HOJA 1 DE PROBLEMAS

1. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida y $A, B, A_k \in \mathcal{M}, k \in \mathbb{N}$. Demostrar:

   a) Si μ no es identicamente igual a infinito, entonces, $\mu(\emptyset) = 0$.

   b) $\mu(A) \leq \mu(B)$ si $A \subset B$. Si, además, $\mu(A) < \infty$, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

   c) $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

   d) $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \uparrow A$.

   e) $\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(A)$ si $A_k \downarrow A$ y $\mu(A_1) < \infty$.

2. Sea $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ un espacio de medida.

   a) Demostrar que $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ es medible $\iff \{x \in \Omega\ :\ f(x) > r\}$ es medible $\forall r$.

   b) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles también los son las funciones $\sup_n f_n$, $\inf_n f_n$, $\limsup_n f_n$ y $\liminf_n f_n$.

   c) Demostrar que si $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, son medibles y $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ puntualmente, entonces f es medible.

3. Sea Ω un conjunto no numerable y sea $\mathcal{M} = \{E \subset \Omega\ :\ E \text{ ó } E^c \text{ es numerable o finito}\}$. Definimos $\mu(E) = 0$ si E es numerable o finito y $\mu(E) = 1$ si lo es E^c, para cada $E \in \mathcal{M}$. Probar que $\mathcal{M}$ es una σ-álgebra y que $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ es un espacio de medida.

4. Probar que la desigualdad del Lema de Fatou puede ser estricta.
   Indicación: Considera $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$ con $\mu(\Omega) < \infty$, $E \in \mathcal{M}$, con $0 < \mu(E) < \mu(\Omega)$ y definir $f_n = \chi_E$, si n es impar y $f_n = \chi_{E^c}$ si n es par.

5. Supongamos que $\mu(\Omega) < \infty$ y sean $f_n : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ funciones medibles acotadas. Probar que si $f_n \longrightarrow f$ uniformemente, se tiene

   $$\int_\Omega f_n d\mu \longrightarrow \int_\Omega f d\mu$$

   Mostrar con un ejemplo que la hipótesis $\mu(\Omega) < \infty$ es esencial.

6. Probar que si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ es continua y $f(x) = 0$ a.e. con respecto a la medida de Lebesgue entonces $f(x) = 0\ \forall x$.

7. Sea $\{f_n : n = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de funciones medibles con $f_n \geq 0$. Usar el teorema de la convergencia monótona para demostrar

   $$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{\infty} f_n)\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n\, d\mu\,.$$

8. Calcular los límites, cuando $n \to \infty$, de :

   $$a) \int_0^n (1 + \frac{x}{n})^n e^{\alpha x}\, dx\,, \qquad b) \int_0^n (1 - \frac{x}{n})^n e^{-x}\, dx\,, \qquad c) \int_0^n (1 - \frac{x}{2n})^n e^{x}\, dx\,.$$

9. Se dice que una función medible $f : \Omega \mapsto \mathbb{C}$ está esencialmente acotada si $\exists C < \infty$ tal que $|f(x)| \leq C$ a.e.. Para esta función se puede definir es *supremo esencial* (para ser mas precisos, el supremo esencial de $|f|$) como

$$ess \sup |f| = \text{ínf}\,\{c \,:\, |f(x)| \leq c \text{ a.e.}\}$$

que también denotamos por $\|f\|_\infty$. Probar que si f, f_n, $n = 1, 2, ...$ están acotadas esencialmente, entonces

$$\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow{n} 0 \iff \exists E \subset \Omega \text{ de medida 0 tal que } f_n \longrightarrow f \text{ uniformemente en } E^c.$$

10. Demostrar que si $f_n \longrightarrow f$ en medida

$$\Big(\text{es decir, } \forall \lambda > 0 \quad \mu\left(\{x \,:\, |f_n(x) - f(x)| > \lambda\}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\ \Big)$$

entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$ que converge a f puntualmente, a.e.
Indicación: Elegir $n_1 < n_2 < ... < n_l < ...$ tal que si $E_l = \left\{x \,:\, |f_{n_l} - f| > \frac{1}{2^l}\right\}$ se tiene $\mu(E_l) < \frac{1}{2^l}$, y probar

$$\left\{x \,:\, \limsup_{l\to\infty} |f_{n_l}(x) - f(x)| > 0\right\} \subset \bigcap_{l=1}^{\infty} \bigcup_{j=l}^{\infty} E_j$$

11. Sea $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ medible y positiva. Probar que μ_f definida por $\mu_f(A) = \int_A f d\mu$ es una medida (positiva) definida sobre la misma σ-álgebra, $\mathcal{M}$, dominio de μ.

12. Sea f una función integrable. Probar que

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt,$$

donde la segunda integral se puede considerar en el sentido de Riemann. *Indicación: demostrarlo primero para funciones simples. Luego extenderlo a funciones integrables usando el siguiente Lema: dada una función medible f existe una sucesión de funciones simples, $0 \leq s_1(x) \leq \cdots \leq s_n(x) \leq \ldots$ que converge puntualmente a $|f(x)|$.*

13*. Sea $f \in L^1(d\mu)$. Probar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\mu(E) < \delta$ se tiene $\int_E |f| d\mu < \epsilon$.
Con la notación del problema 11, esto nos dice que $\mu_{|f|}$ es <u>absolutamente continua</u> con respecto a μ. El recíproco también es cierto, y se conoce como

(**Teorema de Radon-Nikodym**). Sea ν una medida positiva y finita tal que para todo E medible con $\mu(E) = 0$ se tiene $\nu(E) = 0$. Entonces $\exists h \in L^1(\mu)$, $h \geq 0$ con $\nu = \mu_h$.