ING. SISTEMAS AUDIOVISUALES Y MULTIMEDIA

BOLETÍN DE EJERCICIOS
TEMA 0. CÁLCULO VECTORIAL.

---

1. Vectores

EJ. 1. 1. Calcular la suma de los siguientes vectores:

- $\vec{a} = \hat{x} + 2'1\hat{y} - 1'3\hat{z}$
- $\vec{b} = 3\hat{x} - 8'4\hat{y} - 2'9\hat{z}$
- $\vec{c} = 3'9\hat{x} - \hat{y} + 4'1\hat{z}$

SOLUCIÓN:

$$\begin{aligned}\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} =& (a_x + b_x + c_x)\hat{x} + (a_y + b_y + c_y)\hat{y} + (a_z + b_z + c_z)\hat{z} \\ =& (1 + 3 + 3'9)\hat{x} + (2 - 8'4 - 1)\hat{y} + (-1'3 - 2'9 + 4'1)\hat{x}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{s} = 7'9\hat{x} - 7'4\hat{y} - 0'1\hat{z}}$$

EJ. 1. 2. Escribir la expresión de un vector que forme un ángulo de 45^o con los ejes x e y
SOLUCIÓN:
La condición pedida implica que las coordenadas del vector en el plano xy sean iguales. La solución es múltiple, ya que hay infinitos vectores que la cumplen. Una solución sería:

$$\boxed{\vec{v} = \hat{x} + \hat{y}}$$

O expresándolo en forma de terna de valores:

$$\boxed{\vec{v} = (1, 1, 0)}$$

Se podría dar una expresión general así:

$$\boxed{\vec{v} = k\hat{x} + k\hat{y} \qquad \forall k \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\vec{v} = (k, k, 0)}$$

EJ. 1. 3. Calcular el módulo del vector resultante de sumar:

- $\vec{l} = 2\,\hat{x} - 3\,\hat{y} - 5\,\hat{z}$
- $\vec{m} = \hat{x} + 5\,\hat{y} - 6\,\hat{z}$
- $\vec{n} = -\hat{x} + \hat{y} - 7\,\hat{z}$

SOLUCIÓN:
El vector suma $\vec{s}$ es:

$$\vec{s} = \vec{l} + \vec{m} + \vec{n} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 18\hat{z}$$

Y su módulo

$$\boxed{s} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-18)^2} \qquad \boxed{= 18'358}$$

EJ. 1. 4. Se tienen los siguientes vectores:

- $\vec{l} = \hat{x} - \ \hat{y} - 5\ \hat{z}$
- $\vec{m} = \hat{x} + 5\ \hat{y} - 6\ \hat{z}$
- $\vec{n} = -\hat{x} + \ \hat{y} - 7\ \hat{z}$

Calcular un vector que tenga de módulo 3 y que esté en la dirección y sentido dados por el resultado de la suma de los tres. SOLUCIÓN:
El vector suma $\vec{s}$ es:

$$\vec{s} = \vec{l} + \vec{m} + \vec{n} = \hat{x} + 5\hat{y} - 18\hat{z}$$

Y su módulo

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2 + s_z^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-18)^2} \qquad \boxed{= 18'708}$$

El vector unitario en la dirección de $\vec{s}$ es:

$$\hat{s} = \frac{\vec{s}}{18'708} = 0'053\ \hat{x} + 0'267\ \hat{y} - 0'962\ \hat{z}$$

Y finalmente, llamando al resultado $\vec{v}$:

$$\boxed{\vec{v} = 3\hat{s} = 0'160\ \hat{x} + 0'802\ \hat{y} - 2'886\ \hat{z}}$$

EJ. 1. 5. Se tienen los siguientes vectores:

- $\vec{a} = \hat{x} + \hat{y} + \hat{z}$
- $\vec{b} = -2\ \hat{y} - \hat{z}$
- $\vec{c} = 4\ \hat{x} + \hat{z}$

Calcular un vector unitario en la dirección del vector $\vec{s} = \vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$
SOLUCIÓN:

$$\vec{s} = (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) + 3(-2\ \hat{y} - \ \hat{z}) - (4\ \hat{x} + \hat{z}) = -3\ \hat{x} - 5\ \hat{y} - 3\ \hat{z}$$

El vector resultante define una dirección. Para dar un vector unitario en esta dirección se divide $\vec{s}$ por el su módulo, resultando un vector unitario en su dirección. El sentido será el mismo que el de $\vec{s}$.

