VARIABLE REAL. 4º DE MATEMATICAS *Curso 2021/22*

HOJA 2 DE PROBLEMAS

1. Sea $\mu(X) = 1$ y f y g dos funciones positivas y medibles con $f(x)g(x) \geq 1$ c.t.p.. Usar la desigualdad de Hölder para probar
$$1 \leq \left(\int_X f\,d\mu\right)\left(\int_X g\,d\mu\right).$$

2. Probar por inducción la siguiente generalización de la desigualdad de Hölder: dados $1 < p_1, p_2, \dots, p_n < \infty$ con $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ y $f_i \in L^{p_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, se cumple
$$\left|\int_X f_1\, f_2\, \dots f_n\, d\mu\right| \leq \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}\dots\|f_n\|_{p_n}.$$

3. Sean $1 \leq p, q \leq \infty$ exponentes conjugados. Si $f_n \to f$ en la norma de $L^p(\mu)$ y $g_n \to g$ en la norma de $L^q(\mu)$, demostrar que $f_n\, g_n \to f\, g$ en la norma de $L^1(\mu)$.

4. Usar la desigualdad de Hölder para probar:
$$\int_0^\pi x^{-1/3}\operatorname{sen} x\, dx < 3.$$

5. *a*) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{p<r<\infty} L^r \setminus L^p$.
   b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in \bigcap_{0<r<p} L^r \setminus L^p$.

   Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}$ en espacios de medida apropiados.

6. *a*) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{p<r<\infty} L^r$.
   b) Encontrar un espacio de medida (X, μ) y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{0<r<p} L^r$.

   Indicación: intentar con funciones de la forma $f(x) = x^{-1/p}\,|\log x|^{-2/p}$ en espacios de medida apropiados.

7. a) Encontrar un espacio de medida y una función $f \in L^p \setminus \bigcup_{r \neq p} L^r$

   b) Probar que en todo espacio de medida (Ω, μ) no es posible encontrar funciones en $\bigcap_{r \neq p} L^r \setminus L^p$

   c) Probar de hecho que si $r_1 < p < r_2$ se tiene $L^{r_1} \cap L^{r_2} \subset L^p$

8. *a*) Suponiendo $\mu(X) = 1$ y $f \in L^\infty(\mu)$, demostrar que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.
   b) Demostrar el mismo resultado que en el apartado anterior pero suponiendo que $\mu(X) < \infty$.
   c) Suponiendo $\mu(X) < \infty$ y $f \in L^q(X)$ para algún $q > 1$, demostrar que $\lim_{p\to 1} \|f\|_p = \|f\|_1$.

9. Encontrar $f, f_n \in L^p([0, 1])$, $n = 1, 2, 3, \dots$, $1 \leq p < \infty$ tales que

   a) $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$ cuando $n \to \infty$.

b) $\{f_n(x)\}_n$ es una sucesión no convergente para todo $x \in [0,1]$.

10. Supongamos que $f_n \in L^p, n = 1,2,3,\dots$ y $f_n \to f$ en norma L^p y $f_n \to g$ puntualmente a.e. ¿Qué relación existe entre f y g?

11. En $[0,1)$ se consideran los intervalos diádicos $I_{j,k} = [\frac{j-1}{2^k}, \frac{j}{2^k})$ con $j = 1,2,\dots 2^k, k \in \mathbb{N}$. Si $f \in L^p((0,1)), 1 \le p < \infty$, y

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \left(\frac{1}{|I_{j,k}|} \int_{I_{j,k}} f(y)\, dy \right) \chi_{I_{j,k}}(x)\,,$$

demostrar:

a) $\|f_k\|_p \le \|f\|_p$.

b) Si $f \in C_c((0,1))$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$.

c) Si $f \in L^p((0,1)$, $\|f - f_k\|_p \to 0$ cuando $k \to \infty$ (Usar que $C_c((0,1))$ es denso en $L^p((0,1))$).

12. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intevalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua tal que

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

para todo $x, y \in I$. Demostrar que f es convexa en I. Indicación: todo $\lambda \in (0,1)$ puede aproximarse por números de la forma $\frac{m}{2^n}$ con $0 \le m < 2^n, n \in \mathbb{N}$.

13. Sea $c_0(\mathbb{N})$ el espacio de sucesiones $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$. Demostrar que si $0 < p < \infty$ se cumple que $\ell^p(\mathbb{N})$ es un subespacio denso de $c_0(\mathbb{N})$, dotado éste con la norma $\| \ \|_\infty$.

14. Supongamos que $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de números reales positivos con la propiedad de que

$$\sup\{\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n : \|b\|_2 = 1\} = S < \infty$$

Demostrar que $a \in \ell^2$ y $\|a\|_2 = S$.