BOLETIN DE EJERCICIOS
TEMA 2. ECUACIONES DE MAXWELL

---

# 1. Ecuaciones de Maxwell

**EJ. 1. 1.**

a) A una esfera metálica de radio R en el vacío se le suministra la carga $q$. Determinar el campo eléctrico $\vec{E}$ a una distancia $r > R$

b) Repetir el apartado anterior con la diferencia de que la esfera está ahora inmersa en un medio dieléctrico caracterizado por $\epsilon_r = 2$

SOLUCIÓN:

a) *En el enunciado nada depende del tiempo, luego se trata de un problema electrostático como los planteados en el tema 1. Dado que las ecuaciones de Maxwell describen todas las manifestaciones del electromagnetismo, incluyen el caso de la electrostática. Por lo tanto, este ejercicio se puede resolver echando mano de ellas. En este caso la que liga el campo eléctrico $\vec{E}$ con sus fuentes, la carga $q$:*

$$\oint_S \vec{E}.d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

*En donde Q es la carga encerrada en la superficie definida por $S$ en la integral.*
*Por simetría, el campo eléctrico es radial, y por tanto los vectores $\vec{E}$ y $d\vec{S}$ son paralelos y su producto escalar el producto de sus módulos. Además el valor de este producto es el mismo si elegimos como superficie una esfera de radio $r$ (no hay motivo para elegir otra a no ser que se quieran hacer horas extra y mejorar nuestro cálculo matemático).*
*Con todo ello el módulo del campo eléctrico es:*

$$ES = \frac{q}{\epsilon_0} \qquad \rightarrow \qquad E = \frac{q}{S\epsilon_0} = \frac{q}{4\pi r^2}$$

*y la dirección radial hacia fuera de la esfera.*

b) *Este apartado es el mismo que el anterior, salvo que el medio en el que están la carga y la esfera ya no es el vacío. Para medios que son distintos del vacío, se usa una constante dieléctrica que está referenciada a la del vacío mediante la constante dieléctrica relativa,$\epsilon_r$. Esta constante se escribe $\epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$*

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} = \epsilon_0\epsilon_r\vec{E} \rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon_r\epsilon_0}$$

*El módulo de $\vec{E}$ es, entonces:*

$$E = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r^2}$$

*Y la dirección radial.*

**EJ. 1. 2.** Dados los campos expresados en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E} = \frac{50}{\rho}\cos(10^6 t + \beta z)\hat{\varphi} \qquad V/m \qquad \text{y} \qquad \vec{H} = \frac{H_0}{\rho}\cos(10^6 t + \beta z)\hat{\rho} \qquad A/m$$

en el vacío, expresarlos en forma fasorial y calcular los valores de los parámetros $H_0$ y $\beta$ para que sean reales, es decir, que cumplan las ecuaciones de Maxwell.

SOLUCIÓN:

*En forma fasorial los campos son:*

$$\vec{\mathbb{E}} = \frac{50}{\rho}\exp(j\beta z)\hat{\varphi} \qquad V/m \qquad\qquad \vec{\mathbb{H}} = \frac{H_0}{\rho}\exp(j\beta z)\hat{\rho} \qquad A/m$$

*Particularizamos las ecuaciones de Maxwell para las condiciones del enunciado en lo que se refiere al medio y a la presencia o no de cargas. En este caso se tiene que $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$ y que no hay fuentes de campo en el espacio, es decir, $\rho_v = 0$, quedando entonces:*

$$\nabla.\vec{\mathbb{E}} = 0 \tag{1}$$

$$\nabla.\vec{\mathbb{H}} = 0 \tag{2}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \vec{\mathbb{E}} = -\mu_0 j\omega \vec{\mathbb{H}} \tag{3}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Longrightarrow \nabla \times \vec{\mathbb{H}} = \epsilon_0 j\omega \vec{\mathbb{E}} \tag{4}$$

*Verificamos las ecuaciones (1) y (2) teniendo en cuenta que la expresión de la divergencia de un campo vectorial genérico $\vec{A}$ expresando en coordenadas cilíndricas, como es el caso, es:*

$$\nabla.\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\left(\rho A_\rho\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial\rho} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

*En este caso queda*

$$\nabla.\vec{\mathbb{H}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{H_0}{\rho}\exp(j\beta z)\right) = 0 \qquad \textit{ya que no depende de } \rho. \Rightarrow \textit{ se cumple.}$$

$$\nabla.\vec{\mathbb{E}} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{50}{\rho}\exp(j\beta z)\right) = 0 \qquad \textit{por la misma razón, pero ahora referido a } \phi \Rightarrow \textit{ se cumple.}$$

*El rotacional de un campo vectorial en cilíndricas se calcula así:*

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\hat{\varphi} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\hat{z}$$

