\, z \in (\ker L)^{\perp}$ con $z \neq 0$.

Dado $y \in H$, consideramos $x = L(z)\, y - L(y)\, z$. Se tiene
$L(x) = L(L(z)\, y - L(y)\, z) = L(z)\, L(y) - L(y)\, L(z) = 0.$
Por tanto

$x = L(z)\,y - L(y)\,z \in KerL$. Luego $(L(z)\,y - L(y)\,z) \perp z$.
Usando esta información,
$0 =< L(z)\,y - L(y)\,z, z >= L(z)\ < y, z > -L(y)\ < z, z >$
y deducimos la expresión para L
$L(y) = \frac{L(z)}{\|z\|^2} < y, z >=< y, \underbrace{\frac{L(z)}{\|z\|^2} z}_{u} >$. ■

4.2. Dual topológico de un espacio de Banach

DEFINICIÓN 4.5 *Dado B un espacio de Banach sobre $\mathbb{C}$, se define su dual topológico como*

$$B' = \{L : B \longrightarrow \mathbb{C}\ :\ L \textit{ es lineal y continua}\}.$$

LEMA 4.10 *(Ejercicio) B' es un espacio de Banach con la norma dada por*

$$\|L\|_{B'} = \sup\{|L(x)|\ :\ \|x\|_B \leq 1\}.$$

Recordamos que si H en un espacio de Hilbert y $u \in H$, entonces $L_u(x) =< x, u >$ es lineal y continua. Recíprocamente, si $L : H \longmapsto \mathbb{C}$ es lineal y continua, entonces $\exists\, x_0$ tal que $L(y) =< y, x_0 >$, y escribimos $L = L_{x_0}$.

Conclusion: la aplicación

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A} : H & \longmapsto & H' \\ u & \longrightarrow & L_u \end{array}$$

con $L_u(x) =< x, u >$, es una aplicación biyectiva.

TEOREMA 4.11 *La aplicación anterior $\mathcal{A}$ es lineal por conjugación y bicontinua (continua en los dos sentidos). También es una isometría y por tanto es un isomorfismo isométrico.*

Demostración Primero probaremos que es una aplicación lineal por conjugación y luego veremos que es una isometría:

- Aplicación lineal:
  sean $u, v \in H$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces $\overline{\mathcal{A}(\alpha\, u + \beta\, v)} = \overline{L_{\alpha\, u + \beta\, v}} = \alpha\, \overline{L_u} + \beta\, \overline{L_v} = \alpha\overline{\mathcal{A}(u)} + \beta\overline{\mathcal{A}(v)}$.

- Isometría:
  $\|\mathcal{A}(u)\| = \|L_u\|_{B'} = \|u\|$.
  Si $\|x\| \leq 1$, entonces $|L_u(x)| = |< u, x >| \leq \|u\|\,\|x\| \leq \|u\| \Rightarrow \|L_u\| \leq \|u\|$.
  Por otro lado, si $u \neq \overrightarrow{0}$, sea $x = \dfrac{u}{\|u\|}$. Entonces

$$\|L_u\|_{B'} \geq |L_u(x)| = |< u, x >| =< u, \frac{u}{\|u\|} >= \|u\|_B.$$

■

Conclusión: Todo espacio de Hilbert H puede identificarlo con su dual H'.

Ejercicio 4.3 *Probar que en un espacio de medida $(X, \mathcal{M}, \mu)$ se tiene que el dual de $L^1(d\mu)$ se puede identificar con $L^\infty(d\mu)$ mediante*

$$\begin{array}{rcl} L^\infty & \longrightarrow & \left(L^1(d\mu)\right)' \\ f & \longrightarrow & L_f \end{array}$$

siendo la aplicación L_f

$$\begin{array}{rcl} L_f : L^1(d\mu) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ h & \longrightarrow & \displaystyle\int h\,\overline{f} \end{array}$$

NOTA: Probar que es sobreyectiva es lo mas importante.

Ejercicio 4.4 *En cualquier espacio de medida, si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ entonces $(L^p)' = L^q$.*

4.3. Sistemas ortonormales

DEFINICIÓN 4.6 *Dado H un espacio de Hilbert, se dice que la familia $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ (donde Γ es un conjunto de índices) es un sistema ortonormal (S.O.N.) si*

$$< u_\alpha, u_\beta >= \delta_{\alpha,\beta} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \alpha = \beta \\ 0 & \alpha \neq \beta \end{array} \right.$$

EJEMPLO: $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ es un S.O.N. en $L^2(\mathbb{T})$, ya que

$$< e^{2\pi inx}, e^{2\pi imx} >= \int_0^1 e^{2\pi inx}\, e^{-2\pi imx}\, dx = \int_0^1 e^{2\pi i(n-m)x}\, dx = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{array} \right.$$

TEOREMA 4.12 (de la mejor aproximación) *Sea H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un S.O.N. Entonces, dados $u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}$ distintos, si $V = span\{u_{\alpha_1}, \ldots, u_{\alpha_m}\}$ se tiene que $H = V \oplus V^\perp$ y $dist\,(x, V) = \|x - \sum_{j=1}^{n} < x, u_{\alpha_j} > u_{\alpha_j}\|$.*

Demostración Basta ver con la notación del Teorema 4.8 que si $H = V \oplus V^\perp$, entonces

$$\begin{array}{rcl} P_V : H & \longrightarrow & V \\ x & \longrightarrow & P_V(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} < x, u_{\alpha_j} > u_{\alpha_j} \end{array}$$

Por lo que ya sabemos, todo $x \in H = V \oplus V^\perp$ se escribe como

$$x = u + v, \text{ con } u = P_V(x) = P(x) \in M \text{ y } v = Qx \in M^\perp.$$

Esta descomposición es única, porque $x = u + v = u' + v' \Rightarrow u - u' = v - v' \in M \cap M^{\perp} = \{\overrightarrow{0}\}$.

Sea $u = \sum_{j=1}^{m} < x, u_{\alpha_j} > u_{\alpha_j}$ y $v = x - u$. Si probamos que $v \in V^{\perp}$, entonces tendremos que $Px = u$ (y $Qx = v$). Probar que $v \in V^{\perp}$ es lo mismo que probar que $v \perp u_{\alpha_k}$ con $k = 1, 2, \ldots, m$.

La demostración es inmediata:

$$< v, u_{\alpha_k} > = < \left[x - \sum_{j=1}^{m} < x, u_{\alpha_j} > u_{\alpha_j} \right], u_{\alpha_k} > = < x, u_{\alpha_k} > - < x, u_{\alpha_k} > = 0$$

■

Resumiendo lo anterior, si H es un espacio de Hilbert, V un subespacio finito ($dim\, V = n$) y $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son vectores que forman una base ortonormal de V entonces, dado $x \in H$, la proyección $P_V : H \longmapsto V$ viene dada por la fórmula

$$P_V(x) = \sum_{j=1}^{n} < x, v_j > v_j. \tag{4.2}$$

Como consecuencia tenemos que

$$dist\,(x, V) = \|x - \sum_{j=1}^{n} < x, v_j > v_j\|. \tag{4.3}$$

4.4. Coeficientes de Fourier y la desigualdad de Bessel

DEFINICIÓN 4.7 *Si $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Gamma}$ es un S.O.N. de un espacio de Hilbert, entonces $\forall\, x \in H$, al valor $\widehat{x}(\alpha) = < x, u_\alpha >$ lo llamaremos coeficiente de Fourier α de x.*

Nota sobre la sumación de una cantidad no numerable de términos:

Sea Γ un conjunto arbitrario, numerable o no, y μ_Γ la medida de contar en Γ. Entonces, el espacio $L^p(d\mu_\Gamma)$ se denota por $\ell^p(\Gamma)$.

Como las funciones simples finitamente integrables son todas de la forma $s = \sum_{j=1}^{n} c_j \chi_{\{\alpha_j\}}$, con $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \Gamma$, se tiene

$$\int s\, d\mu_\Gamma = \sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n} s(\alpha_j).$$

De aquí se deduce que para cualquier $f \in L^p(d\mu_\Gamma)$

$$\int |f|^p d\mu_\Gamma = \sup_{A \subset \Gamma,\ \mu_\Gamma(A) < \infty} \sum_{\alpha \in A} |f(\alpha)|^p.$$

La expresión de la derecha se suele denotar por la suma $\sum_{\alpha\in\Gamma} |f(\alpha)|^p$ y cobra más sentido a partir del siguiente

LEMA 4.13 *Si* $\sum_{\alpha\in\Gamma} |f(\alpha)| < \infty$ *entonces* $\{\alpha : f(\alpha) \neq 0\}$ *es numerable.*

Demostración Basta ver que $\{\alpha : |f(\alpha)| > \frac{1}{n}\}, \forall n = 1, 2, \dots$, es de medida finita, y eso es cierto por la desigualdad de Chebychev:

$$\mu_\Gamma(\{\alpha : |f(\alpha)| > \frac{1}{n}\}) \leq n \int |f|\, d\mu_\Gamma < \infty.$$

■

Con todas las observaciones anteriores pasamos a demostrar el siguiente teorema que resulta básico para la teoría de series de Fourier:

PROPOSICIÓN 4.14 (Desigualdad de Bessel) *Dado* H *un espacio de Hilbert y* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *un S.O.N., entonces la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : H & \longrightarrow & \ell^2(\Gamma) \\ x & \longrightarrow & \{\widehat{x}(\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma} \end{array}$$

cumple $\left(\sum_{\alpha\in\Gamma} |\widehat{x}(\alpha)|^2\right)^{1/2} \leq \|x\|_H.$

Demostración Sea $A \in \mathcal{P}_F(\Gamma)$ (el conjunto de las partes finitas de Γ). Basta probar que $\sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|_H^2$. Para ello, sea $V = span\,\{u_\alpha\ ,\ \alpha \in A\}$. Entonces x se puede escribir de forma única como $x = x_1 + x_2$, con $x_1 \in V$ y $x_2 \in V^\perp$, y $x_1 = \sum_{\alpha\in A} \widehat{x}(\alpha)\, u_\alpha$. Deducimos así

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq \|x_1\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |\widehat{x}(\alpha)|^2.$$

■

NOTA: Obsérvese que hemos usamos que si $\{u_\alpha\}_{\alpha\in A}$ es ortonormal, entonces

$$\left\|\sum_{\alpha\in A} c_\alpha u_\alpha\right\|_H^2 = \sum_{\alpha\in A} |c_\alpha|^2.$$

PROPOSICIÓN 4.15 *Si* H *es un espacio de Hilbert y* $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *es un S.O.N., la transformada de Fourier*

$$\mathcal{F} : H \longrightarrow \ell^2(\Gamma)$$

es una aplicación lineal y continua.

Demostración Sea $x \in H$ y $\mathcal{F}(x) = \widehat{x} = \{\widehat{x}(\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$. Veamos que se cumplen las dos propiedades de la aplicaciones lineales:

- Como $\widehat{(x+y)}(\alpha) =< x+y, u_\alpha >=< x, u_\alpha > + < y, u_\alpha >= \widehat{x}(\alpha) + \widehat{y}(\alpha)$ deducimos que $\mathcal{F}(x+y) = \mathcal{F}(x) + \mathcal{F}(y)$.
- De manera análoga se prueba que $\mathcal{F}(c\,x) = c\,\mathcal{F}(x)$, para todo escalar c.

La continuidad sale de la desigualdad de Bessel:

$$\|\mathcal{F}(x)\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|x\|_H.$$

■

TEOREMA 4.16 (Riesz-Fisher) *Sea H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un S.O.N. Entonces la transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es sobreyectiva.*

Demostración Sea $\{a_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma} \in \ell^2(\Gamma)$ (es decir, $\sum_{\alpha\in\Gamma} |a_\alpha|^2 < \infty$). Por tanto, $A = \{\alpha : a_\alpha \neq 0\}$ es numerable y escribimos $A = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}$.

Sea $x_m = \sum_{j=1}^m a_{\alpha_j}\, u_{\alpha_j} \in H$.

- Veamos que la sucesion $\{x_m\}$ es de Cauchy: por la ortogonalidad,

$$\|x_{m+k} - x_m\|^2 = \| \sum_{j=m+1}^{m+k} a_{\alpha_j}\, u_{\alpha_j} \|^2 = \sum_{j=m+1}^{m+k} |a_{\alpha_j}|^2 \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} |a_{\alpha_j}|^2 \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

Como H es un espacio de Hilbert, se tiene que $\exists\, x = \lim_{m\to\infty} x_m$

- Ahora veremos que $\mathcal{F}(x) = \{a_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ (es decir, $\widehat{x}(\alpha) = a_\alpha$). Esto es cierto porque

$$\widehat{x}(\alpha) =< x, u_\alpha >= \lim_{m\to\infty} < x_m, u_\alpha >= \begin{cases} 0 & \alpha \notin A \\ a_\alpha & \alpha \in A \end{cases}$$

■

4.5. Sistemas ortonormales completos

DEFINICIÓN 4.8 *Sea H un espacio de Hilbert. Un S.O.N. $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ se dice completo si $\nexists\, u \in H$ con $u \neq 0$, tal que $\{u, u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ siga siendo un S.O.N; es decir, si el único elemento de H perpendicular a todos los elementos u_α del sistema es el vector $\overrightarrow{0}$.*

Hemos probado hasta el momento que la aplicacion $\mathcal{F}(x) = \widehat{x}$ (a la que hemos llamado *Transformada de Fourier*) es sobreyectiva y cumple $\|\widehat{x}\|_{\ell^2(\Gamma)} \leq \|x\|_H$. Si tuviéramos además la igualdad, $\mathcal{F}$ sería un isomorfismo isométrico (y por tanto, H y $\ell^2(\Gamma)$ podrían identificarse entre si).

