TEMA 10

Topología general

30 de junio de 2021

Contenidos

Formato de examen

El examen constará de tres preguntas:

- Cuestión teórica (2 puntos).
- Un homeomorfismo de espacios unidimensionales (3 puntos).
- Una topología de juguete: Una versión de la actividad 1 con preguntas sobre cosas de todo el curso (5 puntos).

1. Demuestra que todo intervalo abierto es homeomorfo a $\mathbb{R}$.

2. Demuestra que todo par de intervalos cerrados son homeomorfos.

3. Da un ejemplo de conjunto de $(0,1)$ que tenga un número infinito de elementos y que tenga $1/2$ como punto de acumulación.

Construcción del homeomorfismo de un abierto con $\mathbb{R}$

1. Cualquier intervalo abierto es homeomorfo a $(0,1)$. En efecto la aplicación $f:(a,b)(0,1)$ dada por
$$f(t) = \frac{t-a}{b-a}.$$
Es una aplicación continua porque es un polinomio. Además, su inversa es
$$f^{-1}(s) = a + (b-a)s,$$
también es continua por ser un polinomio.
2. La aplicación $f:(0,1)\mapsto\mathbb{R}$, dada por
$$g(x) = \frac{1-2x}{4x(x-1)}.$$
Es una función continua en $(0,1)$ (es una función racional que no se anula en $(0,1)$. Además, su función inversa es
$$g^{-1}(y) = \frac{2y-1}{4y} + \frac{\sqrt{4y^2+1}}{4y}.$$
Es continua (Nota: Los límites laterales en $y=0$ coinciden). $4y^2+1$ no se anula en los reales).

Dos cerrados son homeomorfos y conjunto con $1/2$ punto de acumulación

- La aplicación f de antes sirve para establecer un homeomorfismo entre dos cerrados.

- La sucesión

$$\{x_n\} = \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{2^j}$$

tiene límite $1/2$, luego $1/2$ es un punto de acumulación.

Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Define una topología $\mathcal{T}$ sobre X (invéntatela, la que tú quieras) siempre que verifique:

- $\mathcal{T}$ no es la topología discreta inducida en X.
- $\mathcal{T}$ Tiene al menos seis elementos distintos del conjunto vacío y del conjunto total. (ENUNCIADO PROBLEMA 10, Tema 3).

Se pide...

1. Demuestra $\mathcal{T}$ es una topología.
2. Selecciona y un punto cualquiera y calcula una base de entornos.
3. Calcula $\mathrm{Cl}(y)$ para todo y.
4. ¿Hay algún conjunto denso?
5. Define una función f continua distinta de la identidad.
6. ¿Es f abierta?
7. ¿Es f cerrada?
8. ¿Es homeomorfismo?
9. ¿Es cociente?
10. Sea $A = \{3, 4\}$. Define el colapso $p : A \mapsto X/A$.
11. Describe los abiertos de X/A.
12. Describe la topología inducida en A.
13. Estudia las propiedades de separación.
14. ¿Es un espacio conexo?

Es una topología

Elegimos los siguientes abiertos:

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3,5\}, \quad \{2,4,6\}, \quad \{1,2,4,6\}, \quad \{1,2,3,5\}, \quad \emptyset, \quad X$$

- $\{1\}$ está contenido contenido en todos los abiertos menos en $\{2,4,6\}$ (disjunto). Su unión es $\{1,2,4,6\} \in \mathcal{T}$.
- Lo mismo con $\{2\}$ y $\{1,3,5\}$.
- $\{1,2\}$ está contenido en todos menos en $\{2,4,6\}$. Su intersección es $\{2\} \in \mathcal{T}$ y su unión es $\{1,2,4,6\} \in \mathcal{T}$.
- $\{1,3,5\} \subset \{1,2,3,5\}$. $\{1,3,5\} \cap \{1,2,4,6\} = \{1\} \in \mathcal{T}$. Su unión es el total.
- $\{2,4,6\} \subset \{1,2,4,6\}$. $\{2,4,6\} \cap \{1,2,3,5\} = \{2\} \in \mathcal{T}$. Su unión es el total.
- La intersección de los dos abiertos de cuatro elementos es $\{1,2\}$ y su unión es el total.

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3,5\}, \quad \{2,4,6\}, \quad \{1,2,4,6\}, \quad \{1,2,3,5\}, \quad \emptyset, \quad X$$

Vamos a calcular una base de entornos de 3. Los entornos de 3 son

$$\begin{array}{l} \{1,3,5\}, \quad \{1,2,3,5\}, \quad \{1,3,4,5\}, \quad \{1,3,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5\}, \quad \{1,2,3,4,6\}, \quad \{1,3,4,5,6\}, \quad X \end{array}$$

El abierto $\{1,3,5\}$ está contenido en todos ellos. Luego es una base de entornos.

Un argumento directo es decir que todo abierto que contiene 3, contiene también $\{1,2,3\}$, luego éste es una base de entornos.

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{1,2\}, \quad \{1,3,5\}, \quad \{2,4,6\}, \quad \{1,2,4,6\}, \quad \{1,2,3,5\}, \quad \emptyset, \quad X$$

- $\overline{\{1\}} = \{1,3,5\}$.
- $\overline{\{2\}} = \{2,4,6\}$.
- $\overline{\{3\}} = \{3,5\}$.
- $\overline{\{4\}} = \{4,6\}$.
- $\overline{\{5\}} = \{3,5\}$.
- $\overline{\{6\}} = \{6,4\}$.