$$\boxed{\hat{s} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|} = -0'4575\ \hat{x} - 0'7625\ \hat{y} - 0'4575\ \hat{z}}$$

EJ. 1. 6. Un vector va del origen de coordenadas al punto $A(6, -2, -4)$. El vector unitario que apunta del origen al punto B es $(2, -2, 1)/3$. Si la distancia entre los puntos A y B es de 10 unidades, calcular las coordenadas del punto B.
SOLUCIÓN:
Se considera el vector que va del origen al punto B, $\vec{B}$. Si se calculan sus coordenadas, se tienen inmediatamente las del punto B que es lo que se pide. $\vec{B}$ se puede escribir como el producto de un escalar por el vector unitario dado que se dice que tienen la misma dirección (que no sentido):

$$\vec{B} = K\hat{u} = \frac{K}{3}(2\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z})$$

También se cumple que $|\vec{A} - \vec{B}| = 10$, ya que la distancia entre los puntos A y B es lo mismo que el módulo del vector resta $|\vec{A} - \vec{B}|$.

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = 100$$

$$|\vec{A} - \vec{B}|^2 = |(6\hat{x} - 2\hat{y} - 4\hat{z}) - \frac{K}{3}(2\hat{x} - 2\hat{y} + \hat{z})|^2 = (6 - \frac{2K}{3})^2 + (-2 - \frac{2K}{3})^2 + (4 - \frac{K}{3})^2 = 100$$

La ecuación resultante de la que se puede extraer K es:

$$K^2 - 24K + 56 = 100$$

De esta ecuación se obtienen dos posibles resultados. Tomando el positivo: $K = 11'75$:

$$\vec{B} = 7'83\hat{x} - 7'83\hat{y} + 3'92\hat{z}$$

EJ. 1. 7. Dados los vectores $\vec{A} = 3\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z}$ y $\vec{B} = 2\hat{x} - \hat{y} - 2\hat{z}$, calcular el ángulo que forman.
SOLUCIÓN:
Siendo α el ángulo buscado, se cumple:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos(\alpha) \Longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$
$$\alpha = \arccos \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

Aplicando la definición del producto escalar:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{x} + 2\hat{y} - 6\hat{z}) \cdot (2\hat{x} - \hat{y} - 2) = 6 - 2 + 12 = 16 |\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-6)^2} = 7$$
$$|\vec{B}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$$
$$cos(\alpha) = \frac{16}{7 \cdot 3} = 0'762 \Rightarrow \alpha = 40'37^o$$

EJ. 1. 8. Calcular un vector paralelo a la recta: $y = 3x - 1$ y cuyo módulo sea igual a $6'5$
SOLUCIÓN:
El vector pedido se calcula multiplicando el módulo que debe tener, $6'5$, por un vector unitario en la dirección definida por la recta. Para ello basta con calcular 2 puntos que pertenezcan a ésta $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ dando dos valores x_1, x_2 y obteniendo sus correspondientes parejas y_1 y y_2 (cualquier pareja de valores de x es válida):

- *Para $x = 0 \Rightarrow y = -1$, $P_1 = (0, -1)$*
- *Para $x = 1 \Rightarrow y = 2$, $P_2 = (1, 2)$*

El vector $\vec{v}$ es:

$$\vec{v} = P_1 - P_2 = (0, -1) - (1, 2) = (-1, -3) = -\hat{x} - 3\hat{y}$$

Este vector ya está en la dirección de la recta. Falta hacer que tenga el módulo que se pide, para lo cual es necesario pasarlo a un vector unitario:

$$|\hat{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10} = 3'16 \Rightarrow \hat{v} = \frac{1}{3'16}(-\hat{x} - 3\hat{y}) = -0'316\hat{x} - 0'949\hat{y}$$

Por fin:

$$\vec{v} = 6'5 * \hat{u} = 6'5(-0'316\hat{x} - 0'949\hat{y}) \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v} = -2'06\,\hat{x} - 6'17\,\hat{y}}$$

Es solución válida la que se consigue restando los puntos al revés $P_2 - P_1$ que resulta en el mismo vector pero de sentido opuesto:

$$\vec{v} = 2'06\,\hat{x} + 6'17\,\hat{y}$$

EJ. 1. 9. Dados los vectores $\vec{r}_1 = (7, 3 - 2)$, $\vec{r}_2 = (-2, 7, -3)$ y $\vec{r}_3 = (0, 2, 3)$, se pide:

a) Calcular un vector unitario perpendicular a $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$

b) Ídem perpendicular a los vectores $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ y $\vec{r}_2 - \vec{r}_3$.