NOTA: La inyectividad se deduciría de que si $\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(y)$ (es decir, $\widehat{x} = \widehat{y}$), entonces

$$\|x-y\|_H = \|\widehat{x-y}\|_{\ell^2} = \|\widehat{x} - \widehat{y}\|_{\ell^2} = 0 \quad \text{y, por tanto,} \quad x = y.$$

TEOREMA 4.17 *Sea H un espacio de Hilbert y $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ un S.O.N. Entonces son equivalentes*

i) $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ *es un S.O.N. completo*

ii) $span\,\{u_\alpha : \alpha \in \Gamma\}$ *es denso en H*

iii) $\|x\|_H = \|\widehat{x}\|_{\ell^2(\Gamma)}$ ***(identidad de Plancherel)***

iv) $< x, y >_H = < \widehat{x}, \widehat{y} >_{\ell^2(\Gamma)} = \sum_{\alpha\in\Gamma} \widehat{x}(\alpha)\,\overline{\widehat{y}(\alpha)}$ ***(identidad de Parseval)***

Demostración Probaremos que $i) \Rightarrow ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$.

- Veamos que $i) \Rightarrow ii)$:

  Supongamos que $span\,\{u_\alpha\ ,\ \alpha \in \Gamma\}$ no es denso, es decir, $V = \overline{span\,\{u_\alpha\ ,\ \alpha \in \Gamma\}} \subsetneqq H$. Como V es un subespacio cerrado, se tiene $H = V \oplus V^\perp$ y $V^\perp \neq \{\overrightarrow{0}\} \Rightarrow \exists\, u \neq \overrightarrow{0}, u \in V^\perp$. Esto dice que $u \perp u_\alpha$ para todo $\alpha \in \Gamma$. Si $\widetilde{u} = \dfrac{u}{\|u\|}$, entonces $\{u_\alpha, \widetilde{u}\}$ es un S.O.N. (contradicción)

- Veamos que $ii) \Rightarrow iii)$:

  Ya sabemos que $\|\widehat{x}\|_{\ell^2} \leq \|x\|_H$. Por otro lado, por hipótesis, dado x y $\epsilon > 0$, existe $\sum_{i=1}^m \lambda_i\, u_{\alpha_i}$ tal que $\|x - \sum_{i=1}^m \lambda_i\, u_{\alpha_i}\|_H \leq \epsilon$. Recordamos que

  $$\|x - \sum_{i=1}^m < x, u_{\alpha_i} >\ u_{\alpha_i}\| \leq \|x - \sum \lambda_i\, u_{\alpha_i}\|,$$

  y por tanto

  $$\begin{aligned}\|x\| \leq& \|x - \sum_{i=1}^m \widehat{x}(\alpha_i)\, u_{\alpha_i}\| + \|\sum_{i=1}^m \widehat{x}(\alpha_i)\, u_{\alpha_i}\| \\ \leq& \epsilon + \sum_{i=1}^m |\widehat{x}(\alpha_i)|^2 \leq \epsilon + \|\widehat{x}\|_{\ell^2}.\end{aligned}$$

  Al ser ϵ arbitrario, concluimos entonces que $\|x\|_H \leq \|\widehat{x}\|_{\ell^2}$.

- Veamos que $iii) \Rightarrow iv)$ (el argumento que vamos a usar se llama de *polarización*):

  Dado $\lambda \in \mathbb{C}$ (a determinar), tenemos por hipótesis que

  $$\|\lambda x + y\|_H^2 = \|\lambda \widehat{x} + \widehat{y}\|_{\ell^2}^2\ , \forall\, x, y \in H,$$

  o equivalentemente

  $$|\lambda|^2\|x\|^2 + \|y\|^2 + 2Re\,\lambda < x, y >= |\lambda|^2\|\widehat{x}\|^2 + \|\widehat{y}\|^2 + 2Re\,\lambda < \widehat{x}, \widehat{y} >$$

  Usando que $\|x\| = \|\widehat{x}\|$ y $\|y\| = \|\widehat{y}\|$ queda que

  $$Re\,\lambda < x, y >= Re\,\lambda < \widehat{x}, \widehat{y} > .$$

  Y sustituyendo $\lambda = 1$ y $\lambda = i$ llegamos a que $< x, y >=< \widehat{x}, \widehat{y} >$.

- Veamos finalmente que $iv) \Rightarrow i)$:

  Sea $u \in H$ tal que $< u, u_\alpha >= 0$ para todo α. Entonces $\widehat{u}(\alpha) = 0 \; \forall \alpha \Rightarrow \widehat{u} = \overrightarrow{0} \in \ell^2$. Entonces

$$\forall x \in H, \;\; < x, u >=< \widehat{x}, \widehat{u} >= 0 \Rightarrow u \in H^\perp = \{\overrightarrow{0}\} \Rightarrow u = \overrightarrow{0}$$

■

TEOREMA 4.18 (Gran Finale) *Todo espacio de Hilbert H posee un sistema ortonormal completo $\{u_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ (y en particular es isométricamente isomorfo a $\ell^2(\Gamma)$).*

Demostración Sea G el conjunto formado por todos los S.O.N. de H. Definimos en él el orden de contenido

$$S \leq S' \quad \text{si} \quad S \subset S'.$$

Observamos que si $S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$ entonces $\bigcup_{n\geq 1} S_n$ es un S.O.N. Por el principio de maximalidad de Hausdorff, sabemos que existe un elemento maximal

$$S_0 = \{u_\alpha : \alpha \in \Gamma_0\},$$

que es, por tanto, completo. ■

Capítulo 5

Series de Fourier

En el capítulo anterior vimos los aspectos teóricos necesarios para desarrollar una *Teoría de Fourier* en un espacio de Hilbert arbitrario. En este capítulo la construiremos explícitamente en el espacio $H = L^2(\mathbb{T})$. En este sentido, el primer resultado justifica la noción de serie de Fourier asociada a una función:

TEOREMA 5.1 *En el espacio*

$$H = L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C} : \text{ 1-periódica y medible, con } \int_0^1 |f|^2 dx < \infty \right\},$$

se tiene que $\{e^{2\pi inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *forma un S.O.N. completo.*

COROLARIO 5.2 $L^2(\mathbb{T})$ *y* $\ell^2(\mathbb{Z})$ *son isométricamente isomorfos con la isometría dada por*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f & \longrightarrow & \widehat{f} \end{array}$$

siendo $\widehat{f}(n) = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi inx} dx.$

OBSERVACIÓN: Con todo lo anterior, se tiene en particular las identidades

- $\|f\|_{L^2}^2 = \displaystyle\int_0^1 |f|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \|\widehat{f}\|_{\ell^2}^2$. (Plancherel)
- $< f, g >_{L^2} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, \overline{\widehat{g}(n)} = < \widehat{f}, \widehat{g} >_{\ell^2}$. (Parçeval)

Para la demostración usaremos la caracterización de S.O.N. completos que en este caso dice que *span* $\left\{e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$ es denso en $L^2(\mathbb{T})$.

DEFINICIÓN 5.1 *Llamaremos "polinomio trigonométrico" a toda combinación lineal finita de exponenciales simples* $P(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} a_j\, e^{2\pi in_j x}$*, es decir, a cualquier elemento de span* $\left\{e^{2\pi inx} : n \in \mathbb{Z}\right\}$.

5.1. Los Núcleos de Dirichlet y de Fejér

Dada $f \in L^2(\mathbb{T})$ y $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos la suma parcial de Fourier N-ésima como

$$S_N f(x) = \sum_{-N}^{N} \widehat{f}(n) e^{2\pi i n x}$$

Nos gustaría probar que $S_N f \longrightarrow f$ en L^2 (es decir, $\|S_N f - f\|_{L^2} \longrightarrow 0$).
Para ello buscamos una fórmula explícita de $S_N f$:

$$\begin{aligned} S_N f(x) &= \sum_{-N}^{N} \left(\int_0^1 f(y)\, e^{-2\pi i n y} dy \right) e^{2\pi i n x} = \sum_{n=-N}^{N} \left(\int_0^1 f(y)\, e^{2\pi i n (x-y)} dy \right) \\ &= \int_0^1 f(y) \left[\sum_{-N}^{N} e^{2\pi i n (x-y)} \right] dy = f * D_N(x) \end{aligned}$$

donde $D_N(x) = \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i n x}$ representa el llamado *N-ésimo núcleo de Dirichlet.* Si $\{D_N\}_{N=0}^{\infty}$ fuera un núcleo de sumabilidad, tendríamos como consecuencia que $D_N * f \longrightarrow f$ en L^2.
Presentamos una expresión cerrada de estas funciones:

$$\begin{aligned} \sum_{-N}^{N} e^{2\pi i n x} &= \frac{e^{2\pi i (N+1) x} - e^{-2\pi i N x}}{e^{2\pi i x} - 1} \cdot \frac{e^{-\pi i x}}{e^{-\pi i x}} \\ &= \frac{e^{(2N+1)\pi i x} - e^{-(2N+1)\pi i x}}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}} \overset{\text{dividiendo por } 2i}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{\operatorname{sen}(2N+1)\pi x}{\operatorname{sen} \pi x} \end{aligned} \tag{5.1}$$

Propiedades de $\{D_N\}$

- D_N es par
- En $[-1/2, 1/2)$, D_N tiene ceros en los puntos $x = \dfrac{k}{2N+1}$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N$
- $D_N(0) = 2N + 1$

Sin embargo D_N no cumple las propiedades de núcleo de sumabilidad :

1. Por un lado sí es cierto que $\displaystyle\int_0^1 D_N(x)\, dx = \sum_{n=-N}^{N} \int_0^1 e^{2\pi i n x} dx = 1$ ✓
2. Sin embargo no verifica $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} |D_N(x)|\, dx \leq C$ independiente de N (ver Hoja 4 de ejercicios) De hecho se tiene:

LEMA 5.3 *Si* $\lambda_N = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} |D_N(x)|\, dx$, *denominada la* **constante de Lebesgue** *N-ésima, se tiene* $\lambda_N \sim \log N$.

(Ver de nuevo Hoja 4 de ejercicios). Luego D_N no es un (buen) núcleo de sumabilidad. En su lugar recurrimos a las sumas de Çesaro:

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\left[S_0\, f(x) + S_1\, f(x) + \ldots + S_N\, f(x)\right]$$

Para cada N, $\sigma_N f$ es un polinomio trigonómetrico. Queremos ver de nuevo si $\sigma_N f \longrightarrow f$ en L^2. Observamos que

$$\sigma_N f(x) = \frac{1}{N+1}\left(D_0 * f + \ldots + D_N * f\right) = F_N * f(x),$$

donde $F_N = \dfrac{D_0 + \ldots + D_N}{N+1}$ es el N-ésimo *núcleo de Fejér*. Veamos que $\{F_N\}$ sí es un (buen) núcleo de sumabilidad. Damos primero una expresión cerrada:

$$\begin{aligned}
F_N(x) =& \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}\frac{\operatorname{sen}(2n+1)\pi x}{\operatorname{sen}\pi x} = \frac{1}{(N+1)\operatorname{sen}\pi x}\, Im\left(\sum_{n=0}^{N} e^{(2n+1)\pi i x}\right)\\
=& \frac{1}{(N+1)\operatorname{sen}\pi x}\, Im\left(\frac{e^{(2N+3)\pi i x} - e^{\pi i x}}{e^{2\pi i x} - 1}\right)\\
=& \frac{1}{(N+1)\operatorname{sen}\pi x}\, Im\left(\frac{e^{(2N+2)\pi i x} - 1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}\right)\\
=& \frac{1}{(N+1)(\operatorname{sen}\pi x)^2}\, Im\left(\frac{e^{2(N+1)\pi i x} - 1}{2i}\right)\\
=& \frac{1}{(N+1)(\operatorname{sen}\pi x)^2}\left(\frac{1 - \cos 2(N+1)\pi x}{2}\right)\\
=& \frac{1}{N+1}\left(\frac{\operatorname{sen}(N+1)\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}\right)^2
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Propiedades de $\{F_N\}$: F_N es par y verifica

i) $\displaystyle\int_0^1 F_N\, dx = \frac{1}{N+1}\left(\sum_{n=0}^{N}\int_0^1 D_n(x)dx\right) = 1$

ii) $F_N(x) \geq 0, \forall x$

iii) $\displaystyle\int_{\delta<|x|<1/2} F_N(x)\, dx = 2\int_{\delta}^{1/2}\frac{1}{N+1}\left(\frac{\operatorname{sen}(N+1)\pi x}{\operatorname{sen}\pi x}\right)^2 dx \leq \frac{1}{N+1}\frac{1}{(\operatorname{sen}\pi\delta)} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0,$
para todo $\delta > 0$.