¿Hay algún conjunto denso?
El abierto $\{1,2\}$ es denso ya que $\overline{\{1,2\}} = \overline{\{1\}} \cup \overline{\{2\}} = X$.

$$\{1\},\quad \{2\},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\},\quad \{2,4,6\},\quad \{1,2,4,6\},\quad \{1,2,3,5\},\quad \emptyset,\quad X$$

Definimos la función $f : X \mapsto X$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \quad \text{impar}, \\ 2, & \text{si} \quad x \quad \text{par}, \end{cases}$$

- **¿Continua?** Notamos que el conjunto de llegada es $\{1,2\}$. Luego, solo hay que comprobar que las preimagenes de $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{1,2\}$ son abiertos. $f^{-1}\{1\} = \{1,3,5\} \in \mathcal{T}$. $f^{-1}\{2\} = \{2,4,6\} \in \mathcal{T}$. $f^{-1}\{1,2\} = X \in \mathcal{T}$.
- **¿Abierta?** La imagen de todo conjunto es $\{1\}$, $\{2\}$ o $\{1,2\}$. Todos abiertos, por lo tanto, f es abierta.
- **¿Cerrada?** La imagen del cerrado $\{2,4,6\}$ es $\{2\}$ que es abierto y no cerrado. Luego f no es cerrada.
- **¿Homeomorfismo?** $f(2) = f(4)$, la función no es inyectiva por lo tanto no puede ser homeomorfismo.

$$\{1\},\quad \{2\},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\},\quad \{2,4,6\},\quad \{1,2,4,6\},\quad \{1,2,3,5\},\quad \emptyset,\quad X$$

El colapso es el espacio cociente inducido por la aplicación:

$$p(x) = \begin{cases} * & \text{si} \quad x \in \{3,4\}, \\ x & \text{si} \quad x \notin \{3,4\}, \end{cases}$$

Esto es $X/\sim = \{1,2,*,5,6\}$. Describimos sus abiertos.

- Si $G \in X/\sim$ no contiene $*$, entonces la aplicación es la identidad (y el pullback también). Luego G es abierto del cociente si y solo si lo es en el espacio original. Entonces , $\{1\}$, $\{2\}$ y $\{1,2\}$ son abiertos del cociente.
- Si $* \in G$ entonces su pullback contendrá, necesariamente los elementos 3 y 4. No hay ningún abierto que contenga simultáneamente el 3 y 4 a parte del total. Luego, $X/\sim$ es el único conjunto que queda.

Topología inducida en $\{3, 4\}$

$$\{1\}, \quad \{2\}, \quad \{1, 2\}, \quad \{1, 3, 5\}, \quad \{2, 4, 6\}, \quad \{1, 2, 4, 6\}, \quad \{1, 2, 3, 5\}, \quad \emptyset, \quad X$$

Hay que intersecar los abiertos de X con $\{3, 4\}$.

- Todos los abiertos que contengan 3 y 4 darán lugar al abierto $\{3, 4\}$ (el total).
- Todos los abietos que no los contengan darán lugar al abierto $\emptyset$.
- Los abiertos que contienen 3 y no 4 dan lugar al abierto $\{3\}$.
- Los abiertos que contienen 4 y no 3 dan lugar al abierto $\{4\}$.

$$\{1\},\quad \{2\},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\},\quad \{2,4,6\},\quad \{1,2,4,6\},\quad \{1,2,3,5\},\quad \emptyset,\quad X$$

- Recordemos que un espacio es T_0 si para todo par de elementos distintos x e y, existen U y V tal que $x \in U$ pero no y o $y \in V$ pero no x. Notamos que no es T_0 ya que cualquier abierto que contiene 3 también contiene a 5.
- Como no es T_0 no es T_1 ni T_2.
- **¿Regular?** Recordamos que un espacio es regular si para todo par (x, F) con F cerrado que no contiene a x, existen abiertos disjuntos U y V tales que $x \in U$ y $F \subset V$. El conjunto $\{2,3,4,5,6\}$ es cerrado por ser complementario de $\{1\}$. El único abierto que lo contiene es el total que también contiene a $\{1\}$. Luego, no es regular.
- **¿Normal?** Recordamos que un espacio es normal si cualquier par de cerrados disjuntos se pueden separar por abiertos. Los únicos pares de cerrados disjuntos que hay son
  1. $\{1,3,5\}$ y $\{2,4,6\}$ que además son abiertos.
  2. $\{3,5\}$ y $\{4,6\}$ que están contenidos en $\{1,3,5\}$ y $\{2,4,6\}$ que son disjuntos.

  En particular, X es normal.

$$\{1\},\quad \{2\},\quad \{1,2\},\quad \{1,3,5\},\quad \{2,4,6\},\quad \{1,2,4,6\},\quad \{1,2,3,5\},\quad \emptyset,\quad X$$

Los conjuntos $\{1,3,5\}$ y $\{2,4,6\}$ son abiertos y cerrados y conforman una separación no trivial. Esto es, X no es conexo.

unir

LA UNIVERSIDAD EN INTERNET