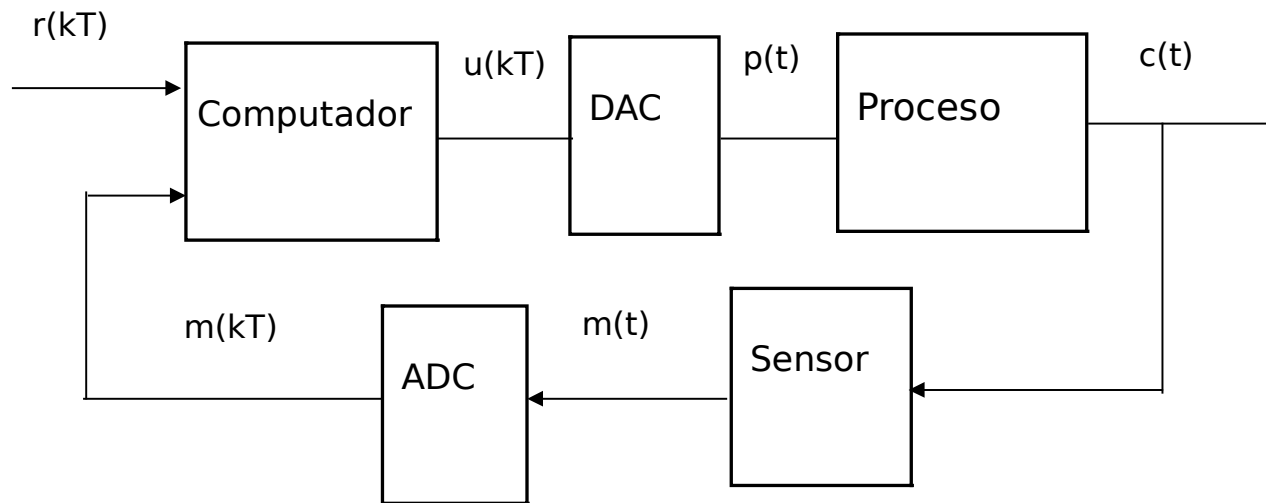


Tema 2

Sistemas de control en tiempo discreto

I. Conceptos generales

1. El computador como elemento de control





1. El computador como elemento de control

- **Ventajas:**

- Se pueden realizar acciones de control más complejas.
- El cambio de regulador es más sencillo. (Flexibilidad)
- El ordenador puede realizar varios procesos a la vez. (control multivariable)
- Las operaciones son más precisas que con sistemas analógicos.
- Mayor inmunidad al ruido y distorsión. Las señales digitales se regeneran, no se amplifican.



1. El computador como elemento de control

- **Inconvenientes:**

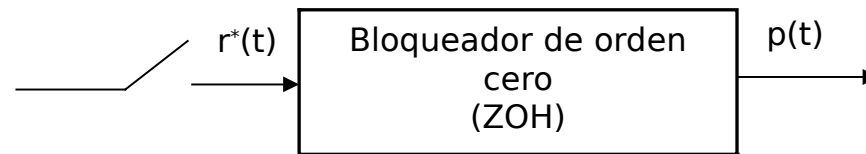
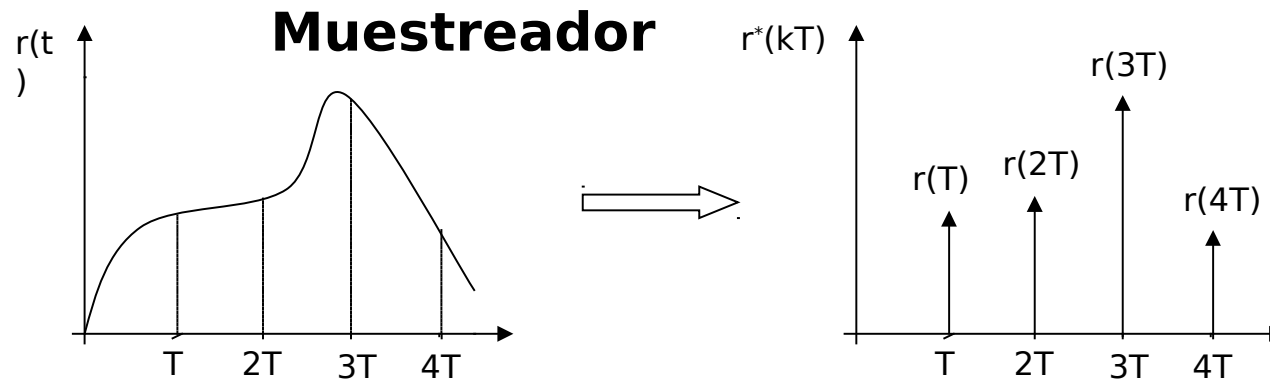
- Puede resultar costoso para sistemas sencillos.
- Requiere personal cualificado para el mantenimiento.
- **PÉRDIDA DE INFORMACIÓN:**
 - No existe control entre dos muestras consecutivas.
 - Proceso de conversión: muestreo, retención y cuantificación.



2. Sistemas discretos y transformada z

- SISTEMA DE CONTROL DISCRETO O MUESTREADO: Sistema de control mediante computador, considerando únicamente determinados instantes de la señal continua denominados **muestras**.
- PROCESO DE DATOS: Se almacenan los datos para posteriormente ser analizados. No sucede en tiempo real.
- CONTROL DIGITAL: Control de un sistema mediante computador en tiempo real, usando convertidores (A/D y D/A), instantes de muestreo y algoritmos de control adecuados.

2. Sistemas discretos y transformada z

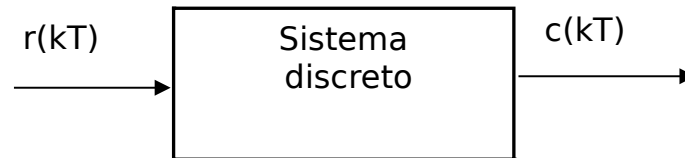


$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$$

- El ZOH mantiene la muestra constante hasta el siguiente período.
- El período de muestreo y el nivel de cuantificación influyen en el error que se produce y en la estabilidad del sistema.

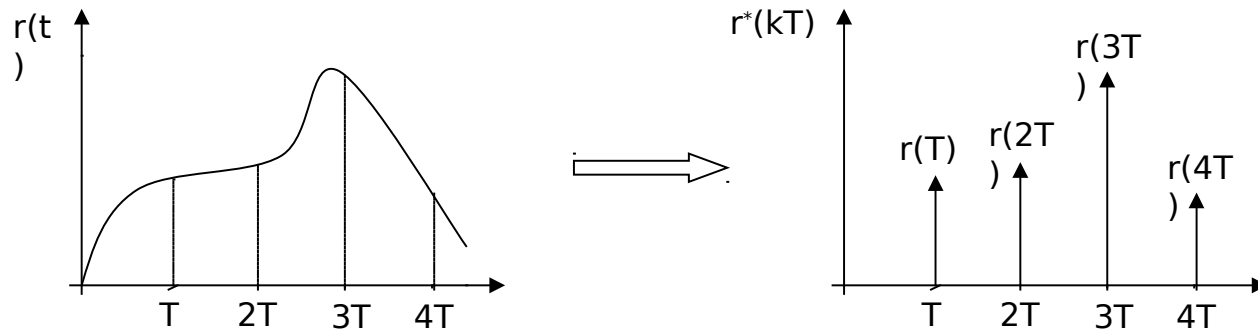
2. Sistemas discretos y transformada z

Sistema discreto:



La entrada y la salida es una secuencia de números separados un intervalo T seg. que únicamente tienen un valor determinado para $k=0,1,2,3,\dots$

2. Sistemas discretos y transformada z



$$r^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)\delta(t - kT)$$

Aplicamos transformada de Laplace $\rightarrow L\{r^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)e^{-kTs}$

Se define $z = e^{sT}$
 y aplicamos transformada z $\rightarrow Z\{r^*(t)\} = R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} r(kT)z^{-k}$