De esta forma hemos probado que $\{F_N\}_{n=0}^{\infty}$ es un núcleo de sumabilidad y que, por tanto, $\forall\, f \in L^2$ se tiene que $\sigma_N f = F_N * f \longrightarrow f$ en L^2. Aunque no lo necesitábamos, también se obtiene:

PROPOSICIÓN 5.4

1. *Si f es continua en x_0 y acotada entonces $\sigma_N f(x_0) \longrightarrow f(x_0)$*
2. *Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ entonces $\sigma_N f \longrightarrow f$ uniformemente*
3. *Si $f \in L^p$ con $1 \le p < \infty$ entonces $\sigma_N f \longrightarrow f$ en la norma L^p*

Demostración del Teorema 5.1 sobre completitud: Basta usar el apartado *3* de la proposición anterior con $p = 2$ recordando que $\sigma_N f = F_N * f$ es siempre un polinomio trigonométrico, $\forall N$. ■

EJEMPLO, una aplicación de la identidad de Plancherel: probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Sea $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ \text{extendida periódicamente.} & \end{cases}$. Entonces

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 x\, e^{-2\pi i n x} dx = \left[\frac{x}{-2\pi i n} e^{2\pi i n x}\right]_0^1 + \frac{1}{2\pi i n}\int_0^1 e^{2\pi i n x} = \frac{i}{2\pi n}, \text{ si } n \neq 0.$$

y $f(0) = \displaystyle\int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$. Para un uso posterior, observemos que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=-N}^{N} \frac{i}{2\pi n} e^{2\pi i n x}. \tag{5.3}$$

Por la identidad de Plancherel:

$$\frac{1}{4} + \sum_{n \neq 0} \frac{1}{4\pi^2 n^2} = \int_0^1 |f|^2 = \frac{1}{3}.$$

de donde se deduce

$$\frac{2}{4\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ejercicio 5.1 *Hallar* $\sum \frac{1}{n^4}$. Sugerencia: *buscar $f \in L^2$, del tipo $f = x^2 + a\,x$, de forma que $\widehat{f}(n) = \frac{1}{n^2}$.*

Consecuencias adicionales Por la teoría general también tenemos:

PROPOSICIÓN 5.5 *Si $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, entonces $\sum a_n\, e^{2\pi i n x}$ representa a una función de $L^2(\mathbb{T})$, llamémosla f, que necesariamente debe cumplir $\widehat{f}(n) = a_n$ y*

$$\sum_{n=-N}^{N} a_n\, e^{2\pi i n x} \xrightarrow{N\to\infty} f, \quad \text{en } L^2$$

es decir,

$$S_N f(x) = \sum_{n=-N}^{N} \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x} \xrightarrow{n\to\infty} f \text{ en } L^2$$

a pesar de que $S_N f = D_N * f$ *y* D_N *es un núcleo "malo".*

La demostración de este resultado es inmediata ya que por Plancherel,

$$\|f - S_N f\|_2^2 = \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)|^2,$$

y esto tiende a 0 cuando $N \to \infty$.

Nos preguntamos qué pasa con la convergencia en L^p, $p \neq 2$ de las series parciales de Fourier. En este sentido se sabe que:

- Si $f \in L^p$, con $1 < p < \infty$, entonces $S_N f \longrightarrow f$ en L^p (Riesz)
- $\exists$ una función en L^1 tal que $S_N f$ no converge a f en L^1 (du Bois Reymond)
- $\exists\, f \in L^1$ tal que $\{S_N f(x)\}$ diverge $\forall\, x$ (Kolmogorov)
- $\exists\, f$ continua tal que $S_N f(x_0)$ no converge a $f(x_0)$ en algún x_0 (Katznelson)
- Si, $f \in L^p$, $1 < p < \infty$, entonces $S_N f(x) \longrightarrow f(x)$ c.t.p. (Carleson)

En lo que queda de capítulo, estudiaremos el comportamiento de las series de Fourier en L^1, en especial la convergencia puntual.

NOTA: Observemos que si $f \in L^1(\mathbb{T}) \supsetneq L^2(\mathbb{T})$ tiene sentido definir la transformada de Fourier

$$\widehat{f}(n) = \int_0^1 f(x)\, e^{-2\pi i n x} dx$$

Además, usando Fubini, si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ se tiene $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$. Este resultado lo hemos usado de forma implícita en repetidas ocasiones. Por el lado funcional se tiene:

TEOREMA 5.6 *La transformada de Fourier es lineal, continua e inyectiva de* $L^1(\mathbb{T})$ *en* $\ell^\infty(\mathbb{Z})$*:*

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^\infty(\mathbb{Z}).$$

Demostración La linealidad es inmediata. Además,

$$f \longrightarrow \left|\widehat{f}(n)\right| \le \int_0^1 \left|f\, e^{-2\pi i n x}\right|\, dx = \|f\|_{L^1}.$$

Entonces $\|\{\widehat{f}(n)\}_n\|_{\ell^\infty} = \sup_n |\widehat{f}(n)| = \|f\|_{L^1}$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es acotada.

Veamos la inyectividad: sean $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) = \widehat{g}(n)$ para todo n. Sea $h = f - g$. Entonces se tiene que $\widehat{h}(n) = 0$ para todo n. En particular, $S_N h(x) = 0$, $\forall\, N$, y por tanto $\sigma_N h(x) = 0$, $\forall\, N$. Como $\sigma_N h \longrightarrow h$ en L^1 concluimos $h = 0$ c.t.p. ■

El siguiente lema nos dice que de hecho $\mathcal{F}$ manda $L^1(\mathbb{T})$ en un espacio más pequeño:

LEMA 5.7 (Riemann-Lebesgue) $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{T}) \longrightarrow c_0(\mathbb{Z}) = \left\{ \{a_n\} \text{ tal que } \lim_{n\to\pm\infty} a_n = 0 \right\}$. *Es decir, si* $f \in L^1(\mathbb{T})$, *entonces* $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$. *(Recuérdese que* $c_0(\mathbb{Z}) \subset \ell^\infty(\mathbb{Z})$*).*

> **NOTA:** si $f \in L^2(\mathbb{T})$ (que claramente es un subconjunto de $L^1(\mathbb{T})$) el resultado es inmediato porque
>
> $$\sum_{n=0}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 < \infty \Rightarrow \lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Demostración del lema: Dado $\epsilon > 0$, elegimos un polinomio trigonométrico $P(x) = \sum_{n=-m}^{m} a_n \, e^{2\pi i n x}$ tal que $\|f - P\|_1 < \epsilon$. Entonces, $\forall |n| > m$, usando que $\widehat{P}(n) = 0$, se tiene

$$\left|\widehat{f}(n)\right| = \left| \int_0^1 (f(x) - P(x))\, e^{-2\pi i n x} dx + \widehat{P}(n) \right| \leq \int_0^1 |f(x) - P(x)| dx < \epsilon.$$

■

5.2. Criterios de convergencia puntual para series de Fourier

LEMA 5.8 (Criterio de Dini) *Si* $f \in L^1(\mathbb{T})$ *y para cierto* x_0 *se tiene que*

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty.$$

entonces $S_N f(x_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

EJEMPLOS de funciones que verifican las condiciones del criterio de Dini:

- f Lipschitz, es decir, $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|, \forall x, y$:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{c|t|}{|t|} dt = c < \infty.$$

- f Hölderiana: $\big(|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^\beta, \forall x, y, \text{ para cierto } \beta > 0\big)$

$$\int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \frac{c}{|t|^{1-\beta}} dt < \infty.$$

Demostración (*del criterio de Dini*) La demostración usa el lema de Riemann-Lebesgue. Para ello vemos que

$$\begin{aligned}
S_N f(x_0) - f(x_0) &= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0 - t) - f(x_0)) D_N(t) dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} (f(x_0 - t) - f(x_0)) \frac{\operatorname{sen}(2N+1)\pi t}{\operatorname{sen} \pi t}(t) dt \\
&= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \operatorname{sen} \pi t} \left(e^{(2N+1)\pi i t} - e^{-(2N+1)\pi i t} \right) dt \\
&= \widehat{F_1}(N) - \widehat{F_2}(-N),
\end{aligned} \tag{5.4}$$

donde $F_1(t) = \dfrac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \operatorname{sen} \pi t} e^{\pi i t}$ y $F_2(t) = \dfrac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2i \operatorname{sen} \pi t} e^{-\pi i t}$.

Si demostramos que $F_1, F_2 \in L^1(\mathbb{T})$ podemos usar el Lema de Riemann-Lebesgue y habremos terminado. Pero esto se deduce de la hipótesis del criterio ya que para $j = 1, 2$

$$\int_{-1/2}^{1/2} |F_j(t)|\, dt = \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{2 \operatorname{sen} \pi t} \leq \right| dt \leq \int_{-1/2}^{1/2} \left| \frac{f(x_0 - t) - f(x_0)}{t} \right| dt < \infty,$$

donde hemos usado que $|\operatorname{sen} \pi t| \geq |t|/2$ en $(-1/2, 1/2)$. ∎

Si la función tiene derivadas, entonces la convergencia es de hecho uniforme y podemos medir la rapidez de dicha convergencia de acuerdo al orden de derivación:

PROPOSICIÓN 5.9 *Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, entonces* $\|S_N f - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N^{k-\frac{1}{2}}} \right)$.

Para ello necesitamos antes el siguiente

LEMA 5.10 *Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{T})$, entonces $\widehat{f'}(n) = 2\pi i n \widehat{f}(n)$. En general, por inducción, si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$*

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi i n)^k \widehat{f}(n)$$

Demostración $\widehat{f'}(n) = \displaystyle\int_0^1 f'(t)\, e^{-2\pi i n t} dt \overset{\text{por partes}}{\underset{\downarrow}{=}} 2\pi i n \int_0^1 f(t)\, e^{-2\pi i n t} dt = 2\pi i n \widehat{f}(n)$. ∎

Como consecuencia tenemos que si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{T})$, entonces

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^k \widehat{f}(n)|^2 < \infty,$$

ya que $\sum |(2\pi i n)^k \widehat{f}(n)|^2 = \sum |\widehat{f^{(k)}}(n)|^2 = \int_0^1 |f^{(k)}|^2 < \infty$.

Demostración de la proposición: Basta observar que

$$|f(x) - S_N f(x)| \leq \sum_{|n|>N} |\widehat{f}(n)| \leq \left(\sum_{|n|>N} |(2\pi i n)^k \widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{|n|>N} \frac{1}{|(2\pi i n)^k|^2} \right)^{1/2}$$

$$\leq \left\| f^{(k)} \right\|_2 \frac{1}{4\pi^2} \left(2 \sum_{n=N+1}^{N} \frac{1}{n^{2k}} \right)^{1/2} \leq \left\| f^{(k)} \right\|_2 \frac{\sqrt{2}}{4\pi^2} \ \frac{1}{N^{k-1/2}}.$$

■

5.3. Espacios de Sobolev

Obsérvese que la única información que hemos usado en la demostración anterior es

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)\, n^k|^2 < \infty.$$

DEFINICIÓN 5.2 *Dado $\alpha > 0$, se define el* ***espacio de Sobolev*** *de orden α como*

$$H^\alpha = H^\alpha(\mathbb{T}) = \left\{ f \in L^2(\mathbb{T}) \, : \, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)\, n^\alpha|^2 < \infty \right\}.$$

COROLARIO 5.11 *Si $\alpha > \dfrac{1}{2}$ y $f \in H^\alpha$, entonces $\|S_N f - f\|_\infty = \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{N^{\alpha-\frac{1}{2}}}\right)$ (convergencia uniforme).*

PROPOSICIÓN 5.12 *H^α es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por*

$$< f, g >_{H^\alpha} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)} + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^\alpha \widehat{f}(n)\overline{|n|^\alpha \widehat{g}(n)}. \tag{5.5}$$

Por tanto, la norma viene dada por

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left(\|f\|_{L^2}^2 + \sum_{n\in\mathbb{Z}} |n|^{2\alpha} |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{1/2}.$$

En general, se pueden definir espacios de Sobolev $W^{\alpha,p}$(en $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{T}^n$) con integrabilidad p distinta a 2. Se tiene este importante teorema de inclusión entre espacios:

TEOREMA 5.13 (T. de inmersión de Sobolev) *Si $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n} > 0$, entonces $W^{\alpha,p} \subset L^q$. Si $\dfrac{1}{p} - \dfrac{\alpha}{n} < 0$, entonces $W^{\alpha,p} \subset \mathcal{C}_0 \subset L^\infty$.*

En nuestro caso particular, $H^\alpha(\mathbb{T}) = W^{\alpha,2}(\mathbb{T})$. De esta forma, tal y como hemos visto, si $n = 1$, $p = 2$, $\alpha > \frac{1}{2}$, y $f \in H^\alpha$ se tiene que las sumas parciales de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)e^{2\pi inx},$$

convergen uniformemente. Por tanto $f(x)$ se puede identificar a.e. con una función continua.