SOLUCIÓN:

a) El vector unitario pedido es:

$$\hat{u}_{12} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_2}{\mid \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \mid}$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 7 & 3 & -2 \\ -2 & 7 & -3 \end{vmatrix} = \hat{x}((3)(-3) - (-2)(7)) - \hat{y}((7)(-3) - (-2)(-2)) + \hat{z}((7)(7) - (3)(-2))$$

$$= 5\hat{x} + 25\hat{y} + 55\hat{z}$$

$\mid \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 \mid = \sqrt{5^2 + 25^2 + 55^2} = 60'62$

Finalmente:

$$\hat{u}_{12} = \frac{1}{60'22}(5\hat{x} + 25\hat{y} + 55\hat{z}) = 0'08\hat{x} + 0'41\hat{y} + 0'91\hat{z}$$

b) El procedimiento es el mismo que en el apartado anterior solo que los vectores de partida son:

$$\vec{a} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = 9\hat{x} - 4\hat{y} + \hat{z}$$

y

$$\vec{b} = \vec{r}_2 - \vec{r}_3 = -2\hat{x} + 5\ \hat{y} - 6\ \hat{z}$$

Siguiendo los mismos pasos el resultado es:

$$\hat{u} = 0'2853\ \hat{z} + 0'7809\ \hat{y} + 0'5557\ \hat{z}$$

EJ. 1. 10. Dados los vectores $\vec{A} = 0'76\ \hat{x} + 1'23\ \hat{y} + 2'12; \hat{z}$ y $\vec{B} = -2\ \hat{x} - 0'5\ \hat{y} - 2'11; \hat{z}$, calcular el modulo del vector formado por la resta de $\vec{A}$ y el vector resultante de cambiarle el signo a la tercera componente de $\vec{B}$

SOLUCIÓN:

El vector $\vec{B}$ modificado es: $\vec{B}' = -2\ \hat{x} - 0'5\ \hat{y} + 2'11\ \hat{z}$

$$\begin{aligned} \vec{A} - \vec{B}' &= (0'76\ \hat{x} + 1'23\ \hat{y} + 2'12\ \hat{z}) - (-2\ \hat{x} - 0'5\ \hat{y} + 2'11\ \hat{z}) \\ &= (0'76 - (-2))\hat{x} + (1'23 - (-0'5))\hat{y} + (2'12 - 2'11)\hat{z} \\ &= 2'76\ \hat{x} + 1'73\ \hat{y} + 0'01\hat{z} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\boxed{|\vec{A} - \vec{B}'| = \sqrt{(2'76)^2 + (1'73)^2 + (0'01)^2} = 3,26}$$

EJ. 1. 11. Calcular las componentes tangencial y normal del vector:

$$\vec{v} = 2\hat{x} + 4\hat{y} - 2\hat{z}$$

respecto a los planos xy, yz, xz

SOLUCIÓN:

Si la superficie de referencia para la descomposición del vector ***es uno los planos coordenados*** *la componente normal es la que no corresponde con el eje perpendicular a plano.*

Es decir, si se pide la componente normal al plano xy, esta será la componente z

Y si se pide la componente tangencial, es el vector formado por las componentes asociadas el plano en cuestión.

Si se trata del plano xy, esta componente es la formada por las coordenadas en x y en y

- *Respecto al plano xy:*
  Componente tangencial: $\vec{v}_T = 2\hat{x} + 4\hat{y}$
  Componente normal: $\vec{v}_N = -2\hat{z}$

- *Respecto al plano yz:*
  Componente tangencial: $\vec{v}_T = 4\hat{y} - 2\hat{z}$
  Componente normal: $\vec{v}_N = 2\hat{x}$

- *Respecto al plano xz:*
  Componente tangencial: $\vec{v}_T = 2\hat{x} - 2\hat{z}$
  Componente normal: $\vec{v}_N = 4\hat{y}$