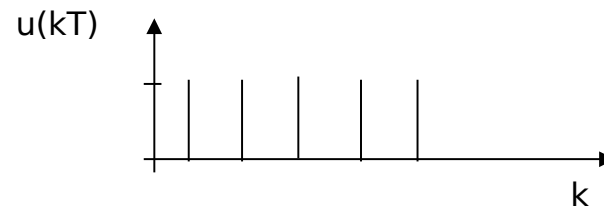
Serie geométrica de razón z^{-1}
 \rightarrow

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Ejemplo: Calcular la transformada z del escalón unitario $r(t)=u(t)$

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \dots k \geq 0 \\ 0 & \dots k < 0 \end{cases}$$



$$R(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}}$$



2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad de suma y resta

Si la señal $y_1(kT)$ tiene la transformada $Y_1(z)$ y la señal $y_2(kT)$ tiene la transformada $Y_2(z)$, la combinación lineal de ambas tiene la siguiente transformada:

$$\mathcal{Z}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$$

Propiedad multiplicación por una constante

$$\mathcal{Z}[\alpha y(kT)] = \alpha \mathcal{Z}[y(kT)] = \alpha Y(z)$$



2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad del desplazamiento (retraso)

$$Z[y(k)] = Y(z)$$

$$Z[y(k-n)] = z^{-n}Y(z)$$

Un sistema discreto se puede representar mediante una ecuación en diferencias:

$$c(k) + a_1c(k-1) + a_2c(k-2) + \dots + a_nc(k-n) = b_0r(k) + b_1r(k-1) + \dots + b_mr(k-m)$$

$$C(z) + a_1z^{-1}C(z) + a_2z^{-2}C(z) + \dots + a_nz^{-n}C(z) = b_0R(z) + b_1z^{-1}R(z) + \dots + b_mz^{-m}R(z)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_mz^{-m}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + \dots + a_nz^{-n}}$$



2. Sistemas discretos y transformada z

Propiedad del desplazamiento (adelanto)

$$\mathcal{L}[y(kT + nT)] = z^n \left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k} \right]$$

Propiedad de traslación compleja

$$\mathcal{L}[e^{\pm\alpha kT} y(kT)] = Y(ze^{\pm\alpha T})$$



2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor final

- En sistemas continuos:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$$

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$$

Se aplica cuando deseamos ver la tendencia del error en régimen permanente.



2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor final

- **Ejemplo:** Determinar el valor de la salida en régimen permanente del siguiente sistema, cuando se le aplica a la entrada un escalón unitario:

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{0.58(1+z)}{z+0.16} \quad r(t) = u(t)$$

$$r(k) = 1, (k \geq 0) \rightarrow R(z) = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$C(z) = \frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)}$$

$$c(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (1-z^{-1}) \frac{0.58(1+z)}{(1-z^{-1})(z+0.16)} = 1$$



2. Sistemas discretos y transformada z

Teorema del valor inicial

- En sistemas discretos:

$$\lim_{k \rightarrow 0} x(k) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$$

Se aplica cuando deseamos calcular el valor inicial de la serie discreta.



2. Sistemas discretos y transformada z

Convolución real

$$\begin{aligned} Y_1(z)Y_2(z) &= \mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^N y_1(kT)y_2(NT - kT) \right] = \mathcal{Z} \left[\sum_{k=0}^N y_2(kT)y_1(NT - kT) \right] \\ &= \mathcal{Z}[y_1(kT) * y_2(kT)] \end{aligned}$$

2. Sistemas discretos y transformada z

Resumen de teoremas de la transformada Z

Suma y resta

$$\mathcal{L}[y_1(kT) \pm y_2(kT)] = Y_1(z) \pm Y_2(z)$$

Multiplicación por una constante

$$\mathcal{L}[\alpha y(kT)] = \alpha \mathcal{L}[y(kT)] = \alpha Y(z)$$

Traslación real

$$\mathcal{L}[y(k - n)T] = z^{-n}Y(z) \quad (\text{retraso})$$

$$\mathcal{L}[y(k + n)T] = z^n \left[Y(z) - \sum_{k=0}^{n-1} y(kT)z^{-k} \right] \quad (\text{adelanto})$$

en donde $n =$ entero positivo

Traslación compleja

$$\mathcal{L}[e^{\pm \alpha kT} y(kT)] = Y(ze^{\pm \alpha T})$$

Teorema del valor inicial

$$\lim_{k \rightarrow 0} y(kT) = \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z)$$

Teorema del valor final

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})Y(z)$$

si $(1 - z^{-1})Y(z)$ no tiene polos sobre o fuera $|z| = 1$.

Convolución real

$$\begin{aligned} Y_1(z)Y_2(z) &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^n y_1(kT)y_2(NT - kT) \right] \\ &= \mathcal{L} \left[\sum_{k=0}^n y_2(kT)y_1(NT - kT) \right] \\ &= \mathcal{L}[y_1(kT) * y_2(kT)] \end{aligned}$$



3. Transformada z inversa

Métodos de cálculo

- Se descompone la función en fracciones simples y se recurre a las tablas.

$$X(z) = \sum_{i=1}^n \frac{b_i z}{z - a_i} \quad \Longrightarrow \quad x(k) = \sum_{i=1}^n b_i a^k$$

- Se divide el numerador entre el denominador. Al polinomio en “z” resultante se le aplica la definición de transformada z.

$$z^{-n} = \delta(k - n), \begin{cases} 1, & (k = n) \\ 0, & (k \neq n) \end{cases}$$

- Fórmula de inversión.

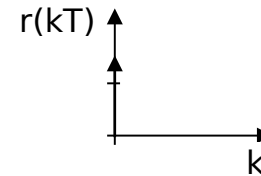
3. Transformada z inversa

□ **Ejemplo:** Obtener la transformada z inversa de la siguiente ecuación en diferencias, correspondiente a un sistema de primer orden:

$$c(k) = ac(k-1) + r(k)$$

Si le aplicamos un impulso definido por:

$$r(t) = \begin{cases} 1 \dots (n=0) \\ 0 \dots (n>0) \end{cases} \implies R(z) = 1$$



$$c(k) = ac(k-1) + r(k)$$

$$c(k)(1 - az^{-1}) = r(k)$$

$$G(z) = \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 - az^{-1}}$$



3. Transformada z inversa

Dos formas de hacerlo:

1. Según tablas: $C(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \implies c(k) = a^k$

2. Otra forma es dividir el numerador entre el denominador:

$$C(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \dots$$

$$z^{-n} = \delta(k - n), \begin{cases} 1, & (k = n) \\ 0, & (k \neq n) \end{cases}$$

$$c(0) = 1$$

$$c(1) = a$$

$$c(2) = a^2 \dots \dots c(k) = a^k$$



3. Transformada z inversa

Fórmula de inversión

$$y(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} Y(z) z^{k-1} dz$$

donde la trayectoria Γ es un círculo de radio:

$$|z| = e^{cT}$$

El valor de c es tal que contiene todos los polos $Y(z)z^{k-1}$

La resolución de esta integral se realiza empleando el teorema de los residuos de la teoría de variable compleja.

$$y(kT) = \sum \text{residuos} Y(z).z^{k-1}$$

4. Relación entre los planos “s” y “z”

- En sistemas continuos, la ubicación de los polos en el plano “s”, determina la estabilidad del sistema.
- Consideremos la siguiente función continua:

$$g(t) = e^{-at}, (t > 0) \quad \Longrightarrow \quad G(s) = \frac{1}{s + a} \text{ (Un polo en } s = -a)$$

Su transformada “z” es:

$$G(z) = Z[e^{-akT}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (ze^{aT})^{-k} = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