*Con ello verificamos las ecuaciones (3) y (4). Primero la (3):*

$$\nabla \times \vec{\mathbb{E}} = \left(-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{50}{\rho}\exp(j\beta z)\right)\right)\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(50\exp(j\beta z)\right)\hat{z} = \frac{-j\beta 50\exp(j\beta z)}{\rho}\hat{\rho}$$

*Como $\vec{\mathbb{H}} = \frac{H_0}{\rho} j\beta\exp(j\beta z)\hat{\rho}$, para que se cumplan las ecuación (3) debe cumplirse:*

$$-\hat{\rho}\frac{j\beta 50\exp(j\beta z)}{\rho} = -\mu_0 j\omega\frac{H_0}{\rho}\exp(j\beta z)\hat{\rho} \Rightarrow \beta 50 = \mu_0\omega H_0 \tag{5}$$

*A continuación la ecuación (4):*

$$\nabla \times \vec{\mathbb{H}} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{H_0}{\rho}\exp(j\beta z)\right)\hat{\varphi} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{H_0}{\rho}\exp(j\beta z)\right)\hat{\varphi} = \frac{H_0}{\rho}j\beta\exp(\beta z)\hat{\varphi}$$

*Al igual que hicimos con la ecuación de $\vec{\mathbb{E}}$:*

$$\frac{H_0}{\rho}j\beta\exp(j\beta z)\hat{\varphi} = \epsilon_0 j\omega\frac{50}{\rho}\exp(j\beta z)\hat{\varphi} \Rightarrow H_0\beta = 50\omega\epsilon_0 \tag{6}$$

*(5) y (6) forman un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas de las que se obtiene $H_0$ y $\beta$ recordando que $\omega = 10^6 s^{-1}$:*

$$H_0 = \pm 0'1326 \qquad A/m$$

$$\beta = \pm 3'33'10^{-3} \qquad m^{-1}$$

*La ecuación (6) indica que las combinaciones de los valores de $H_0$ y $\beta$ que cumple la ecuación (6) son:*

$$\boxed{H_0 = 0'1326; A/m \; , \beta = 3'33'10^{-3}}$$

*o*

$$\boxed{H_0 = -0'1326; A/m\beta = -3'33'10^{-3}}$$

**EJ. 1. 3.** La posición en $x$ de la barra de la figura viene dada por $x = 5t + 2t^3$, y la separación de los raíles sobre los que se apoya es de $20; cm$. Siendo $\vec{B} = 0'8x^2\hat{z}$. Calcular la indicación del voltímetro, es decir, la *fem*, para:

a) $t = 0'4\ s$

b) $x = 0'6m$

SOLUCIÓN:

*a) En este caso se tiene que tanto el campo $\vec{B}$ como la superficie varían con el tiempo, así que es de esperar una fem inducida.*
*Calculamos el flujo a través de la superficie del montaje. Esta superficie está definida por el lado de $0'2; m$ en el eje $y$, y el lado $x$ que es dependiente del tiempo.*
*Tanto el vector del campo como el diferencial de superficie están en dirección $\hat{z}$, con lo que su producto escalar es el producto de los módulos.*

$$\vec{B} = 0'8x^2\hat{z}$$
$$d\vec{S} = dxdy\hat{z}$$

*El vector diferencial de superficie representa una superficie diferencial delimitada por un diferencial de $x$ por otro de $y$. Mientras que el dif. de $y$ es constante, el de $x$ es dependiente del tiempo. En lugar de sustituir la expresión dada en el enunciado es mejor seguir tratándola como una magnitud que varía.*
*La integral es en dos dimensiones, de las cuales la de $y$ es fija e independiente la $x$. Con ello:*

$$\Phi = \int_{y=0}^{0'2} \int_{x'=0}^{x} 0'8(x')^2 dx'dy = \int_{y=0}^{0'2} dy \int_{x'=0}^{x} 0'8(x')^2 dx'$$

*En esta expresión, la variable de integración $x'$ es la $x$ ofrecida en el enunciado. Es lo que se llama variable muda ya que va a desaparecer para diferenciarla del límite de integración. La dependencia con el tiempo está en la segunda.*

$$\Phi = [y]_0^{0'2} \frac{0'8}{3} \left[ (x')^3 \right]_0^x = \frac{0'16}{3} x^3$$

*En este punto introducimos la dependencia de $x$ con el tiempo:*

$$\Phi = \frac{0'16}{3}(5t + 2t^3)^3$$
$$fem = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{0'16}{3}(3)(5t + 2t^3)^2(5 + 6t^2) = 0'16(5t + 2t^3)(5 + 6t^2)$$

*Para $t = 0'4\ s$:*

$$fem = -4'32\ V$$

*b) $x = 0'6\ m$ corresponderá a un instante de tiempo dado:*

$$0'6 = 5t + 2t^3 \Rightarrow t = 0'1193$$

*La expresión que da la $fem$ es la misma, pero ahora para este valor de $t$.*

$$fem = -(0'16)(5(0'1193) + 2(0'1193)^3)^2(5 + 6(0'1193^2)) = -0'293\ V$$