EJ. 1. 12. Calcular las componentes normal y tangencial del vector $\vec{v} = (0'7, 4, 0'7)$ con respecto al plano xy
SOLUCIÓN:
La componente normal es la perpendicular (normal) al plano xy, es decir, la componente z

$$\boxed{\vec{v}_N = 0'7\hat{z}}$$

La tangencial es la que está incluida en el plano xy, por lo tanto, formada por las componentes x e y

$$\boxed{\vec{v}_T = 0'7\ \hat{x} + 4\ \hat{y}}$$

EJ. 1. 13. Calcular las componentes normal y tangencial del vector $\vec{v} = 3'1\ \hat{x} - 2'6\ \hat{y}$ con respecto a la superficie xz
SOLUCIÓN:
Componente normal: debe ser la parte de $\vec{v}$ que sea perpendicular al plano xz, es decir la coordenada en $\hat{y}$:

$$\boxed{\vec{v}_N = -2'6\hat{y}}$$

Componente tangencial, la que es paralela al plano xz, la coordenada en x:

$$\boxed{\vec{v}_T = 3'1\ \hat{x}}$$

EJ. 1. 14. Descomponer el vector:

$$\vec{E} = 3'7\ \hat{x} - 8'5\ \hat{y} + 2'1\ \hat{z} \quad V/m$$

en sus componentes tangencial y normal a las superficies xy, xz e yz
SOLUCIÓN:

- *Superficie xy:*
  - *Componente normal: las coordenadas que sean perpendiculares a esta superficie, es decir, la componente en z:* $\boxed{\vec{v}_N = 2'1\ \hat{z} \quad V/m}$
  - *Componente tangencial: aquellas componentes que están incluidas en esta superficie, es decir, $3'7\ \hat{x}$ y $-8'5\ \hat{y}$:* $\boxed{\vec{v}_T = 3'7\ \hat{x} - 8'5\ \hat{y} \quad V/m}$

- *Superficie xz:*
  - *Componente normal:* $\boxed{\vec{v}_N = -8'5\ \hat{y} \quad V/m}$
  - *Componente tangencial:* $\boxed{\vec{v}_T = 3'7\ \hat{x} - 2'1\ \hat{z} \quad V/m}$
- *Superficie yz:*
  - *Componente normal:* $\boxed{\vec{v}_N = 3'7\ \hat{x} \quad V/m}$
  - *Componente tangencial:* $\boxed{\vec{v}_T = -8'5\ \hat{y} - 3'2\ \hat{z} \quad V/m}$

EJ. 1. 15. Dado el vector

$$\vec{E} = 4'5\ \hat{x} + 2'7\ \hat{y}\ + 3'2\hat{z}$$

descomponerlo en sus componentes normal y tangencial con respecto a la superficie definida por los puntos: $A = (3, 0, 0)$, $B = (0, 2, 0)$, $C = (0, 0, 1)$,
SOLUCIÓN:
El módulo de la componente normal de este vector sobre la superficie dada se obtiene multiplicándolo escalarmente por un vector perpendicular ella. Éste se obtiene, por ejemplo, multiplicando vectorialmente dos vectores contenidos en esta superficie. A partir de los puntos dados, y que definen la superficie, se puede hacer así:

$$\vec{v}_1 = \overrightarrow{B - A} = -3\ \hat{x} + 2\ \hat{y} \qquad y \qquad \vec{v}_2 = \overrightarrow{C - A} = -3\ \hat{x} + \hat{z}$$

El vector normal a la superficie es:

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = 2\ \hat{x} + 3\ \hat{y} + 6\ \hat{z}$$

Multiplicando el vector $\vec{E}$ por este vector normal da como resultado el valor (escalar) de proyectar $\vec{E}$ sobre $\vec{n}$, si se le da carácter vectorial multiplicando por un vector unitario normal a S el resultado es la componente normal de $\vec{E}$ respecto S:

$$\boxed{\vec{E}_N = (\vec{E} \cdot \vec{n}) \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|^2} = 1'482\ \hat{x} + 2'222\ \hat{y} + 4'445\ \hat{z}}$$

y la componente tangencial se obtiene restando de $\vec{v}$ esta componente normal recién calculada:

$$\boxed{\vec{E}_T = \vec{E} - \vec{E}_N = (4'5\ \hat{x} + 2'7\ \hat{y}\ + 3'2\ \hat{z}) - (1'482\ \hat{x} + 2'222\ \hat{y} + 0'857\ \hat{z}) = 3'018\ \hat{x} + 0'478\ \hat{y} - 1'245\ \hat{z}}$$

Nota: es posible definir los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ de manera distinta, por ejemplo $\vec{v}_1 = \overrightarrow{A - B}$ y $\vec{v}_2 = \overrightarrow{A - C}$ o cualquier combinación.