Serie geométrica de razón $(ze^{aT})^{-1}$

4. Relación entre los planos “s” y “z”

- $G(z)$ Tiene un polo en $z = e^{-aT}$
- El polo en “s”: $s = -a$ se corresponde con el polo en el plano “z” $z = e^{-aT}$

$$\implies z = e^{sT}$$

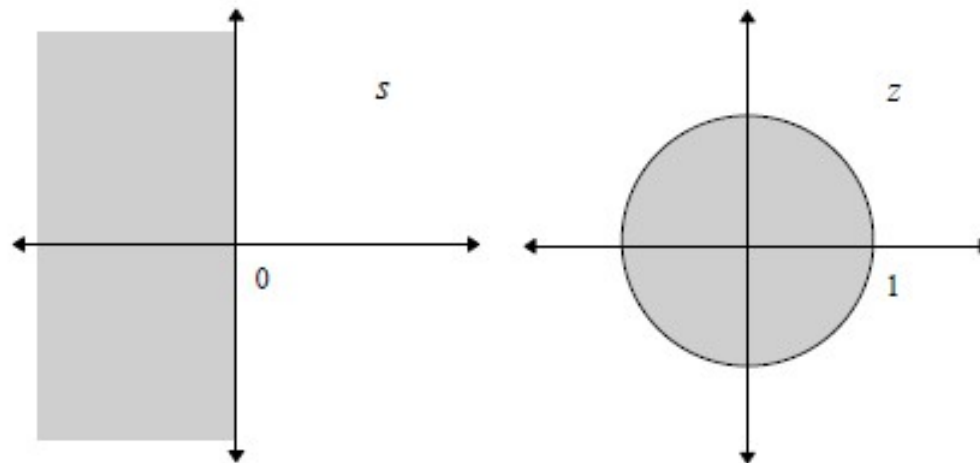
- La localización de los polos en el plano “z”, dependen del periodo de muestreo T.
- Relación entre polos del plano “s” y del plano “z”:

$$s = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = \sigma \pm \omega_d j$$

$$z = e^{sT} = \exp(\sigma T \pm \omega_d T j) \Rightarrow \begin{cases} |z| = e^{\sigma T} \\ \angle z = \omega_d T + 2k\pi \end{cases}$$

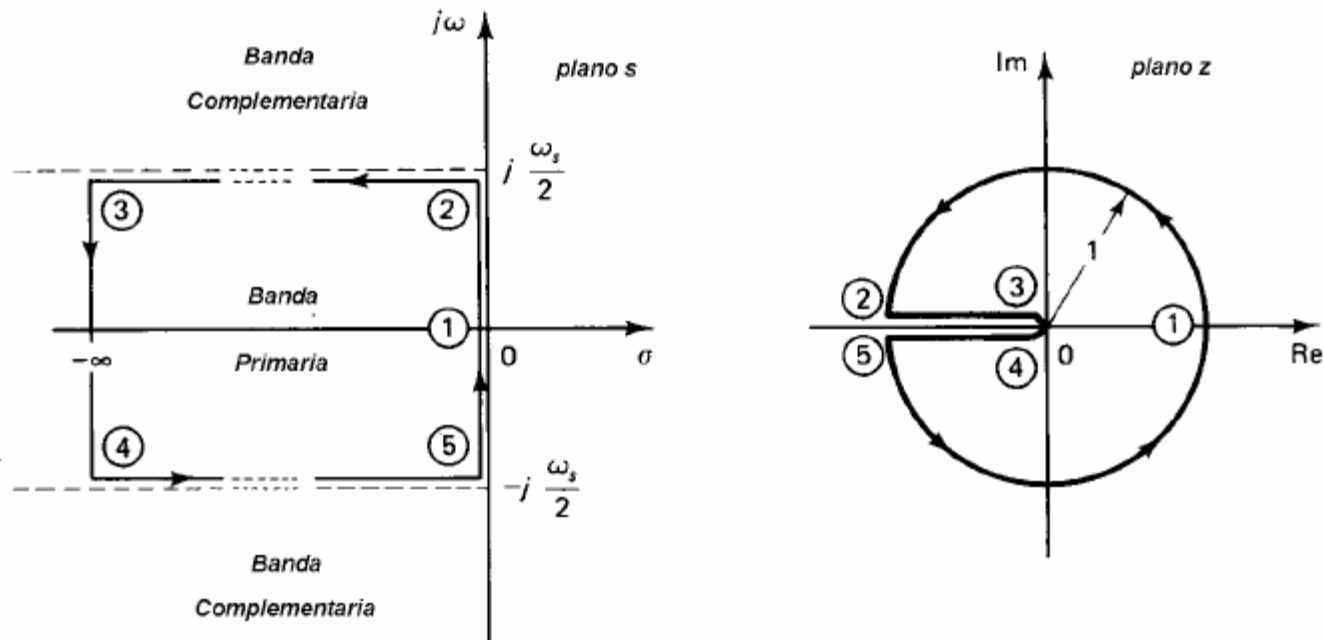
4. Relación entre los planos “s” y “z”

- Polos y ceros en s , cuyas frecuencias (ω_d) difieren en $2\pi/T$ son mapeados en las mismas localizaciones en z , es decir, la correspondencia no es única.
- EL semiplano izquierdo de s se transforma en el interior del círculo unidad en z , siendo la circunferencia unidad la imagen del eje $s = j\omega$



4. Relación entre los planos "s" y "z"

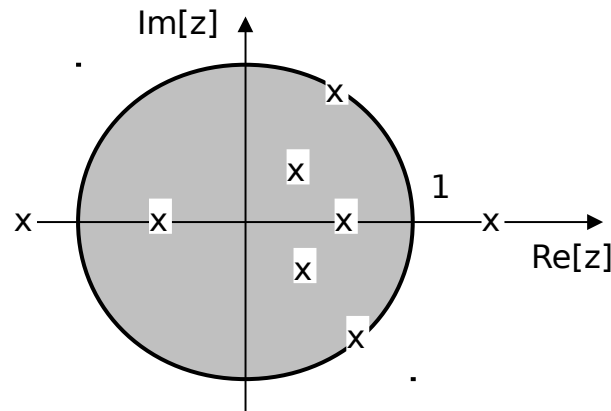
- Cada banda de anchura ω_s ($2\pi/T$) se mapea en el círculo unidad. A la primera banda se le llama banda primaria, y al resto bandas complementarias. Esto prueba la no unicidad del mapeo $s \rightarrow z$



5. Estabilidad

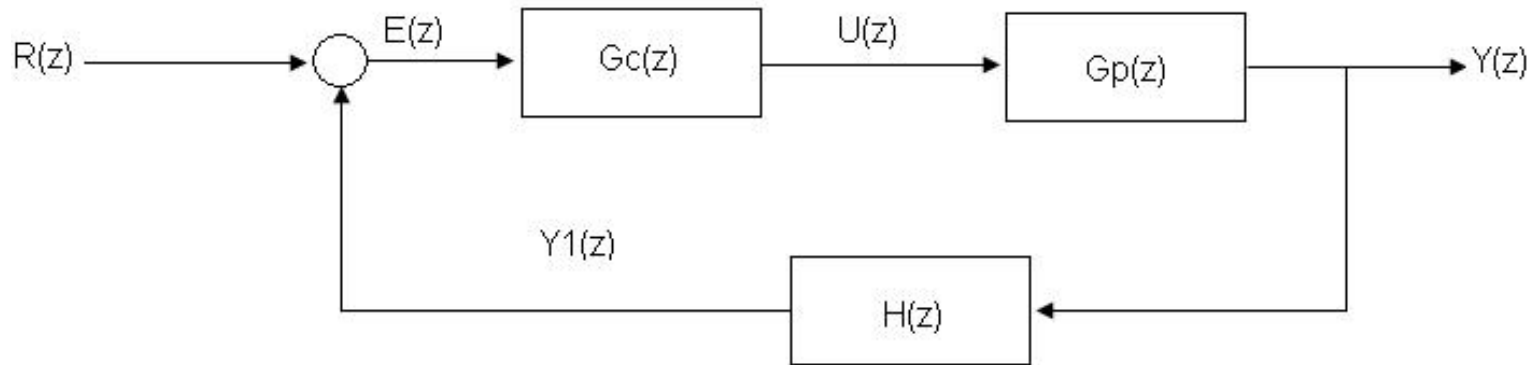
- En sistemas continuos, un sistema será estable cuando sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo: ($\sigma < 0$)

$$\sigma < 0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} < 1$$



Para que el sistema discreto sea estable, todos sus polos deberán encontrarse dentro del círculo de radio unidad.