La otra idea destacada detrás de las series de Fourier es usarlas para resolver EDO a partir de la relación ya vista

$$\widehat{f^{(k)}}(n) = (2\pi in)^k \widehat{f}(n).$$

Con más generalidad, si $P(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0$ y definimos

$$P(D)f = a_m f^{(m)} + \ldots + a_2 f'' + a_1 f' + a_0,$$

entonces

$$\widehat{P(D)}f(n) = [a_m(2\pi in)^m + \ldots + a_1 2\pi in + a_0]\,\widehat{f}(n) = P(2\pi in)\widehat{f}(n).$$

Por tanto, para resolver la ecuación $P(D)\,u(x) = g(x)$ basta resolver la ecuación algebraica

$$\widehat{P(D)}u(n) = P(2\pi in)\,\widehat{u}(n) = \widehat{g}(n).$$

Entonces u es la función cuyos coeficientes de Fourier son $\widehat{u}(n) = \dfrac{1}{P(2\pi in)}\,\widehat{g}(n)$. De hecho, si G es tal que $\widehat{G}(n) = \dfrac{1}{P(2\pi in)}$, entonces $\widehat{u}(n) = \widehat{G}(n)\,\widehat{g}(n)$. Esto nos dice, usando la identidad $\widehat{G * g}(n) = \widehat{G}(n)\,\widehat{g}(n)$, que $u(x) = (G * g)(x)$.

****

Nos fijamos ahora en el ejemplo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\log n)} e^{2\pi inx}$. Claramente $f \in L^2(\mathbb{T})$ ya que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(1+\log n)^2} < \infty$, y la convergencia de la serie es al menos en $L^2(\mathbb{T})$:

Queremos estudiar si hay convergencia puntual y nos preguntamos si f pertenece a algún espacio de Sobolev H^α con $\alpha > \frac{1}{2}$. Sin embargo

$$\sum |n^\alpha \widehat{f}(n)|^2 = \sum n^{2\alpha} \frac{1}{n^2(1+\log n)^2}, \qquad \text{que es finito solo si } \alpha \leq \frac{1}{2}.$$

Luego $f \in H^{1/2}$ que no es suficiente para asegurar la convergencia puntual.
En su lugar usaremos el siguiente

LEMA 5.14 (CRITERIO DE ABEL) *Si $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq \ldots \longrightarrow 0$ y $\{b_k\}$ es tal que las sumas $\sigma_n = \sum_{k=1}^n b_k$ están acotadas ($|\sigma_n| \leq C_0$) entonces $\sum_{n=1}^\infty a_n\, b_n$ es convergente.*

Demostración Si llamamos $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k$, necesitamos probar que la sucesión $\{s_n\}_n$ es de Cauchy. Para ello usaremos que $b_k = \sigma_k - \sigma_{k-1}$. Entonces, si $m > n > 1$,

$$\begin{aligned}|s_m - s_n| =& \left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\,(\sigma_k - \sigma_{k-1})\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} (a_k\sigma_k - a_{k-1}\sigma_{k-1}) + \sum_{k=n+1}^{m} (a_{k-1} - a_k)\,\sigma_{k-1}\right| \\ \le& a_m\, C_0 + a_n\, C_0 + \sum_{k=n+1}^{m} (a_{k-1} - a_k)\, C_0 = 2\, a_n\, C_0 \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Al meter el módulo dentro hemos usado las hipótesis $|\sigma_n| \le C_0$ y $a_{k-1} - a_k \ge 0$. ■

Aplicando el resultado a la serie anterior con $a_n = \dfrac{1}{n(1+\log n)}$ y $b_n = e^{2\pi i n x}$, obervamos que a_n es decreciente y $a_n \to 0$. Además

$$\text{si } x \ne 0, 1 \quad \Rightarrow \quad \left|\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi i n x}\right| \le \ldots \le \frac{2}{|e^{2\pi i x} - 1|},\ \forall\, n.$$

Por tanto la serie anterior converge puntualmente $\forall\, x \notin \mathbb{Z}$.
Otro ejemplo similar viene dado por las series

$$\sum \frac{1}{n^\beta}\, e^{2\pi i n x}, \quad \beta > 0,$$

que de nuevo convergen puntualmente $\forall\, x \notin \mathbb{Z}$.
Obsérvese que si $\beta \le 1/2$ la función obtenida no está en L^2. Por ejemplo

$$F(x) = \sum \frac{1}{n^{1/2}}\, e^{2\pi i n x} \notin L^2.$$

5.4. La serie de Fourier en un punto de discontinuidad

PROPOSICIÓN 5.15 (Principio de localización de Riemann) *Sea $h \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos $h = 0$ para todo x de un cierto intervalo abierto $I = (a, b)$. Entonces $S_N h(x) \xrightarrow{N\to\infty} 0 = h(x)\, \forall\, x \in I$ (de hecho, converge uniformemente sobre compactos de I).*

La demostración se sigue directamente del criterio de Dini.

Aplicación: Supongamos $f = g$ para todo $x \in I$ intervalo . Si $S_N f \longrightarrow f$ en I c.t.p., lo mismo es cierto para g. Esto es interesante porque da a entender que las series de Fourier tienen un comportamiento local a pesar de que se construyen a partir de los coeficientes de Fourier y en estos interviene toda la función, no solo la parte buena de un intervalo.

PROPOSICIÓN 5.16 *Si f es continua (y 1-periódica) salvo en x_0, donde $\exists\, f(x_0^+), f(x_0^-)$, $f'(x_0^+), f'(x_0^-)$, entonces $S_N f(x_0) \longrightarrow \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.*

Demostración Definimos la función auxiliar

$$h(x) = \begin{cases} f(x_0^+), & \text{en } (x_0, x_0 + 1/2) \\ f(x_0^-), & \text{en } (x_0 - 1/2, x_0) \end{cases}$$

y extendida periódicamente. Observamos ahora que $g = f - h$ es una función continua, vale 0 en x_0 y tiene derivada por la izquierda y por la derecha en dicho punto. Por lo tanto se puede usar el criterio de Dini, de forma que

$$S_N f(x_0) - S_N h(x_0) = S_N g(x_0) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} g(x_0) = 0.$$

De esta forma se tiene que

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(x_0) = \lim_{N\to\infty} S_N h(x_0), \text{ y basta probar que } \quad S_N h(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right], \forall N.$$

La última identidad se sigue de los cálculos

$$\begin{aligned} S_N h(x_0) &= \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} h(t)\, D_N(x_0 - t)\, dt = \\ &= f(x_0^+) \int_{x_0}^{x_0+1/2} D_N(x_0 - t)\, dt + f(x_0^-) \int_{x_0-1/2}^{x_0} D_N(x_0 - t)\, dt = \\ &= f(x_0^+) \int_0^{1/2} D_N(s)\, ds + f(x_0^-) \int_{-1/2}^{0} D_N(s)\, ds = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]. \end{aligned}$$

En la última parte hemos usado que D_N es par y por tanto tiene la misma integral a la derecha que a la izquierda de 0. ■

PROPOSICIÓN 5.17 *Si f es acotada y tiene una singularidad de salto en x_0, entonces la suma de Çesaro (de la serie de Fourier) converge a* $\frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]$.

Demostración Sea $h(x)$ la función auxiliar anterior. Entonces $g = f - h$ es continua en x_0 y acotada. Por tanto $\sigma_N g(x_0) = F_N * g(x_0) \longrightarrow g(x_0) = 0$ (porque $\{F_N\}$ es un núcleo de sumabilidad). Como $F_N * g = F_N * f - F_N * h$, se tiene que $\lim \sigma_N f(x_0) = \lim \sigma_N h(x_0)$. Entonces basta comprobar que se tiene $\sigma_N h(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right], \forall N$:

$$\begin{aligned} \sigma_N h(x_0) &= \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} h(t)\, F_N(x_0 - t)\, dt = \\ &= f(x_0^+) \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} F_N(x_0 - t)\, dt + f(x_0^-) \int_{x_0-1/2}^{x_0+1/2} F_N(x_0 - t)\, dt = \\ &= f(x_0^+) \int_0^{1/2} F_N(s)\, ds + f(x_0^-) \int_{-1/2}^{0} F_N(s)\, ds = \frac{1}{2}\left[f(x_0^+) + f(x_0^-)\right]. \end{aligned}$$

De nuevo, en la última igualdad hemos usado que F_N es par y por tanto tiene la misma integral a la derecha que a la izquierda de 0. ■

5.4.1. El fenómeno de Gibbs

TEOREMA 5.18 (Fenómeno de Gibbs) *En la proximidad de un salto en cierto punto x_0 de una función f (derivable salvo en x_0 y donde $\exists\ f(x_0^+), f(x_0^-), f'(x_0^+), f'(x_0^-)$) la serie de Fourier se dispara para alcanzar un 9 % del valor del salto.*

Demostración Basta probarlo para la función auxiliar h.

Considerando $h(x) = \dfrac{2}{m} h(x - x_0)$ podemos suponer que $x_0 = 0, f(x_0^+) = 1, f(x_0^-) = -1$.

Calculamos los coeficientes de Fourier: $\widehat{h}(0) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} h\, dx = 0$ porque h es impar.

Por otro lado, $n \neq 0 \Rightarrow \widehat{h}(n) = \displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} h(t)\, e^{-2\pi i n t} dt =$

$$-2i \int_0^{1/2} \operatorname{sen}(2\pi n t)\, dt = \frac{2i}{2\pi n} (\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \dfrac{-2i}{\pi n} & n \text{ impar} \end{cases}$$

Entonces

$$S_N h(x) = \sum_{-N}^{N} \widehat{h}(n)\, e^{2\pi i n x} = \sum_{\substack{|n| \leq N \\ (n \text{ impar})}} \frac{-2i}{\pi n} e^{2\pi i n x}$$

$$= \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impar})}}^{N} -\frac{2i}{\pi n} \left(e^{2\pi i n x} - e^{-2\pi i n x} \right) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n \text{ impar})}}^{N} \frac{4}{\pi n} \operatorname{sen}(2\pi n x).$$

En particular, $S_{2N-1} h(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{4}{\pi(2n-1)} \operatorname{sen}(2\pi(2n-1)x)$. Se puede ver que el primer punto crítico de esta función se da en $x = \frac{1}{4N}$. Además, llamando $x_n = \frac{2n-1}{4N}$, obtenemos por la teoría de sumas de Riemann

$$S_{2N-1} h\left(\frac{1}{4N}\right) = \frac{1}{2N} \sum_{n=1}^{N} \frac{4}{2\pi x_n} \operatorname{sen}(2\pi x_n) \xrightarrow{N\to\infty} 4 \int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}(2\pi x)}{2\pi x} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt.$$

El valor de esta última integral es $1,178979744 \cdots = 1 + 2 \times 0,089489872\ldots$, que representa una variación del 9 % del salto de la función (en este caso el salto es 2).

Capítulo 6

Transformada de Fourier en $\mathbb{R}$

6.1. Definiciones

Recordamos que si G es un grupo topológico, se define su *grupo dual* como la clase $\widehat{G} = \{L : G \longmapsto \mathbb{C} : L$ aplicación continua tal que $|L(x)| = 1, L(x+y) = L(x)L(y) \;\; \forall x, y\}$. A los elementos de $\widehat{G}$ se les denomina caracteres. En nuestro caso:

Si $G = \mathbb{T}$, $\widehat{\mathbb{T}} = \{L : \mathbb{T} \longmapsto \mathbb{C} : \exists n \in \mathbb{Z}$ tal que $L(\theta) = e^{2\pi i n\theta}, \forall\theta\}$. De esta forma el grupo dual de $\mathbb{T}$ se puede identificar con $\mathbb{Z}$.

Por otro lado, Si $G = \mathbb{R}$, $\widehat{\mathbb{R}} = \{L : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C} : \exists\xi \in \mathbb{R}$ tal que $L(x) = e^{2\pi i x\cdot\xi}$, $\forall x \in \mathbb{R}\}$. De esta forma el grupo dual de $\mathbb{R}$ se puede identificar consigo mismo.

DEFINICIÓN 6.1 *La transformada de Fourier para $f \in L^1(\mathbb{R})$ se define como*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot e^{-2\pi i x\cdot\xi}\, dx, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Es por tanto la integral de la función f contra los caracteres del grupo dual.

También podemos definir la transformada en varias dimensiones para cada $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$, interpretando el producto $x \cdot \xi$ en el sentido vectorial:
si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$, $\quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N) \in \mathbb{R}^N$, entonces $x \cdot \xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_N\xi_N$.