5. Estabilidad - Criterio de Jury



- Función de transferencia en lazo cerrado:

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)H(z)}$$



5. Estabilidad – Criterio de Jury

- Criterio de estabilidad de Jury para el polinomio $A(z)$ que representa la ecuación característica de la función de transferencia en lazo cerrado.
- El criterio define el número de raíces de $A(z)$ que se ubica dentro del círculo unitario del plano Z .
- Condiciones:

$$A(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a^{n-1} z + a_n$$

$$a_0 > 0$$

$$A(z)|_{z=1} > 0$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

▪ El arreglo de coeficientes es el siguiente:

▪ donde:

$$\begin{array}{cccccccc}
 R_1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & L & L & a_n \\
 R_2 & b_0 & b_1 & b_2 & L & L & b_{n-1} & 0 \\
 R_3 & c_0 & c_1 & c_2 & L & c_{n-2} & 0 & 0 \\
 M & M & M & M & & & &
 \end{array}$$

$$b_i = a_i - a_{n-i} \alpha_1$$

$$b_0 = a_0 - a_n \alpha_1$$

$$b_1 = a_1 - a_{n-1} \alpha_1$$

$$b_n = a_n - a_0 \alpha_1$$

$$c_j = b_j - b_{(n-1)-j} \alpha_2$$

$$c_{n-1} = 0$$

$$\alpha_1 = \frac{a_n}{a_0}$$

$$\alpha_2 = \frac{b_{n-1}}{b_0}$$

5. Estabilidad – Criterio de Jury

▪ **Ejemplo 1:** Determine si $A(z)$ tiene raíces fuera del círculo unitario (igual al número de coeficientes calculados en la primera columna que tienen signo negativo).

▪ Se concluye que el polinomio $A(z)$ no tiene raíces fuera de la circunferencia unitaria y, por tanto, no tiene raíces inestables.

$$A(z) = z^3 + 0.5z^2 + 0.25z + 0.2$$

R_1	1	0.5	0.25	0.2	$\alpha = 0.2$
R_2	0.96	0.45	0.15		$\alpha = 0.15$
R_3	0.9375	0.3065			$\alpha = 0.38$
R_4	0.7911				

5. Estabilidad - Criterio de Jury

- **Ejemplo 2:** Determine las condiciones que deben satisfacer los coeficientes a_1 y a_2 para que el sistema de control definido por el polinomio característico $A(z)$ sea estable?

$$A(z) = z^2 + a_1z + a_2$$

$$\begin{array}{l|lll} R_1 & 1 & a_1 & a_2 \\ R_2 & (1-a_2^2) & a_1(1-a_2) & \\ R_3 & \frac{1-a_2}{1+a_2} \left[(1+a_2)^2 - a_1^2 \right] & & \end{array} \quad \begin{array}{l} \alpha_1 = a_2 \\ \alpha_2 = \frac{a_1}{1+a_2} \end{array}$$

5. Estabilidad - Criterio de Jury

• 1ª Condición:

• 2ª Condición:

• Conclusión:

$$(1 - a_2^2) > 0$$

$$|a_2| < 1$$

$$\frac{1 - a_2}{1 + a_2} \left[(1 + a_2)^2 - a_1^2 \right] > 0$$

$$(1 + a_2)^2 > a_1^2$$

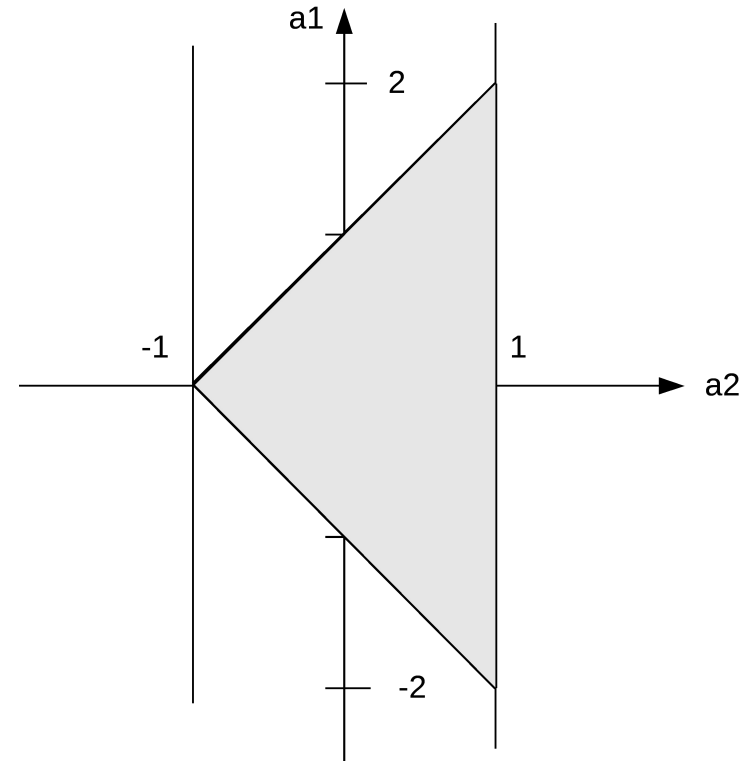
$$1 + a_2 > |a_1|$$

$$1 + a_2 > a_1$$

$$a_1 > 0$$

$$1 + a_2 > -a_1$$

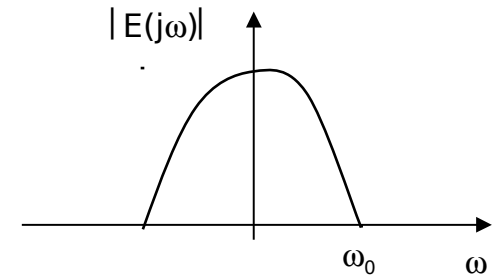
$$a_1 < 0$$



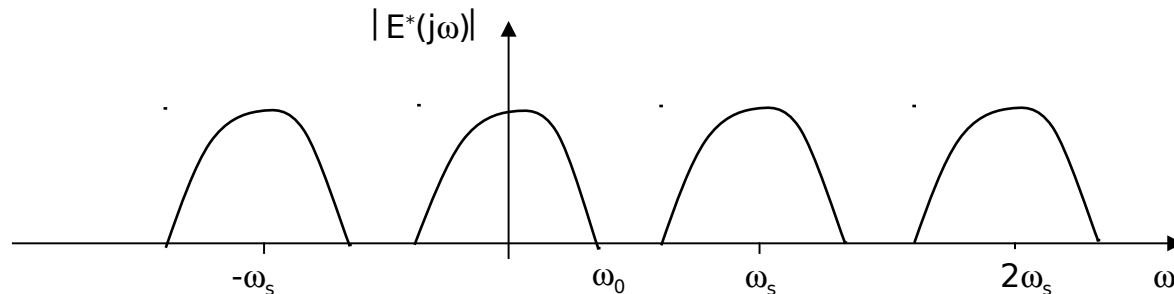
5. Estabilidad - Elección del periodo de muestreo

- Teorema de muestreo de Shanon: Para poder reconstruir una señal, es necesario muestrear a una frecuencia de:

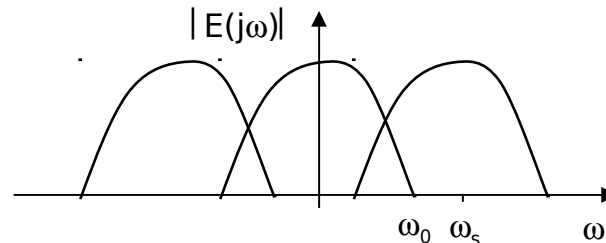
$$f_s \geq 2\omega_0$$



- La señal debe estar limitada en banda. Para ello y que no se produzca el fenómeno de “aliasing” o solapamiento, se utiliza un filtro paso bajo.



- En caso de que $\omega_s < \omega_0$:





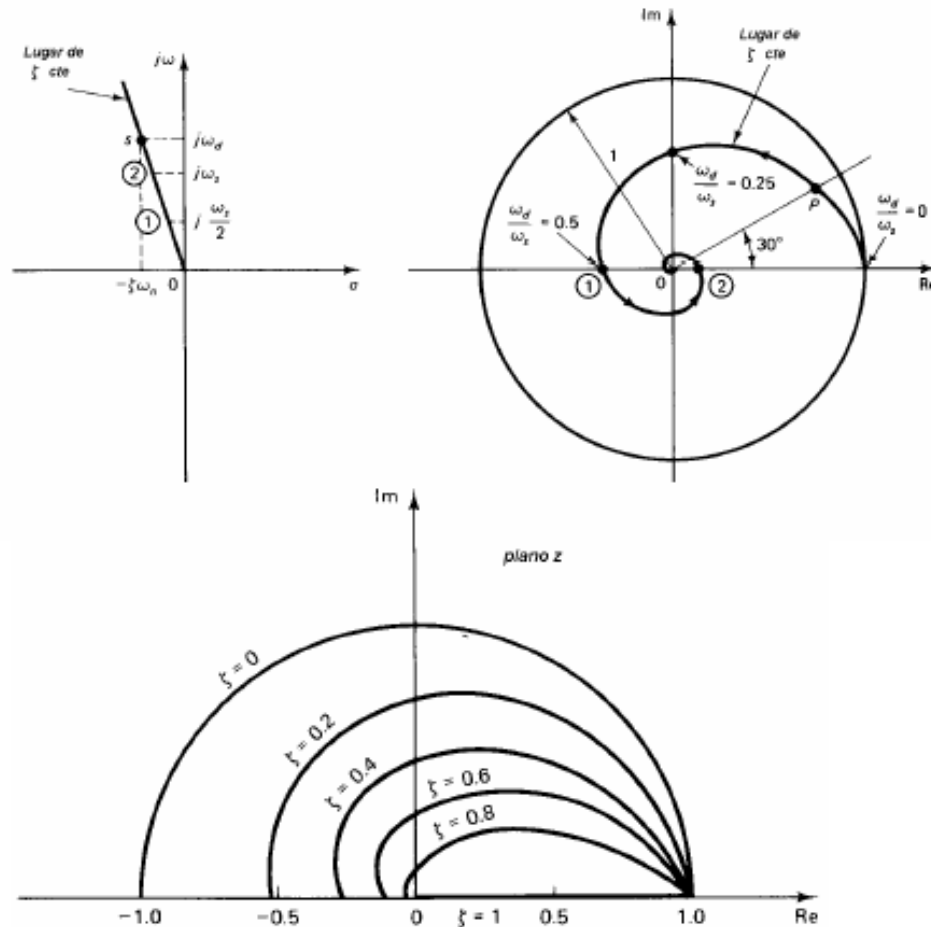
6. Respuesta temporal – Respuesta transitoria

- Las especificaciones de respuesta transitoria vienen dadas por los valores de tiempo de subida, sobreoscilación y tiempo de establecimiento, relacionados con ξ y ω_n (sistema dominante de 2º orden).
- Los valores de ξ y ω_n determinan la ubicación de los polos del sistema en lazo cerrado en el plano z que satisfagan el transitorio. Es posible obtener diferentes lugares geométricos en el plano z usando:

$$z = e^{Ts}$$

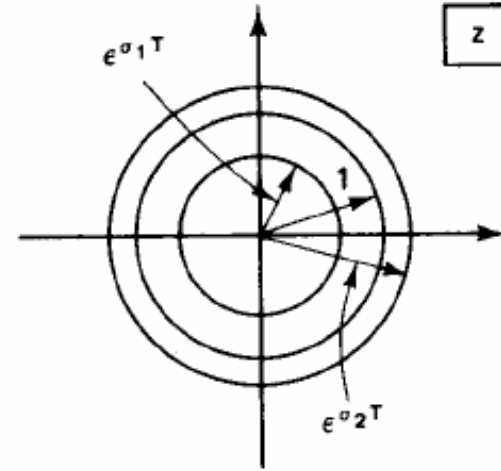
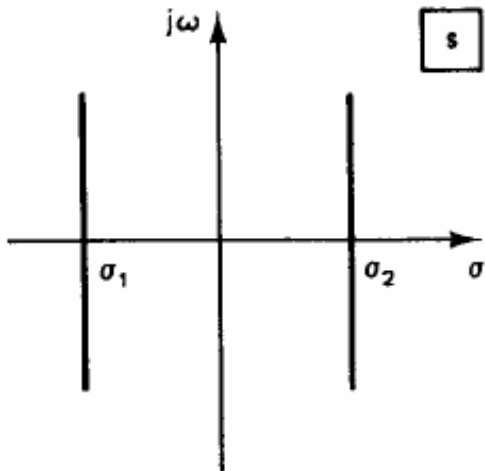
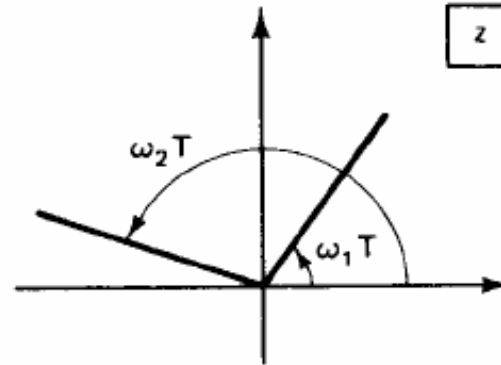
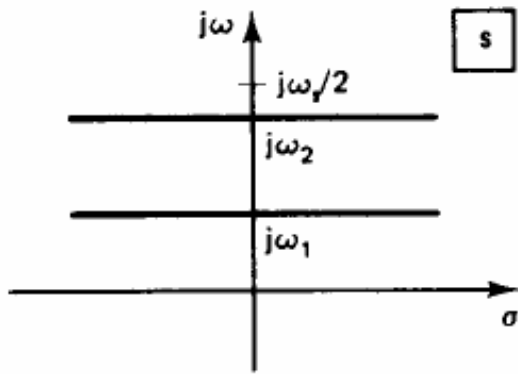
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Relación entre planos s y z.