Estudiamos las primeras propiedades relevantes de la transformada de Fourier en L^1

PROPOSICIÓN 6.1 *Si $f \in L^1$ se tiene*

i) $\widehat{f} \in L^\infty$*; de hecho* $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

ii) $\widehat{f} \in \mathcal{C}$ *(clase de las funciones continuas).*

iii) $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0$ *(funciones continuas que tienden a cero en ∞); es decir $\mathcal{F} : L^1 \to \mathcal{C}_0$. Esto es el equivalente al* **lema de Riemann-Lebesgue** *del caso periódico.*

Si $f, g \in L^1$ se tiene

iv) $\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi)$

v) $\displaystyle\int f(y)\,\widehat{g}(y)\,dy = \int \widehat{f}(y)\,g(y)\,dy$

Demostración El apartado *i)* es inmediato. Para *ii)* observamos

$$\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi) = \int f(x)\left(e^{-2\pi i x(\xi+h)} - e^{-2\pi i x\xi}\right)dx.$$

Cuando $h \to 0$, el integrando converge a 0 y está acotado puntualmente por $2|f(x)|$ independiente de h. Usando el TCD se sigue $\lim_{h\to 0}(\widehat{f}(\xi+h) - \widehat{f}(\xi)) = 0$, lo que implica la continuidad de f.

Para *iii)* usaremos que $e^{-i\pi} = -1$:

$$\left|\widehat{f}(\xi)\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}\left(\frac{1-e^{-\pi i}}{2}\right)dx\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\xi\left(x+\frac{1}{2\xi}\right)}dx\right|$$

$$\overset{\overline{x}=x+\frac{1}{2\xi}}{\underset{\downarrow}{=}} \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(f(x) - f\left(x-\frac{1}{2\xi}\right)\right)e^{-2\pi i x\xi}dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left|f(x) - f\left(x-\frac{1}{2\xi}\right)\right|dx = \frac{1}{2}\left\|f - \tau_{\frac{1}{2\xi}}f\right\|_{L^1} \overset{\xi\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0,$$

donde $\tau_{\frac{1}{2\xi}}$ denota el operador traslación que, como sabemos, es continuo en 0 para la norma de L^1.

Finalmente *iv)* y *v)* se deducen ambos del Teorema de Fubini. Por un lado

$$\widehat{f*g}(\xi) = \int\int f(x)g(y-x)e^{-2\pi i y\xi}dx\,dy = \int f(x)e^{-2\pi i x\xi}\left(\int g(y-x)e^{-2\pi i(y-x)\xi}dy\right)dx$$
$$= \int f(x)e^{-2\pi i x\xi}\left(\int g(y)e^{-2\pi i y\xi}dy\right)dx = \widehat{f}(\xi)\,\widehat{g}(\xi),$$

y por otro

$$\int f(y)\,\widehat{g}(y)\,dy = \int f(y)\int g(x)e^{-2\pi i xy}dx\,dy = \int g(x)\int f(y)e^{-2\pi i xy}dy\,dx = \int g(x)\,\widehat{f}(x)\,dx.$$

■

6.2. La clase de Schwartz

Nota: Al igual que en el caso periódico, el espacio natural para la transformada de Fourier es L^2, pero si $f \in L^2$ no sabemos a priori que exista la integral

$$\int f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx,$$

es decir,

$$f \in L^2 \quad \not\Rightarrow \quad \int \left| f(x) e^{-2\pi i x \xi} \right| dx < \infty.$$

Por otro lado la transformada de Fourier no deja L^1 invariante. Así por ejemplo, la función $f(x) = \chi_{(-1/2,1/2)}(x) \in L^1 \cap L^2$ tiene como transformada

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i x \xi} dx = \frac{e^{-\pi i \xi} - e^{\pi i \xi}}{-2\pi i \xi} = \frac{\operatorname{sen} \pi \xi}{\pi \xi}.$$

No es difícil ver que esta función verifica $\widehat{f} \in L^2 \setminus L^1$. La idea para resolver este problema es definir la transformada sobre una subclase de funciones contenida en $L^1 \cap L^2$, que sea densa en L^2 y luego extender la definición a todo el espacio. Esa clase de funciones va a ser la clase de Schwartz, que se define de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 6.2 *Se define la* <u>*clase de Schwartz*</u> *como :*

$$\mathscr{S} = \left\{ f \in C^\infty \ : \ \forall m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ , \ |x|^m |D^k f(x)| \leq C_{m,k} < \infty \ , \ \forall x \right\},$$

en donde D^k denota el operador diferencial $\left(\frac{d}{dx}\right)^k$.

La siguientes **propiedades de $\mathscr{S}$** son inmediatas:

1. Si $f \in \mathscr{S}$, para todo polinomio, $p(x)$, se tiene $\lim_{x \to \pm\infty} |p(x) f(x)| = 0$.
2. Si $f \in \mathscr{S}$, entonces $D^k f \in \mathscr{S}, \forall k$.
3. $e^{-|x|^2} \in \mathscr{S}$.
4. $C_c^\infty \subset \mathscr{S}$.
5. $\mathscr{S}$ es densa en L^p, $\forall 0 < p < \infty$.

Ejemplo : Vamos a calcular la transformada de Fourier de $g(x) = e^{-\pi |x|^2}$. Recordamos primero que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi |t|^2} dt = 1$ y que por tanto $\widehat{g}(0) = 1$. Como $\widehat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi |x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$, por el TCD

$$\frac{d \widehat{g}}{d \xi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi |x|^2} (-2\pi i x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = i \int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \left(e^{-\pi |x|^2} \right) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Integrando por partes,

$$\frac{d \widehat{g}}{d \xi}(\xi) = i (2\pi i \xi) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi |x|^2} e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx = -2\pi \, \xi \, \widehat{g}(\xi).$$

Esto nos da una sencilla EDO cuya solución viene dada por $\widehat{g}(\xi) = \widehat{g}(0) e^{-\pi |\xi|^2}$. Por tanto $\widehat{g} = g$.

De esta forma hemos probado el siguiente

LEMA 6.2 *Si $g = e^{-\pi |x|^2}$, se tiene $\widehat{g} = g$.*

Este resultado lo utilizaremos más adelante.

6.3. Relación entre la transformada de Fourier y la derivación

LEMA 6.3 *Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, si además se cumple que $\exists \frac{df}{dx} \in L^1(\mathbb{R})$ y $f \in C_0$, entonces*

$$\left(\frac{d}{dx} f\right)^{\wedge}(y) = 2\pi i y \widehat{f}(y)$$

Por inducción deducimos

COROLARIO 6.4 *Si $f \in \mathscr{S}$,*

- $\left[\left(\frac{d}{dx}\right)^k f\right]^{\wedge}(y) = (2\pi i y)^k \widehat{f}(y)$.
- *Con más generalidad, si P denota el polinomio $P(t) = a_m t^m + ... + a_1 t + a_0$, entonces*

$$\widehat{P(D)f}(y) = P(2\pi i y)\widehat{f}(y).$$

Demostración del Lema 6.3: Queremos probar que $(f')^{\wedge}(y) = (2\pi i y)\widehat{f}(y)$. Pero esto es inmediato integrando por partes y usando que, por hipótesis, $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$:

$$(f')^{\wedge}(y) = \int f'(x) e^{-2\pi i x y} dx = 2\pi i y \int f(x) e^{-2\pi i x y} dx = (2\pi i y)\widehat{f}(y).$$

■

LEMA 6.5 *Si $f \in L^1$, $x \cdot f(x) \in L^1$, entonces existe $\dfrac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$ y vale*

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \int (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

es decir,

$$\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \left[-2\pi i(\cdot) f(\cdot)\right]^{\wedge}(\xi).$$

COROLARIO 6.6 *Si $f \in \mathscr{S}$, entonces $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ y dado P, un polinomio en n variables,*

$$P(D)\widehat{f}(y) = \left(P(-2\pi i \cdot) f\right)^{\wedge}(y).$$

Demostración del Lema 6.5: Se tiene

$$\frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = \lim_{h \mapsto 0} \frac{\widehat{f}(y+h) - \widehat{f}(y)}{h} = \lim_{h \mapsto 0} \int f(x) \frac{e^{-2\pi i x(y+h)} - e^{-2\pi i x y}}{h} dx.$$

Como el integrando tiende a $f(x)\,(-2\pi i x)\,e^{-2\pi i x y}$, y además

$$\left| f(x) \frac{e^{-2\pi i x(y+h)} - e^{-2\pi i x y}}{h} \right| \leq 2\pi \left| x\, f(x) \right| \in L^1,$$

independientemente de h, por el teorema de la convergencia dominada obtenemos

$$\frac{d}{dy}\widehat{f}(y) = \int f(x) \lim_{h\mapsto 0} \frac{e^{-2\pi ix(y+h)} - e^{-2\pi ixy}}{h} dx = \int (-2\pi ix) f(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

■

TEOREMA 6.7 *La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es una aplicación lineal que preserva la clase $\mathscr{S}$.*

Demostración La linealidad, es decir, el que $\widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}$, es inmediata a partir de la definición. Dada $f \in \mathscr{S}$ queremos probar que $\widehat{f} \in \mathscr{S}$. Ya sabemos por el Corolario 6.6 que $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$. Nos falta probar que dados $m, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ entonces

$$\left| y^m D^k \widehat{f}(y) \right| \leq C_{m,k} < \infty, \quad \forall y.$$

Por los corolarios anteriores, si $P_m(x) = x^m$ y $P_k(x) = x^k$ se tiene

$$\left| y^m D^k \widehat{f}(y) \right| = \left| \frac{1}{(2\pi i)^m} P_m(2\pi iy) \left(P_k(-2\pi i\cdot) f(\cdot) \right)^\wedge (y) \right| =$$

$$\left| \frac{1}{(2\pi i)^m} \left[P_m(D) \left(P_k(-2\pi i\cdot) f(\cdot) \right) \right]^\wedge (y) \right| \leq \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbb{R}} \left| \underbrace{D^m \left((2\pi ix)^k f(x) \right)}_{\in \mathscr{S}} \right| dx = C_{m,k} < \infty.$$

■

6.4. Teorema de inversión de la transformada de Fourier

TEOREMA 6.8 (Teorema de Inversión en $\mathscr{S}$) *La transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ es biyectiva con la inversa dada por $\mathcal{F}^{-1} f(x) = \mathcal{F} f(-x) = \widehat{f}(-x)$*

Notación Se define la transformada inversa de Fourier para $f \in L^1$ de la siguiente forma

$$\overset{\vee}{f}(x) = \int f(y) e^{2\pi ix\cdot y} dy$$

Observación: Como $\overset{\vee}{f}(x) = \widehat{f}(-x)$, las propiedades de la transformada inversa de Fourier se deducen de las propiedades de la transformada de Fourier. En particular $^\vee : \mathscr{S} \to \mathscr{S}$

Demostración del Teorema de Inversión Queremos probar que si $f \in \mathscr{S}$, entonces $f = \left(\widehat{f}\right)^\vee$, es decir

$$f(x) = \int \widehat{f}(y) e^{2\pi ix\cdot y} dy.$$

Recordamos que si $g(x) = e^{-\pi x^2}$, entonces $\widehat{g} = g = g^{\vee}$ (esto último por ser una función par) y que $g_t(x) = \frac{1}{t} g\left(\frac{x}{t}\right)$ es un núcleo de sumabilidad para $t \to 0$. Por tanto si $f \in \mathscr{S}$

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f * g_t(x), \qquad \text{entendiendo el límite tanto puntualmente como en norma.}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} f * g_t(x) &= \int f(y) \frac{1}{t} g\left(\frac{x-y}{t}\right) dy \overset{g=\widehat{g}}{=} \int f(y) \frac{1}{t} \widehat{g}\left(\frac{x-y}{t}\right) dy = \\ &= \int f(y) \left(\int \frac{1}{t} g(u) e^{2\pi i u \left(\frac{x-y}{t}\right)} du \right) dy \overset{\frac{u}{t}=v}{=} \int f(y) \left(\int g(vt) e^{2\pi i v(x-y)} dv \right) dy = \\ &= \int \left(\int f(y) e^{-2\pi i v y} \right) g(vt) e^{2\pi i v x} dv = \int \widehat{f}(v) g(tv) e^{2\pi i x v} dv. \end{aligned}$$

Usando el TCD

$$f(x) = \lim_{t \to 0} f * g_t(x) = \lim_{t \to 0} \int \widehat{f}(v) \underbrace{g(tv)}_{\substack{\downarrow \\ g(0)=1}} e^{2\pi i x v} dv = \int \widehat{f}(v) e^{2\pi i x v} dv$$

NOTA: obsérvese que para el resultado no hace falta que $f \in \mathscr{S}$ sino solamente $f, \widehat{f} \in L^1$.$\blacksquare$

TEOREMA 6.9 *La transformada de Fourier es un isomorfismo isométrico en $\mathscr{S}$ con la norma de L^2, es decir*

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathscr{S} &\longmapsto \mathscr{S} \\ f &\longmapsto \widehat{f}, \end{aligned}$$

verifica, $\forall f, g \in \mathscr{S}$,

1. *la identidad de Parçeval:* $< f, g > = \int f \, \overline{g} = \int \widehat{f} \, \overline{\widehat{g}} = < \widehat{f}, \widehat{g} >$

2. *la identidad de Plancherel:* $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}$

Demostración Basta probar la identidad de Parçerval. Para ello recordamos la Proposición 6.1 *v)*: si $f, h \in L^1$, $\int f \widehat{h} = \int \widehat{f} h$.