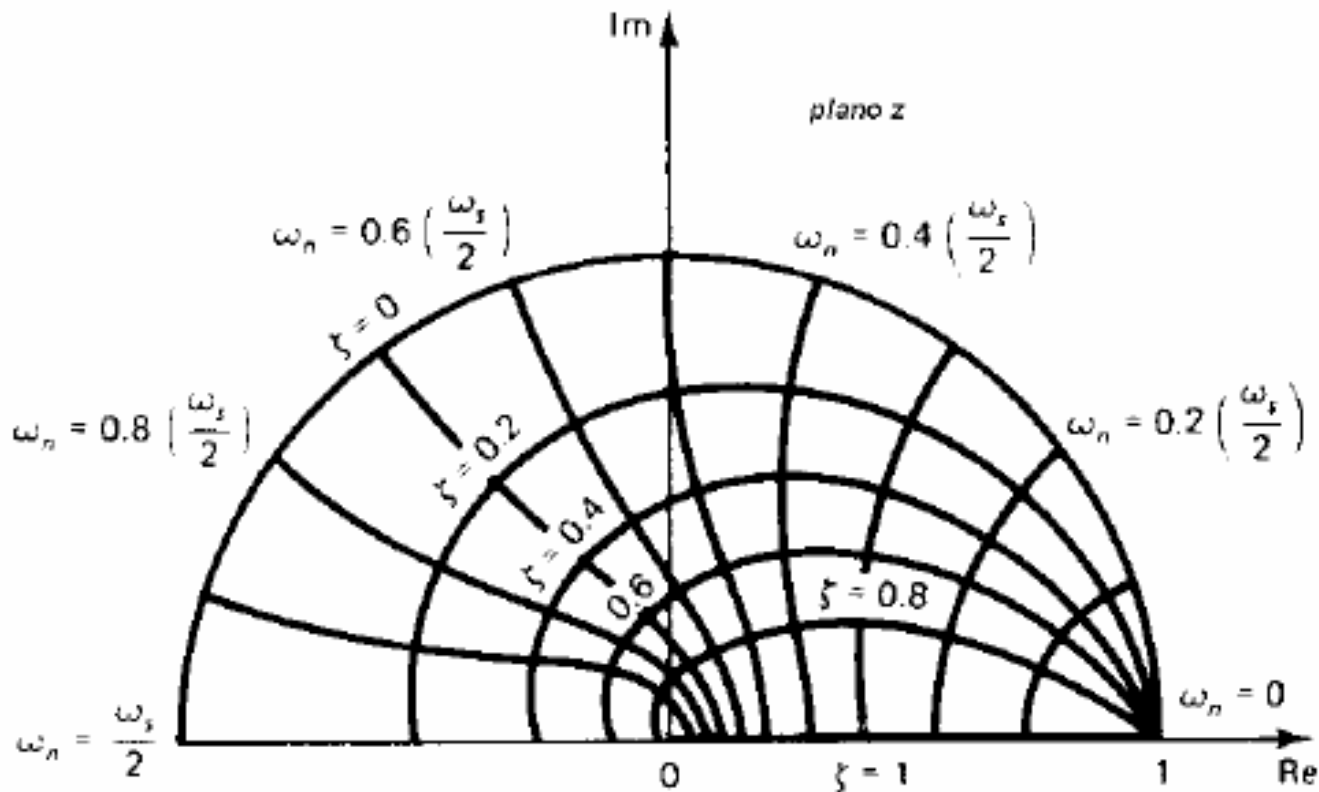
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Relación entre planos s y z.



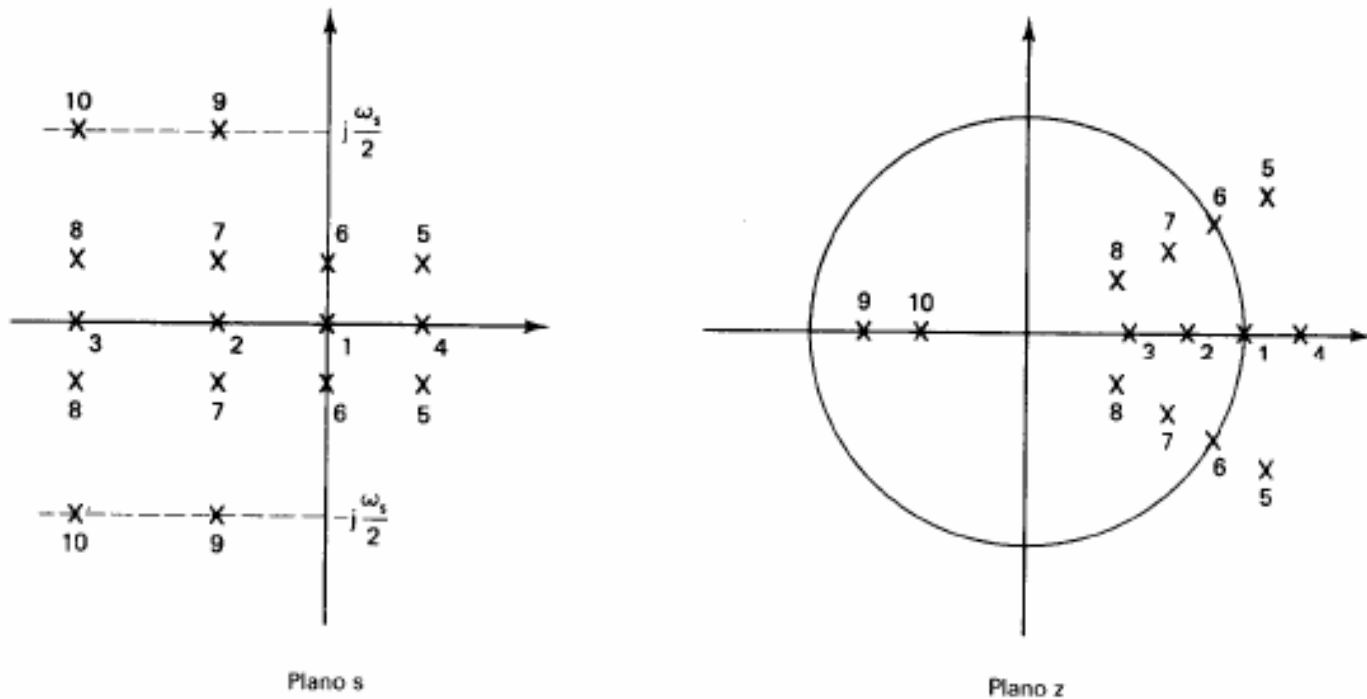
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Abaco con los lugares de ξ y ω_n constante (en función de ω_s)




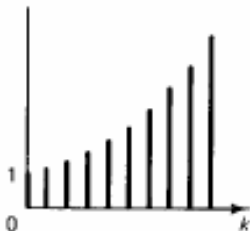
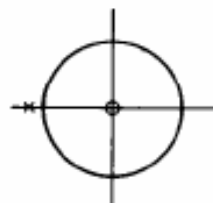
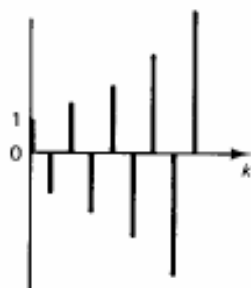
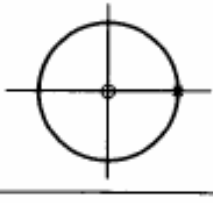
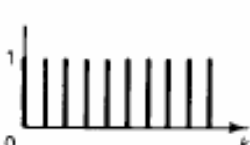
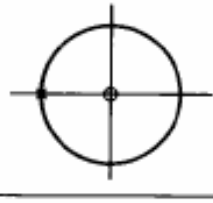
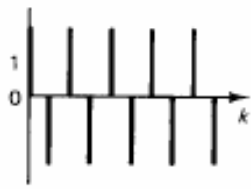
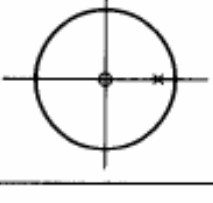
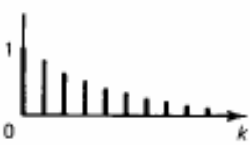
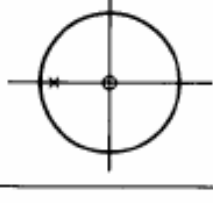
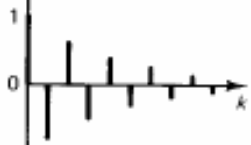
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Correspondencia entre la ubicación de los polos en el plano s y en el plano z , y efecto sobre la respuesta transitoria.



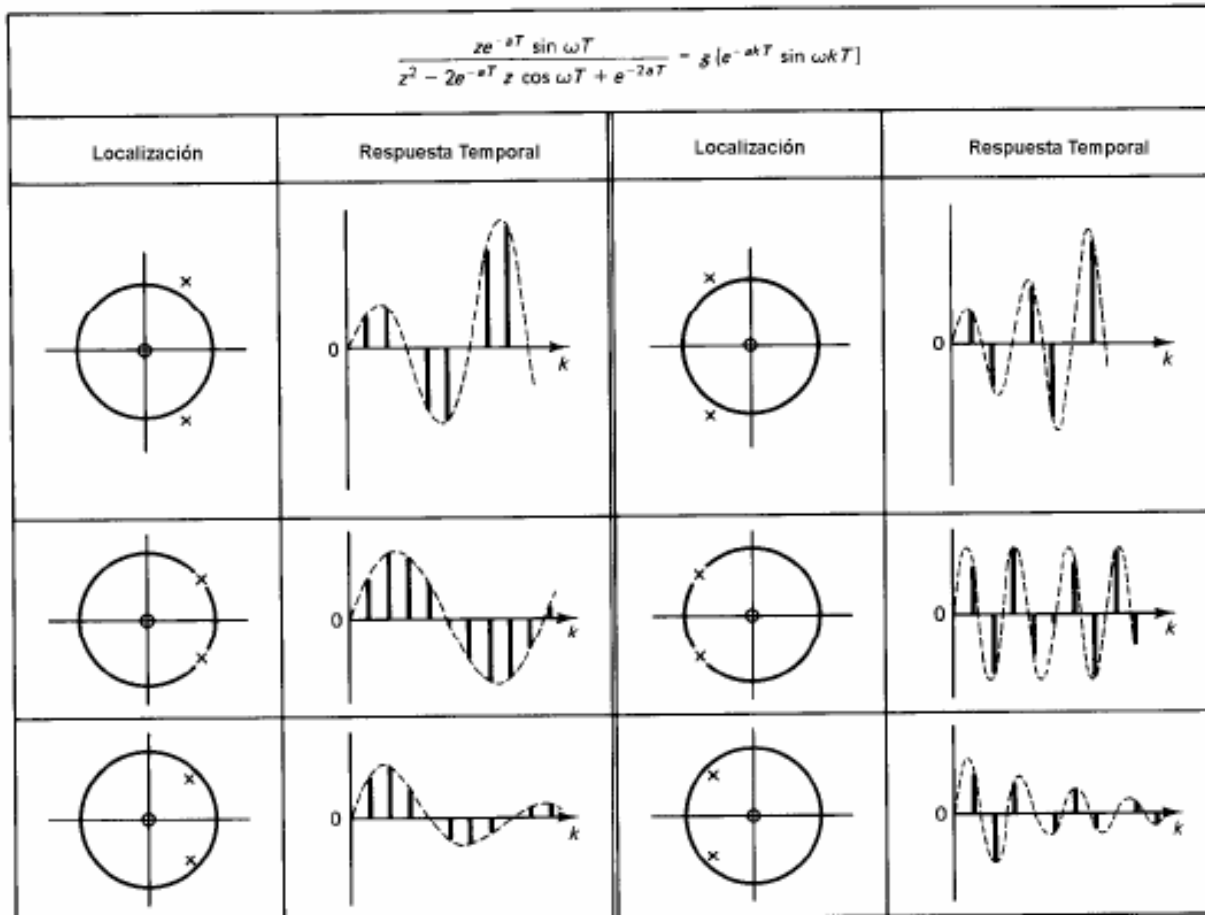
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria

$\frac{z}{z - \rho} = \mathcal{S}[\rho^k]$			
Localización	Respuesta Temporal	Localización	Respuesta Temporal
			
			
			

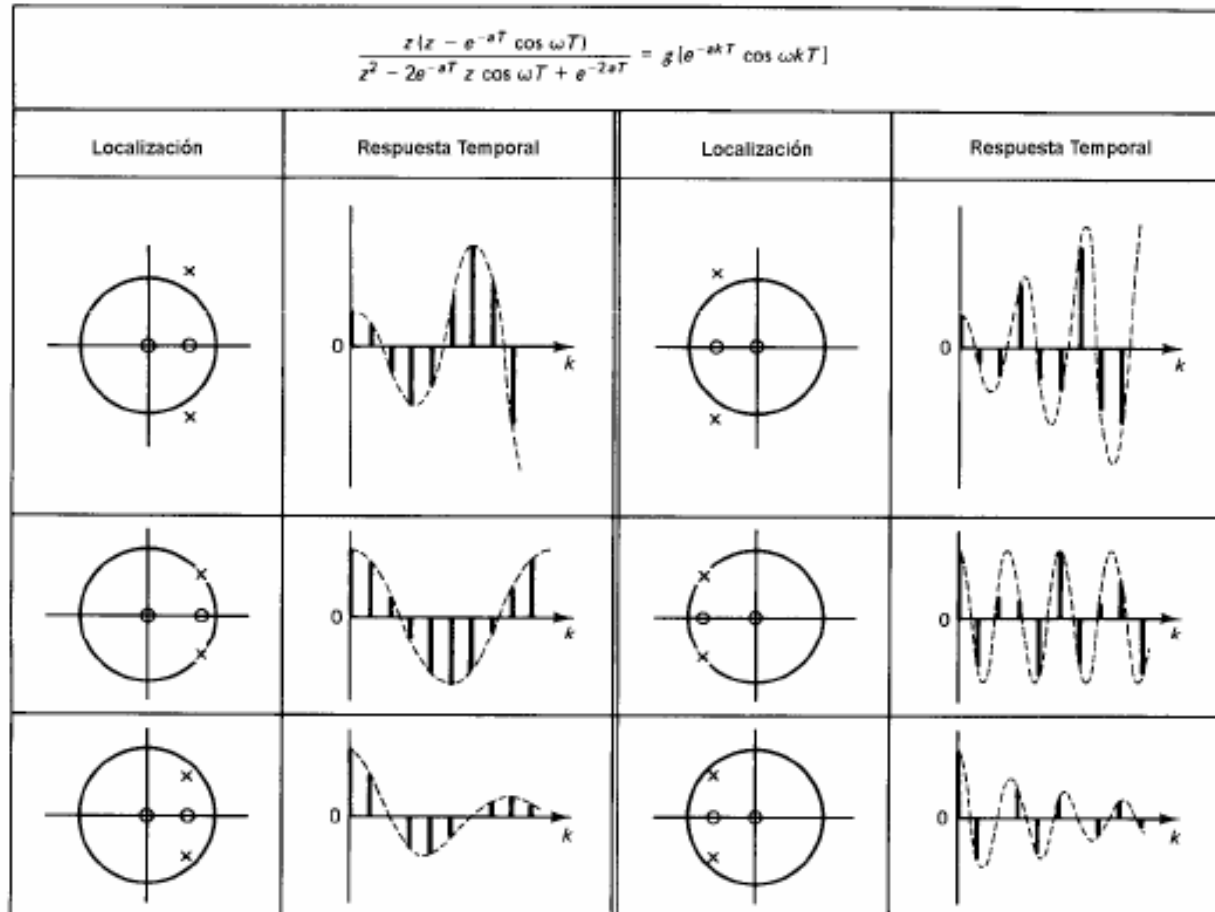
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria



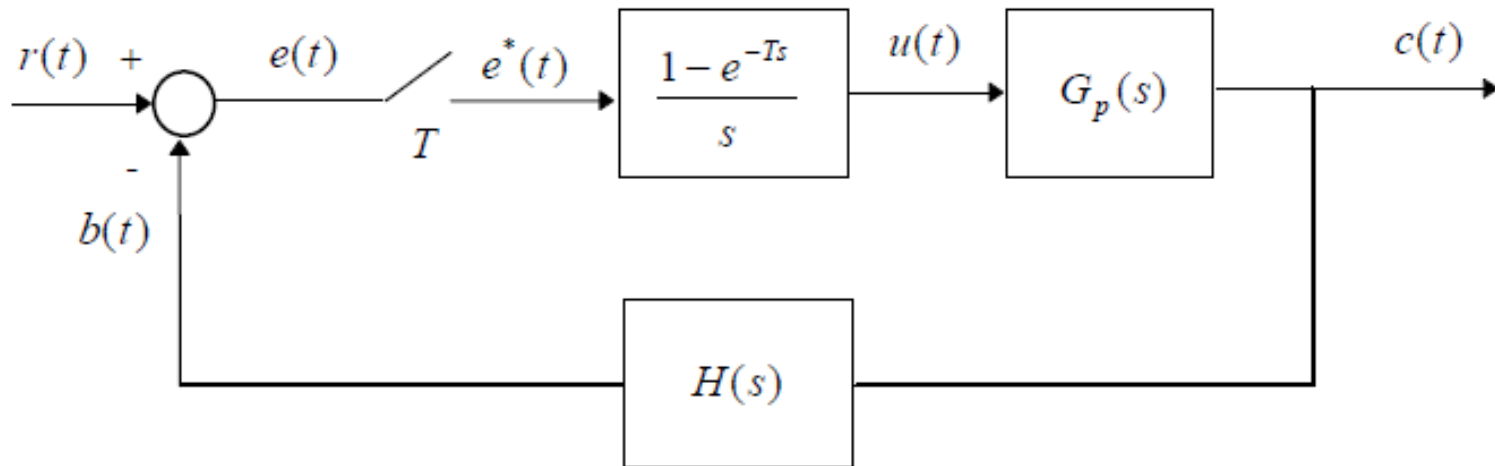
6. Respuesta temporal - Respuesta transitoria

- Ubicación de los polos en el plano z: efecto sobre respuesta transitoria



6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Considerando un sistema de control digital en lazo cerrado y suponiendo el sistema estable para poder obtener valores en régimen permanente, se va a estudiar el valor del error en régimen permanente $e(kT)$ ante diferentes señales de referencia.