Dadas $f, g \in \mathscr{S}$, tomamos $h = \overline{\widehat{g}}$. De esta forma se tiene $h \in \mathscr{S}$ y $\widehat{h} = \overline{g}$. Luego por el lema,

$$\int f \, \overline{g} = \int f \, \widehat{h} = \int \widehat{f} \, h = \int \widehat{f} \, \overline{\widehat{g}}.$$

$\blacksquare$

6.5. Extensión a L^2 de la transformada de Fourier

Ejemplo (repetido): Sea $f = \chi_{(-1,1)}$. Claramente $f \in L^1 \cap L^2$ y se tiene

$$\widehat{f}(y) = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i x y} dx = \frac{1}{-2\pi i y} e^{-2\pi i x y}\Big|_{x=-1}^{x=1} = \frac{e^{2\pi i y} - e^{-2\pi i y}}{2\pi i y} = \frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{\pi y}.$$

Esta función no está en L^1 porque

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{\pi y} \right| dy = \infty.$$

Sin embargo, sí está en L^2:

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\operatorname{sen}(2\pi y)}{\pi y} \right|^2 dy < \infty.$$

Nos preguntamos que si $\widehat{f} = \widehat{\chi}_{(-1,1)} \notin L^1$, ¿cómo podemos definir $(\widehat{f}\ )^{\vee}$ y concluir que vale f?

En general si $g \in L^2$, pero <u>no</u> es integrable, ¿cómo definimos $\widehat{g}(y) = \displaystyle\int g(x) e^{-2\pi i x y} dx$? La respuesta viene dada por la siguiente

DEFINICIÓN 6.3 *Sea $g \in L^2$. Cómo $\mathscr{S}$ es densa en L^2, existe una sucesión $\{g_n\} \subset \mathscr{S}$ tal que $g_n \xrightarrow{L^2} g$ (i.e. $\|g_n - g\|_{L^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$). Por tanto, $\{g_n\}$ es de Cauchy. Entonces $\{\widehat{g_n}\} \subset \mathscr{S}$, también es de Cauchy ya que*

$$\|\widehat{g_n} - \widehat{g_m}\|_{L^2} = \|\widehat{g_n - g_m}\|_{L^2} \overset{Plancherel}{=} \|g_n - g_m\|_{L^2} \overset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Como L^2 es completo, $\{\widehat{g_n}\}$ tiene límite en L^2 y a este límite lo llamaremos la <u>transformada de Fourier</u> de g, es decir

$$\widehat{g} = \lim_{n\to\infty} \widehat{g_n}.$$

TEOREMA 6.10 *En las condiciones anteriores se tiene:*

1. *La definición anterior es consistente, es decir, no depende de la sucesión $\{g_n\}$ de $\mathscr{S}$ elegida.*

2. *La definición anterior define un isomorfismo isométrico en L^2, es decir*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \longmapsto L^2(\mathbb{R}),$$

es lineal y biyectiva. Además cumple:

- $< f, g > = < \widehat{f}, \widehat{g} >$, *(Identidad de Parçeval)*
- $\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\,\|_{L^2}$, *(Identidad de Plancherel)*

Demostración

1. Supongamos que $\exists\{g_n\}\subset\mathscr{S}$, $\{h_n\}\subset\mathscr{S}$ tales que $h_n\xrightarrow{L^2} g \xleftarrow{L^2} g_n$ y queremos ver que $\widehat{h_n}\xrightarrow{L^2}\widehat{g}\xleftarrow{L^2}\widehat{g_n}$. Ya sabemos de la existencia del límite en ambos casos, pero queremos asegurarnos de que $\lim_{n\to\infty}\widehat{g_n}=\lim_{n\to\infty}\widehat{h_n}$. Esto se sigue de la identidad de Plancherel:
$$\|\widehat{g_n}-\widehat{h_n}\|_{L^2}=\|g_n-h_n\|_{L^2}\le\|g_n-g\|_{L^2}+\|g-h_n\|_{L^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

2. $\mathcal{F}$ es lineal: dadas $f,g\in L^2$ y $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$, elegimos
$$\mathscr{S}\ni g_n\overset{L^2}{\longmapsto}g,\qquad \mathscr{S}\ni f_n\overset{L^2}{\longmapsto}f.$$
Entonces se tiene, por un lado $\alpha g_n+\beta f_n\xrightarrow{L^2}\alpha g+\beta f$ y $\widehat{\alpha g_n+\beta f_n}\xrightarrow{L^2}\widehat{\alpha g+\beta f}$ y por otro
$$\widehat{\alpha g_n+\beta f_n}=\alpha\widehat{g_n}+\beta\widehat{f_n}\begin{cases}\xrightarrow{L^2}\widehat{\alpha g+\beta f},\\ \xrightarrow{L^2}\alpha\widehat{g}+\beta\widehat{f}.\end{cases}$$
Esto nos da la linealidad. Para probar el teorema de inversión, dada $g\in L^2$ se define $g^\vee$ de la misma manera: $\mathscr{S}\ni g_n\xrightarrow{L^2}g$, $\{g_n^\vee\}$ tiene límite en L^2, lo llamaremos $g^\vee$ y es la inversa porque
$$g_n\xrightarrow{L^2}g,\qquad \widehat{g_n}\xrightarrow{L^2}\widehat{g},$$
luego
$$g_n=(\widehat{g_n}\,)^\vee\xrightarrow{L^2}(\widehat{g}\,)^\vee.\quad \text{Como } g_n\xrightarrow{L^2}g,\ \text{se sigue } (\widehat{g}\,)^\vee=g.$$
Plancherel y Parçeval se deducen del correspondiente resultado en $\mathscr{S}$ y de la continuidad del producto escalar:
$$\mathscr{S}\ni f_n\xrightarrow{L^2}f,\qquad \mathscr{S}\ni g_n\xrightarrow{L^2}g,$$
$$<f,g>\longleftarrow<f_n,g_n>=<\widehat{f_n},\widehat{g_n}>\longrightarrow<\widehat{f},\widehat{g}>,\qquad \text{luego}\qquad <f,g>=<\widehat{f},\widehat{g}>.$$

■

6.6. La Transformada de Fourier y las ecuaciónes "elementales"de la Física

En el último capítulo mostramos como utilizar la transformada de Fourier para el estudio de ciertas ecuaciónes en Derivadas Parciales de valores iniciales en $\mathbb{R}^{N+1}_+=\{(x,t)\ :\ x\in\mathbb{R}^N,\ t>0\}$
$$\begin{cases}\Box_{x,t}u(x,t)=0, & (x,t)\in\mathbb{R}^{N+1}_+,\\ u(x,0)=f(x), & x\in\mathbb{R}^N,\end{cases}$$
donde $\Box$ denota un operador diferencial lineal.

En concreto, estamos interesados en el problema de la convergencia al dato inicial de las soluciones; es decir, en qué sentido se tiene $\lim_{t\to0^+}u(x,t)=f(x)$. Como ejemplos, estudiaremos la ecuación del calor, la de Laplace, la de ondas y la de Schrödinger.

En esta sección sin embargo trataremos solamente las dos primeras (calor y Laplace) en el caso unidimensional (N=1).

6.6.1. La ecuación del calor

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \triangle_x u(x,t) = P(D)u(x,t), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}}$$

donde $P(x) = x^2$. Fijamos t y llamamos $V^t(x) = u(x,t)$

Calculamos la transformada de Fourier con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{V^t}(\xi) = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}}(\xi) = \widehat{\triangle u} = P(2\pi i\xi)\widehat{V^t(\xi)} = -4\pi^2|\xi|^2\widehat{V^t(\xi)}$$

$$\widehat{V^0(\xi)} = \widehat{f}(\xi)$$

Fijamos ξ y escribimos $y(t) = \widehat{V^t}(\xi)$.

Nos queda una EDO de orden 1 : $\begin{cases} y'(t) = -4\pi|\xi|^2\, y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi), \end{cases}$

cuya solución es: $y(t) = \widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$. Buscamos una función cuya transformada de Fourier sea $e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$.

Nota. Si $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces llamando $h_t(x) = \frac{1}{t}h\left(\frac{x}{t}\right)$ se tiene $\widehat{h_t}(\xi) = \widehat{h}(t\,\xi)$.

Sabemos que si $g(x) = e^{-\pi|x|^2}$, entonces $\widehat{g}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2}$. Poniendo $s = (4\pi t)^{1/2}$, tenemos

$$e^{-4\pi^2 t|\xi|^2} = e^{(-4\pi t)\pi|\xi|^2} = e^{-\pi|s\xi|^2} = \widehat{g}(s\xi) = \widehat{g_s}(\xi)$$

La función que buscamos es por tanto

$$g_s(x) = \frac{1}{s}g\left(\frac{x}{s}\right) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{1}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4t}} = G_t(x) : \quad \text{Núcleo del Calor}$$

Hemos probado $\widehat{G}_t(\xi) = e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$, y de esta forma se tiene

$$\widehat{V^t}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{G}_t(\xi) = \widehat{f * G_t}(\xi).$$

Luego

$$u(x,t) = V^t(x) = f * G_t(x)$$

Por tanto, la solución de la ecuación del calor, con dato inicial f es:

$$\boxed{u(x,t) = G_t * f(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}}\, dy.}$$

Propiedades de la solución $u(x,t)$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$.

1. $G_t(x) \in \mathscr{S}$, luego $u(x,t) \in \mathcal{C}^\infty$, $\forall t > 0$.
2. G_t es la solución fundamental de la ecuación del calor.

   Ejercicio: Probar directamente: $\frac{\partial}{\partial t} G_t(x) = \triangle_x G_t(x)$.

3. $\{G_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad para $t \longrightarrow 0^+$. Por tanto

   $$G_t * f \longrightarrow f \begin{cases} \text{Uniformemente contínua si } f \text{ es unif. continua.} \\ \text{Puntualmente si } f \text{ continua y acotada.} \\ \text{En norma } L^p \text{ si } f \in L^p \text{ y } 1 \leq p < \infty. \end{cases}$$

   Además si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$

   $$G_t(x) * f \xrightarrow{t \to 0} f \quad \text{puntualmente c.t.p.}$$

   Para ello se usa el mismo argumento que en el Teorema de diferenciación de Lebesgue a través del operador de Hardy-Littlewood.

6.6.2. La ecuación de Laplace

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt} + \triangle_x u(x,t) = \triangle_{x,t} u(x,t) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}}$$

Fijamos t, y llamamos como antes $V^t(x) = u(x,t)$. Tomamos la trasformada de Fourier en x: $\partial_{tt}\widehat{V^t}(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{V^t}(\xi)$. Fijemos ξ y sea $y(t) = \widehat{V^t}(\xi)$, resultando una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2|\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

El polinomio característico es $r^2 - 4\pi^2|\xi|^2 = 0 \iff (r - 2\pi|\xi|)\,(r + 2\pi|\xi|) = 0$, y las soluciones asociadas son $e^{\pm 2\pi|\xi|t}$. Elegimos la solución acotada para $t > 0$:

$$y(t) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}.$$

Definimos ahora

$$P(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+|x|^2}, \text{ (Núcleo de Poisson)} \qquad \text{de forma que} \qquad \int_{\mathbb{R}} P(x)dx = 1.$$

Entonces, como veremos, $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$. En particular, si llamamos $P_t(x) = \frac{1}{t}P\left(\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+x^2}$ se tiene

$$\widehat{P_t}(\xi) = \widehat{P}(t\xi) = e^{-2\pi|\xi|t},$$

es decir

$$y(t) = \widehat{V^t}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{P_t}(\xi) = \widehat{f * P_t}(\xi).$$

Finalmente, por el teorema de inversión:

$$\boxed{V^t(x) = u(x,t) = f * P_t(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{t}{t^2+(x-y)^2}dy.}$$

Propiedades de la solución $u(x,t)$. Sea $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$.

De nuevo nos preguntamos por las propiedades de $u(x,t)$ para $t \longrightarrow 0^+$.

1. $P \in \mathcal{C}^\infty$ pero $P \notin \mathscr{S}$ porque $\widehat{P} \notin \mathcal{C}^\infty$. Aun así, $u(x,t) \in \mathcal{C}^\infty, \forall t > 0$.
2. P_t es solución fundamental porque

$$\begin{cases} \partial_{tt}\left[P_t(x)\right] + \triangle_x\left[P_t(x)\right] = 0, \\ P_t(x) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \delta_0. \end{cases}$$

3. $\{P_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad para $t \longrightarrow 0^+$, porque

$$P_t = \frac{1}{t}P\left(\frac{\cdot}{t}\right), \qquad P \ge 0 \quad \text{y} \quad \int P = 1$$

En particular,

$$\text{lím}_{t\to 0}\, u(x,t) = f(x) \begin{cases} \text{Puntualmente,} & \textit{si } f \in C \text{ y acotada,} \\ \text{Uniformemente,} & \textit{si } f \in C_0, \\ \text{En norma } L^p, & \textit{si } f \in L^p \text{ y } 1 \le p < \infty. \end{cases}$$

Como en el caso de la ecuación del calor también se tiene

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \quad \text{en c.t.p.}\, x \quad \text{si} \quad f \in L^p\left(\mathbb{R}^n\right) \quad 1 \le p < \infty$$

Para ver que $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, basta con probar que si $F(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ entonces $F^\vee(x) = \widehat{F}(x) = P(x)$, porque $F, P \in L^1$.

Demostración (Usamos integración compleja, cuya justificación es sencilla pero se deja a los interesados).

$$F^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\xi|}e^{2\pi i x\xi}d\xi \int_0^\infty e^{-2\pi(1-ix)\xi}d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi(1-ix)\xi}d\xi =$$
$$= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{(1+ix)^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

■

Capítulo 7

Las ecuaciónes "elementales" de la Física

En este capítulo mostramos como utilizar la transformada de Fourier para el estudio de ciertas ecuaciónes en Derivadas Parciales de valores iniciales en $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(x,t) \ : \ x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0\}$ de la forma

$$\begin{cases} \Box_{x,t} u(x,t) = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

En concreto, estamos interesados en el problema de la convergencia al dato inicial de las soluciones; es decir, en qué sentido se tiene $\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = f(x)$. Como ejemplos, estudiaremos la ecuación del calor, la de ondas, la de Laplace y la de Schrödinger.

7.1. La ecuación del calor

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \triangle_x u = P(D)u \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad \text{Donde } x = (x_1, ..., x_n)\,; \quad P(D) = x_1^2 + ... + x_n^2}$$

Fijamos t: $V^t(x) = u(x,t)$

Calculamos la transformada de Fourier con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial t}\widehat{V^t} = \widehat{\frac{\partial u}{\partial t}} = \widehat{\triangle u} = P(2\pi i \xi)\widehat{V^t(\xi)} = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{V^t(\xi)}$$

$$\widehat{V^0(\xi)} = \widehat{f}(\xi)$$

Fijamos ξ, $y(t) = \widehat{V^t}(\xi)$

Nos queda una EDO de orden 1 : $\begin{cases} y'(t) = -4\pi|\xi|^2\, y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$

Solución de la EDO: $y(t) = \widehat{f}(\xi)e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$. Buscamos una función cuya transformada de Fourier sea $e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$.

Nota. Si $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces llamando $h_t(x) = \frac{h(\frac{x}{t})}{t^n}$ se tiene $\widehat{h_t}(\xi) = \widehat{h}(t\cdot\xi)$.

Sabemos que si $g(x)=e^{-\pi|x|^2}$, entonces $\widehat{g}(\xi)=e^{-\pi|\xi|^2}$. Poniendo $s=(4\pi t)^{1/2}$, tenemos

$$e^{-4\pi^2 t|\xi|^2}=e^{(-4\pi t)\pi|\xi|^2}=e^{-\pi|s\xi|^2}=\widehat{g}(s\xi)=\widehat{g_s}(\xi)$$

La función que buscamos es por tanto

$$g_s(x)=\frac{g\left(\frac{x}{s}\right)}{s^n}=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{|x|^2}{4t}}=G_t(x): \quad \text{Núcleo del Calor}$$

Hemos probado $\widehat{G}_t(\xi)=e^{-4\pi^2|\xi|^2 t}$, y de esta forma se tiene

$$\widehat{V^t}(\xi)=\widehat{f}(\xi)\widehat{G}_t(\xi)=\widehat{f*G_t}(\xi).$$

Luego

$$u(x,t)=V^t(x)=f*G_t(x)$$

Por tanto, la solución de la ecuación del calor, con dato inicial f es:

$$\boxed{u(x,t)=G_t*f(x)=\frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,e^{\frac{-|x-y|^2}{4t}}dy}$$

Propiedades de la solución $u(x,t)$. Sea $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$.

Observación: $G_t(x)\in\mathscr{S}$, luego $u(x,t)\in\mathcal{C}^\infty$, $\forall t>0$.

1º Paso: Si $u(x,t)=G_t*f(x)$, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t}u=\frac{\partial}{\partial t}(G_t*f)=\left(\frac{\partial}{\partial t}G_t\right)*f(x)$$

$$\triangle u=\triangle(G_t*f)=(\triangle G_t)*f(x)$$

Ejercicio: $\frac{\partial}{\partial t}G_t(x)=\triangle_x G_t(x)$.

G_t es la solución fundamental de la ecuación del calor, luego $\frac{\partial u}{\partial t}=\triangle u$.

2º Paso: $\lim_{t\to 0^+}u(x,t)=f(x)$ ¿En que sentido? (en norma, puntual, uniforme...).

$\{G_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad para $t\longrightarrow 0^+$:

Llamemos $h(x)=\frac{1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}e^{\frac{-|x|^2}{4}}$, $G_t(x)=\frac{1}{t^{n/2}}h\left(\frac{x}{t^{n/2}}\right)$, con $h\in L^1$, $\int h=1$ y $h\ge 0$, por tanto

$$\int_{|x|>\delta}G_t(x)dx\longrightarrow 0$$

y se tiene

$$G_t*f\longrightarrow f\begin{cases}\text{Uniformemente contínua si } f \text{ es unif. continua}\\ \text{Puntualmente si } f \text{ continua y acotada}\\ \text{En norma } L^p \text{ si } f\in L^p \text{ y } 1\le p<\infty\end{cases}$$

Además si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$

$$G_t(x) * f \stackrel{t \to 0}{\longrightarrow} f \quad \text{puntualmente c.t.p.}$$

Para ello observamos que $G_t(x)$ es par, radial, decreciente y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} G_t(x)dx = 1$. El siguiente resultado nos dice que la convolución está acotada por el operador de Hardy-Littlewood, es decir $|G_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$, $\forall t > 0$.

LEMA 7.1 *Si K es una función positiva, $K : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$, radial y decreciente, es decir $\exists K_0 : (0, \infty) \longmapsto (0, \infty)$, decreciente tal que $K(x) = K_0(|x|)$, entonces $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se tiene*

$$|K * f| \leq 2\,(\|K\|_{L^1})\,\mathcal{M}f(x)$$

<u>**Consecuencia**</u>: Si $\{K_t\}_t$ es un núcleo de sumabilidad para $t \to a^+$ donde cada K_t es radial y decreciente se tiene

$$\sup_t |K_t * f(x)| \leq C\mathcal{M}f$$

y por tanto (usando el mismo argumento que en la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue) se tiene que

$$k_t * f(x) \stackrel{t \to a^+}{\longrightarrow} f(x) \ \text{ c.t.p.}$$

si $f \in L^p$ $1 \leq p < \infty$, como anunciábamos (ver el argumento con detalle en la siguiente sección).

Demostración del Lema: Por ser radial y decreciente, en particular el conjunto de nivel $A_\lambda = \{x \in \mathbb{R} : \ K(x) > \lambda\}$ es una bola centrada en el origen. Recordemos que

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r|} \int_{x+B_r} |f(y)|dy == \sup_{r>0} \left(|f| * \frac{1}{|B_r|} \chi_{B_r}(x) \right)$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, sea $A_k = \left\{x : \ K(x) > 2^k\right\}$, A_k es una bola y $\ldots \supset A_k \supset A_{k+1} \supset \ldots$. Además se tiene, $K(x) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2^k \chi_{A_k}(x)$, porque si $2^{k_0} < K(x_0) \leq 2^{k_0+1}$ entonces $x_0 \in A_k$ $\forall k \leq k_0$, lo que implica

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \chi_{A_k}(x_0) = \sum_{k=-\infty}^{k_0} 2^k = \frac{2^{k_0}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{k_0+1} \geq K(x).$$

Así

$$|K * f(x)| \leq K * |f|(x) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k \chi_{A_k} * |f|(x) =$$

$$= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k |A_k| \left(\frac{\chi_{A_k} * |f|(x)}{|A_k|} \right) \leq \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k |A_k| \right) \mathcal{M}f(x).$$

Solo falta por probar
$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^k|A_k| \leq 2\|k\|_{L^1}.$$

$$I = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k|A_k| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k \left(|A_k \setminus A_{k+1}| + |A_{k+1}|\right) =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k|A_k \setminus A_{k+1}| + 1/2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{k+1}|A_{k+1}| = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k|A_k \setminus A_{k+1}| + \frac{I}{2}.$$

$$I = 2\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k|A_k \setminus A_{k+1}|\right) = 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k\setminus A_{k+1}} 2^k dx \leq$$
$$\leq 2\sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k\setminus A_{k+1}} K(x)dx = 2\int_{\mathbb{R}^n} K(x) = 2\|K\|_{L^1}$$

■

7.2. La ecuación de Laplace

$$\boxed{\begin{cases} u_{tt} + \triangle_x u = 0 \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad \text{donde } x = (x_1, ..., x_n)}$$

Fijamos t, y llamamos $v_t(x) = u(x,t)$. Tomamos la trasformada de Fourier en x: $\partial_{tt}\widehat{v}_t(\xi) = 4\pi^2|\xi|^2\widehat{v}_t(\xi)$. Fijemos ξ y sea $y(t) = \widehat{v}_t(\xi)$, resultando una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2|\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

El polinomio característico es $r^2 - 4\pi^2|\xi|^2 = 0 \iff (r - 2\pi|\xi|)(r + 2\pi|\xi|) = 0$, y las soluciones asociadas son $e^{\pm 2\pi|\xi|t}$. Elegimos la solución acotada para $t > 0$:

$$y(t) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi|\xi|t}.$$

Escribiremos
$$P(x) = c_n\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}},$$

donde c_n es la constante que hace que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} P(x)dx = 1$, es decir

$$c_n = \frac{1}{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Entonces, como veremos, $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$. En particular, si llamamos $P_t(x) = \frac{P\left(\frac{x}{t}\right)}{t^n}$ se tiene

$$\widehat{P_t}(\xi) = \widehat{P}(t\xi) = e^{-2\pi|\xi|t},$$

es decir

$$y(t) = \widehat{v}_t(\xi) = \widehat{f}(\xi) \cdot \widehat{P_t}(\xi) = \widehat{f * P_t}(\xi).$$

Finalmente, por el teorema de inversión:

$$v_t(x) = u(x,t) = f * P_t(x)$$

De nuevo nos preguntamos por las propiedades de $u(x,t)$ para $t \longrightarrow 0^+$.
Justificación: $\{P_t\}_{t>0}$ es un núcleo de sumabilidad para $t \longrightarrow 0^+$, porque

$$P_t = \frac{1}{t^n} P\left(\frac{\cdot}{t}\right), \qquad P \geq 0 \,\text{y} \qquad \int P = 1$$

$$P(x) = c_n \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \qquad \text{se le llama } \textbf{Núcleo de Poisson}$$

Nota: Es diferente al del caso periódico.
En particular,

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \begin{cases} \text{Puntualmente si } f \in C \text{ y acotada} \\ \text{Uniformemente si } f \in C_0 \\ \text{En norma } L^p \text{ si } f \in L^p \text{ y } 1 \leq p < \infty \end{cases}$$

Además P es radial y decreciente, por tanto P_t también, así:

$$\sup_{t>0} |u(x,t)| = \sup_{t>0} |P_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x) \quad : \text{operador de H-L}$$

y se deduce que

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = f(x) \quad \text{en c.t.p. } x \quad \text{si} \;\; f \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad 1 \leq p < \infty$$

- $P \in C^\infty \setminus \mathscr{S}$ y $\widehat{P} \notin C^\infty$ porque $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$
- P_t es solución fundamental porque

$$\begin{cases} \partial_{tt}\left[P_t(x)\right] = -\triangle_x\left[P_t(x)\right] \\ P_t(x) \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} \delta_0 \end{cases}$$

Para ver que $\widehat{P}(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$, basta con probar que si $F(\xi) = e^{-2\pi|\xi|}$ entonces $F^\vee(x) = \widehat{F}(x) = P(x)$, porque $F, P \in L^1$.

Demostración El caso $n = 1$ (ver el Capítulo 6).

$$F^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi|\xi|} e^{2\pi i x\xi} d\xi \int_0^\infty e^{-2\pi(1-ix)\xi} d\xi + \int_{-\infty}^0 e^{-2\pi(1-ix)\xi} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-ix)} + \frac{1}{2\pi(1+ix)} = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{(1+ix)^2}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

■

NOTA: Detallamos aquí el argumento de por qué la acotación

$$\sup |P_t * f(x)| \leq \mathcal{M}f(x)$$

nos da la convergencia

$$\lim_{t\to 0^+} P_t * f(x) = f(x) \quad \text{c.t.p.} \qquad si \;\; f \in L^p, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si $f \in C_c$ el resultado es cierto porque $\{P_t\}_{t>0}$ es núcleo de sumabilidad.

Solo necesitamos probar por tanto que

$$\exists \lim_{t\to 0^+} P_t * f(x) \quad \text{c.t.p.} \qquad (\text{si } f \in L^p).$$

Si sabemos que existe, como también $P_t * f \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ en norma L^p, ese límite puntual debe ser f, es decir, si $P_t * f \overset{L^p}{\longrightarrow} f$ entonces existe una subsucesión tal que $P_{t_k} * f \longrightarrow f$, y como existe el límite y es único, entonces $P_t * f \longrightarrow f$ en c.t.p..

Luego lo que tenemos que probar es

$$\limsup P_t * f = \liminf P_t * f \qquad \text{c.t.p.}$$

es decir, que el conjunto

$$A_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n \;:\; \limsup P_t * f - \liminf P_t * f > \lambda\}$$

tiene medida cero $\forall \lambda > 0$.

Demostración $\forall g \in C_c$.

$$|A_\lambda| = |\{x \;:\; \limsup P_t * (f-g)(x) - \liminf P_t * (f-g)(x) > \lambda\}| \leq$$
$$\leq |\{x \;:\; 2\mathcal{M}(f-g)(x) > \lambda\}| \overset{\text{Teor. H-L}}{\leq} \frac{C}{\lambda^p} \int |f-g|^p \, dx$$

Dado $\epsilon > 0$, elegimos $g \in C_c$ tal que

$$\int |f-g|^p \, dx < \epsilon \frac{\lambda}{C}$$

resultando, $|A_\lambda| \leq \epsilon \;\forall \epsilon$, por tanto $|A_\lambda| = 0$. ■

7.3. La ecuación de ondas

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle_x u \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad \text{donde } x = (x_1, ..., x_n)}$$

Para t fijo, tomamos $v_t(x) = u(x,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\widehat{v_t}(\xi) = (2\pi i\xi)^2\widehat{v_t}(\xi) = -4\pi i|\xi|^2\widehat{v_t}(\xi),$$

$$\widehat{v_0}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \ \text{ y } \ \frac{\partial}{\partial t}\widehat{v}(\xi)\Big|_{t=0} = \widehat{g}(\xi)$$

Fijamos ξ, $y(t) = \widehat{v_t}(\xi)$, así resulta una EDO:

$$\begin{cases} y''(t) = -4\pi^2|\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \\ y'(0) = \widehat{g}(\xi) \end{cases}$$

$$y(t) = a\cos(2\pi|\xi|t) + b\,\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t) = \widehat{f}(\xi)\cos(2\pi|\xi|t) + \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi|\xi|}\,\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t)$$

reescribiendo:

$$y(t) = \widehat{f}(\xi)\frac{e^{2\pi i|\xi|t} + e^{-2\pi i|\xi|t}}{2} + \frac{\widehat{g}(\xi)}{2\pi|\xi|}\,\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t)$$

<u>Nota</u>: Si llamamos el operador de traslación en $\mathbb{R}$:

$$\tau_t f(x) = f(x-t) \quad ; \quad \widehat{\tau_t f(\xi)} = e^{2\pi i\xi t}\widehat{f}(\xi)$$

Luego

$$1/2\widehat{\chi_{(-t,t)}}(\xi) = \frac{\mathrm{sen}\,(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

por tanto, en dimensión $n = 1$

$$\widehat{v_t}(\xi) = y(t) = \frac{1}{2}\left(\widehat{\tau_t f(\xi)} + \widehat{\tau_{-t} f(\xi)}\right) + \widehat{g}(\xi)\frac{1}{2}\widehat{\chi_{(-t,t)}}(\xi)$$

para finalizar, por el teorema de inversión

$$\begin{aligned} v_t(x) &= \frac{1}{2}\left(\tau_{-t}f(\xi) + \tau_t f(\xi)\right) + \frac{1}{2}g * \chi_{[-t,t]}(x) = \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x+t) + f(x-t)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(u)du \quad : \quad \underline{\textbf{Fórmula de D'Alambert}} \end{aligned}$$

<u>El caso $\mathbb{R}^3$</u>:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \triangle_x u & \text{en } \mathbb{R}^n \\ u\big|_{t=0} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = g \end{cases}$$

$$\widehat{v_t}(\xi) = \widehat{u}(\xi, t) = \widehat{g}(\xi)\frac{\text{sen}\,(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|}$$

$$\frac{\text{sen}\,(2\pi|\xi|t)}{2\pi|\xi|} = \widehat{\sigma_t}(\xi) \quad \text{con} \quad S_t = \{u \in \mathbb{R}^3 \ : \ |u| = t\} \quad \text{Esfera de radio } t$$

y σ_t es la medida invariante sobre S_t, normalizada. Finalmente, $u(x,t) = g * \sigma_t(x)$.

Convergencia al dato inicial (en dimensión $n = 1$):

$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2}(f'(x+t) - f'(x-t) + g(x+t) + g(x-t))$: necesitamos que f sea derivable y que g sea continua.

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{1}{2}(f''(x+t) + f''(x-t) + g'(x+t) - g'(x-t))$: necesitamos que f tenga 2 derivadas y que g sea derivable.

(1) $u(x,t) \xrightarrow{t \to 0} f$ si f es contínua en x y g localmente integrable.

(2) $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \xrightarrow{t \to 0} g$ si f' es continua en x y g continua en x.

Los espacios naturales son los espacios de Sobolev. Para (1) necesitamos que $f \in W^{2,p}$ (dos derivadas en L^p) y $g \in W^{1,r}$ (una derivada en L^r)

$$\left\{f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ : \ |\xi|^\alpha \widehat{f}(\xi) \in L^2\right\} = W^{\alpha,2} \overset{\text{notación}}{=} H^\alpha = \left\{f \ : \ (1 + |\xi|^\alpha)\left|\widehat{f}(\xi)\right| \in L^2\right\}$$

LEMA 7.2 *$H^\alpha(\mathbb{R}^n)$ es un espacio de Hilbert con el producto interior*

$$< f, g >= \int \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)\,(1 + |\xi|^\alpha)^2\,d\xi$$

y con norma:

$$\|f\|_{H^\alpha} = \left(\int \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 (1 + |\xi|^\alpha)^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}$$

LEMA 7.3 (de inmersión de Sobolev.) *Si $f \in W^{\alpha,p}$, y $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} > 0$ entonces $f \in L^q$. Si se tiene $\frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n} < 0$. Entonces $W^{\alpha,p} \subset C_0$*

Demostración Probaremos este segundo caso para $p = 2$. Es decir, $H^\alpha \subset C_0$, si $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} < 0$ ($\alpha > \frac{n}{2}$). Basta probar que si $f \in H^\alpha \implies \widehat{f} \in L^1$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right| (1 + |\xi|^\alpha)\,\frac{d\xi}{1 + |\xi|^\alpha} \overset{\text{C-Sw}}{\leq}$$

$$\leq \left(\int \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 (1 + |\xi|^\alpha)^2\,d\xi\right)^{1/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{1 + |\xi|^\alpha}\right)^2 d\xi\right)^{1/2} < \infty$$

■

7.4. La ecuación de Schrödinger

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{i}{2\pi}\triangle_x u \\ u(x,0) = f(x) \end{cases} \quad \text{donde } x = (x_1, ..., x_n)}$$

Fijado t, $v_t(x) = u(x,t)$. $\frac{\partial}{\partial t}\widehat{v_t}(\xi) = \frac{i}{2\pi}(2\pi i)^2|\xi|^2\widehat{v_t}(\xi) = -2\pi i|\xi|^2\widehat{v_t}(\xi)$,

$$\begin{cases} y'(t) = -2\pi i|\xi|^2 y(t) \\ y(0) = \widehat{f}(\xi) \end{cases}$$

$y(t) = \widehat{f}(\xi)e^{-2\pi i|\xi|^2 t}$: No tiene propiedades de decaimiento, $\nexists K \in L^1 \cup L^2$ tal que $\widehat{K}(\xi) = e^{-2\pi i|\xi|^2}$. Formalmente:

$$u(x,t) = \left(\widehat{v_t(x)}\right)^{\vee} \overset{\text{Tma. Inversión}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i|\xi|^2 t}\,\widehat{f}(\xi)\,e^{2\pi i x\xi}d\xi$$

DEFINICIÓN 7.1 *Dada una función medible $m : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ se define el operador $T_m f$ a través de su transformada de Fourier:*

$$\widehat{T_m f}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$$

Se les conoce como multiplicadores de la transformada de Fourier

Nota: $T_m : L^2 \longrightarrow L^2$ es continua si y solo si $m \in L^\infty$. (Ver hoja 7 de problemas).

Para la ecuación de Schrödinger, $m_t(\xi) = e^{-2\pi i|\xi|^2 t}$.

TEOREMA 7.4 (Principio de conservación de la energía) *Si $u_f(x,t)$ es la solución de la ecuación de Schrödinger con dato $f \in L^2$ se tiene:*

1. $\forall t\,,\ \|u_f(\cdot,t)\|_{L^2} = cte$
2. $\|u_f(\cdot,t) - f\|_{L^2} \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$

Demostración

1. $$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = \left\|m_t\widehat{f}\right\|_{L^2} \overset{|m_t(\xi)|=1}{=} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$$

2. $$\int |u_f(x,t) - f(x)|^2 dx = \int \left|\widehat{f}(\xi)\left(1 - e^{-2\pi i|\xi|^2 t}\right)\right|^2 d\xi \le \int \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 d\xi \overset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$$

■

Condiciones para la convergencia al dato

Consideramos el operador maximal asociado: $u_f^*(x) = \sup_{t>0}|u_t(x,t)|$.

TEOREMA 7.5 *Si $R > 1$, entonces existe $\beta > 0$ tal que*

$$\int_{|x|<R} \left|u_f^*(x)\right|^2 dx \leq R \int_{\mathbb{R}^n} \left|\widehat{f}(\xi)\right|^2 \left(1 + |\xi|^\beta\right)^2 d\xi = R \|f\|_{H^\beta}^2$$

Nota: El resultado es cierto de forma relativamente sencilla en cualquier dimensión si $\beta > 1/2$. Para $n = 1$ el valor óptimo viene dado por $\beta = 1/4$ (L. Carleson, 1974). Recientemente se ha demostrado que, para cada $n \geq 2$, el valor óptimo viene dado por $\beta = \beta_n$ con $1/4 < \beta_n < 1/2$ satisfaciendo además $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 1/2$.

Veamos que este resultado es suficiente para probar la convergencia puntual al dato:

$$u_f(x,t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{c.t.p.} \quad si\ f \in H^\beta$$

Nota: El resultado es fácil si $\widehat{f} \in L^1$ (en particular si $f \in \mathscr{S}$), porque entonces por el T.C.D.

$$u(x,t) \overset{t\to 0}{\longrightarrow} (\widehat{f})^\vee = f \qquad \text{puntualmente}$$

En general, como $u_f(x,t) \longrightarrow f(x)$ en L^2, basta probar que $\exists \lim_{t\to 0} u_t(x,t)$ en c.t.p., es decir, $\forall \lambda > 0$, se tiene

$$|\{x : \ |x| < R \ \ \limsup u_f(x,t) - \liminf u_f(x,t) > \lambda\}| = 0$$

$\forall g \in \mathscr{S}$ se tiene

$$\left|\{x : \ |x| < R \ \ \limsup u_{(f-g)}(x,t) - \liminf u_{(f-g)}(x,t) > \lambda\}\right| \leq$$
$$\leq \left|\{|\, x < R \ : \ 2u^*_{(f-g)}(x) > \lambda|\}\right| \overset{\text{Chebychev}}{\leq} \frac{4}{\lambda^2} \int_{|x|<R} \left|u^*_{(f-g)}(x)\right|^2 dx \leq$$
$$\overset{\text{Teorema}}{\leq} \frac{4}{\lambda} CR \|f - g\|_{H^\beta}^2$$

Tomando $g \in \mathscr{S}$ próxima a f se obtiene el resultado. ■

TEOREMA 7.6 (Desigualdad de Heisenberg) *Si $f \in \mathscr{S}$, se tiene*

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\xi \widehat{f(\xi)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Demostración

$$\int 1 \cdot (f(x))^2 \, dx \overset{dv=dx;\, u=f^2}{=} -\int 2xf(x)f'(x)dx \leq \int 2\,|xf(x)|\,\left|f'(x)\right| dx \overset{\text{C-Sw}}{\leq}$$
$$\leq 2\,\|xf(x)\|_{L^2} \cdot \left\|2\pi i \xi \widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2} = 4\pi\,\|xf(x)\|_{L^2} \cdot \left\|\xi \widehat{f}(\xi)\right\|_{L^2}$$

■