6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Error en régimen permanente:

- El sistema viene dado por la función de transferencia en lazo cerrado:

$$e^* = \lim_{ss} e^*(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1}) \cdot E(z))$$

- La señal de error $E(z)$ es:

$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)}$$

$$E(z) = R(z) - B(z) = R(z) - GH(z) \cdot E(z)$$

$$e^* = \lim_{ss} \left[(1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot R(z) \right]$$

6. Respuesta temporal - Respuesta permanente

- Señal de referencia Escalón: Error de posición:

- Señal de referencia Rampa:
$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)}$$

$$K_p = \lim_{z \rightarrow 1} GH(z) \Rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{1 + K_p}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \rightarrow 1} \left[(1 - z^{-1}) \cdot \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot \frac{T \cdot z^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \right] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T}{(1 - z^{-1}) \cdot GH(z)}$$

$$K_v = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{(z - 1) \cdot GH(z)}{zT} \Rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{K_v}$$



6. Respuesta temporal – Respuesta permanente

- El tipo de sistema viene dado en función del número de polos N en $z=1$ (integradores en GH). El valor de K_p y K_v depende del tipo de sistema.

- El significado físico de las constantes de error estático es el mismo que el visto en tiempo continuo, excepto que estas dan información solo en los instantes de muestreo.

$$GH(z) = \frac{1}{(z-1)^N} \cdot \frac{A(z)}{B(z)}$$



7. Representación del lugar de las raíces

- Se aplica de la misma forma que en sistemas en tiempo continuo, salvando la diferente interpretación de la ubicación de los polos en el plano z .
- El parámetro de interés es la ganancia K ($-\infty < K < +\infty$)

$$1 + K \frac{(z+z_1)(z+z_2)\cdots(z+z_m)}{(z+p_1)(z+p_1)\cdots(z+p_n)} = 0$$

7. Representación del lugar de las raíces

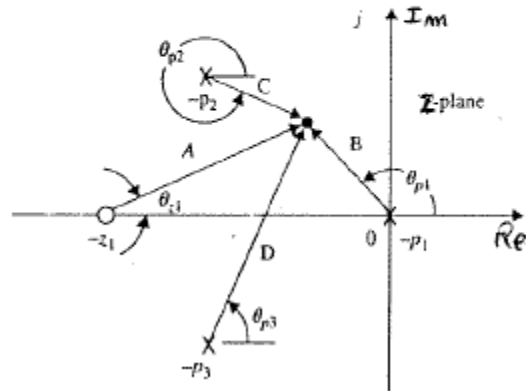
- La ganancia en lazo abierto $F(z)$ debe cumplir las condiciones de módulo y fase.

- Condición de módulo: $|F(z)|=1$

$$\frac{\prod_{i=1}^m |z+z_i|}{\prod_{j=1}^n |z+p_j|} = \frac{1}{|K|}$$

- Condición de fase:

$$\sum_{i=1}^m \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z+p_j) = \pm 180^\circ(2p+1)$$





7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado ($K > 0$)

- 1) El trazado se inicia en los n polos ($K=0$) y termina en los m ceros ($K=\infty$). Un número de $n-m$ ramas terminan asintóticamente en infinito.
- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número impar de ceros+polos.
- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota = $180(2p+1)/(n-m)$, $p=0,1,2,\dots,n-m$

Centroide = $(\sum \text{parte real polos finitos } F(z) - \sum \text{parte real ceros finitos } F(z))/(n-m)$



7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado ($K > 0$)

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de z_0 en los que se cumple:

$$dK / dz = 0 \quad \rightarrow \quad d[-B(z)/A(z)] / dz = 0$$

Si el valor de K correspondiente a la raíz z_0 es positivo el punto es de bifurcación o de confluencia. Si K es negativo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo $z = jv$, $1 + F(jv) = 0$, e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores de v y K .



7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado ($K > 0$)

- 6) Cortes con la circunferencia de radio unidad: criterio de Jury.
- 7) Determinación del valor de K para un punto concreto del lugar de las raíces: aplicación de las condiciones de módulo y fase.



7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado ($K < 0$)

Condición de fase: $\angle F(z) = 0$ ó $\angle F(z) = \pm 360^\circ p$ con $p=0, 1, 2, \dots$

$$\sum_{i=1}^m \angle(z+z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(z+p_j) = \pm 360^\circ p$$

- 1) El trazado se inicia en los ceros y termina en los polos.
- 2) Los tramos del eje real que pertenecen al lugar de las raíces son aquellos que quedan a la izquierda de un número par de ceros+polos.
- 3) Asíntotas: ángulo de asíntota = $180(2p)/(n-m)$, $p=0,1,2,\dots,n-m$

Centroide = $(\sum \text{parte real polos finitos } F(z) - \sum \text{parte real ceros finitos } F(z))/(n-m)$



7. Representación del lugar de las raíces

Reglas generales para el trazado ($K < 0$)

- 4) Puntos de bifurcación (entre polos adyacentes) y confluencia (entre ceros adyacentes) son aquellos valores de z_0 en los que se cumple:

$$dK / dz = 0 \quad \rightarrow \quad d[-B(z)/A(z)] / dz = 0$$

Si el valor de K correspondiente a la raíz z_0 es negativo se trata del punto buscado. Si K es positivo el punto no es ni de bifurcación ni de confluencia.

- 5) Cortes con el eje imaginario: haciendo $z = jv$, $1 + F(jv) = 0$, e igualando a cero las partes real e imaginaria se obtienen los valores de v y K .

7. Representación del lugar de las raíces

Ejemplo: trazado del lugar de las raíces para $K > 0$

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(s+1)}$$

- Ganancia en lazo abierto para $T=1s$.

$$F(z) = GH(z) = \frac{0.632Kz}{(z-1)(z-0.368)}$$

Ecuación característica:

$$z^2 - 1.368z + 0.368 + 0.632Kz = 0$$

7. Representación del lugar de las raíces

- Ceros: $z_1=0$, $z_2=\infty$ Polos: $p_1=1$, $p_2=0.368$
- Tramos del eje real pertenecientes al lugar de las raíces:
 $0.368 < z < 1$ y $z < 0$
- Asíntota: 180° Centroide: 1.368
- Puntos de bifurcación y de confluencia:

$$K = - \frac{(z-1)(z-0.368)}{0.632 z} \qquad \frac{dK}{dz} = - \frac{0.632z^2 - 0.632 \cdot 0.368}{0.632z^2} = 0$$
$$z = 0.606 \quad , \quad K=0.244 \qquad \qquad z = -0.606 \quad , \quad K=4.08$$



7. Representación del lugar de las raíces

- Cortes con el eje imaginario:

$$\begin{aligned}z &= jv \\1 + GH(z) = 0 &\implies -v^2 - (1.368 - 0.632K)jv + 0.368 = 0 \\v = \pm 0.606 \quad K &= 2.164\end{aligned}$$

- Cortes con circunferencia de radio unidad: único corte en $z = -1$

$$F(-1) = GH(-1) = -1 \rightarrow 4.32$$

7. Representación del lugar de las raíces

- Representación gráfica:

