Cecilia Cara

th

ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA

Profesor : Juan Ramón

1º Matemáticas y Estadística

UCM

2014 - 2015

ALGEBRA LINEAL

Juan Ramón

Tutorías Despacho 515

L: 10-13   J: 12-13   V: 10-12, 12-13

jdelgado@mat.ucm.es

Programa

1er Semestre
- PARTE I Espacios vectoriales
- PARTE II Aplicaciones lineales
- PARTE III Clasificación endomorfismo
- PARTE IV Espacio Dual

2.º Semestre
- PARTE V GEOMETRÍA AFÍN
- PARTE VI FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS
- PARTE VII ESPACIO VECTORIAL EUCLÍDEO
- PARTE VIII ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO.

EVALUACIÓN

2 Parciales. Si se aprueban, no hay que ir al final

Se necesita > 4 para hacer media.

Examenes

40% TEORÍA Y PROBLEMA (Demostrar - Tma Libros Gamboa)

60% PARTE PRÁCTICA.

Referencias

Exams * 1. ALGEBRA LINEAL Fernando - Gamboa - Ruiz (2 volúmenes) con problemas resueltos.

Import. * 2. Álgebra Lineal y Geometría Castellet - Llerena

→ Algebra lineal y Geometría Merino (no sigue tal cual nuestra estructura)

Alberto prácticas

a.navarro.garmedia@icmat.es Despacho 310 H Días: J-V

PARTE I: ESPACIOS VECTORIALES

1. Grupos, anillos y cuerpos

Definición

Un conjunto R es un anillo si existen las operaciones $+, \cdot$

$+, \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a, b) \longmapsto a + b$ tal que cumplan las siguientes

$\longmapsto a \cdot b$

Propiedades (Anillo)

Respecto la suma

- i) Asociativa $(a+b)+c = a+(b+c)$
- ii) $\exists$ elemento neutro $0_R \in R : a + 0_R = 0_R + a = a \quad \forall a \in R$
- iii) $\exists$ elemento opuesto $\forall a \in R \ \exists -a \in R : a + (-a) = (-a) + a = 0_R$
- iv) Conmutativo $\forall a, b \in R \quad a + b = b + a$
- v) Asociativa $(ab)c = a(bc) \ \forall a, b, c \in R$
- vi) Distributiva $a(b+c) = ab + ac$, $(a+b)c = ac + bc$
- vii) $\exists$ elemento neutro $1_R \in R : a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a \quad \forall a \in R$
- viii) $\forall a, b \in R$ (Conmutativa) $ab = ba$
- ix) $\forall a, b \in R \quad ab = 0_R$ (Elemento nulo) $a = 0_R$ o $b = 0_R$
- x) $\forall a \in R \quad a \neq 0_R \ \exists a^{-1} \in R$ tq (Elemento opuesto) $a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1_R$

Tipo de conjunto según las propiedades que cumpla.

1-6 ⇒ Anillo

1-7 ⇒ Anillo unitario

1-6+8 ⇒ Anillo conmunitario

1-8 ⇒ Anillo conmutativo unitario

1-6+9 ⇒ Sin divisores de cero

1-9 ⇒ Dominio de integridad (algo menos que un cuerpo)

1-7+10 ⇒ Cuerpo (no puede ser divisor de 0)

1-8+10 ⇒ CUERPO CONMUTATIVO
CAMPO / FIELD

G, * (Grupo) e = elem. neutro.

1) Asociativa

2) $a * e = e * a = a$

3) $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

4) $a * b = b * a$

Ejemplos

① $\mathbb{Z}, +, \cdot$ dominio de integridad (NO ES CUERPO)

$\mathbb{Z}^\times = \{1, -1\}$ (únicos inversibles)

$1 + (-1) = 0 \notin \mathbb{Z}^\times$

$\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, +, \cdot \Rightarrow$ CUERPOS CONMUTATIVOS

$(\mathbb{Z} \subset)\ \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\downarrow$

No es cuerpo

$xy = (x + 0i)(y + 0i)$

$\Downarrow$

No es un subcuerpo de $\mathbb{Q}$ → Sí es un subanillo de $\mathbb{Q}$

Repasillo

$R, +, \cdot$ anillo unitario

$R^\times = \{r \in R : \exists s R \quad rs = sr = 1_R\}$

R cuerpo $\Longleftrightarrow R^\times = R \setminus \{0_R\}$

$r_1, r_2 \in R^\times \Rightarrow r_1 r_2 \in R^\times$

divisores de s_1, s_2

$(r_1\ r_2)(s_2\ s_1) = r_1 1_R s_1 = r_1 s_1 = 1_R$

$1_R \in R^\times \qquad R^\times, \cdot$ grupo → Nunca con +

R anillo $\Rightarrow R^\times, \cdot$ es un grupo.

21/Oct.

Ejemplo aplicado

$Mat_{2\times3}(\mathbb{R}) \ni \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ $(a_i\ b_i \in \mathbb{R})$

$Mat_{2\times3}(\mathbb{R}), +$

Prop 1) ✓

2) $0_{Mat_{2\times3}(\mathbb{R})}$] matriz neutra ✓

3) Opuesto $\Rightarrow \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & -a_3 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix}$

4) Conmutativa

$\Rightarrow Mat_{2\times3}(\mathbb{R}), +$ Grupo conmutativo

$Mat_{m\times n}(G), +$ siendo G conmutativo se define la suma y es Grupo conmutativo.

$Mat_n(R), +$ | R es un anillo, se define la suma $\Rightarrow Mat_n(R)$ es un anillo

R conmutativo y unitario $\Rightarrow Mat_n(R)$ → si unitario
↳ no conmutativo

↓

$I_n = \begin{pmatrix} 1_R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1_R & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1_R \end{pmatrix}$

Si $Mat_n(R) = Mat_1(R)$ si lo sería (conmutativo) ya que solo es un nº

$Mat_1(R) \Longleftrightarrow R$

$\overset{\shortparallel}{a} \longleftrightarrow a$ biyectiva preserva la suma y el producto

$\Rightarrow$ Se le llamaría Isomorfismo y se escribe $R \cong S \Leftrightarrow$

$\phi : R \longrightarrow S$ biyectiva y preserva la suma y el producto.

$\phi(r_1 + r_2) = \phi(r_1) + \phi(r_2)$

$Mat_n(R)^\times$ → son matrices inversibles

↳ forman anillo unitario y son inversibles si su determinante $\neq 0$

Ejemplo 2 aplicaciones

$\mathbb{Z}$ $\quad m > 0 \quad a, b \in \mathbb{Z} \quad a \equiv b$ (modulo m) Relación equivalencia (reflex, simét., transit.)

$a - b = \lambda m$, para algún $\lambda \in \mathbb{Z}$

$m = 2$ $\quad a \equiv b \pmod{2}$ si $a-b$ es par

conciente

(mod 3)

$\begin{array}{r|l} a & 3 \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$

$r = 0 \rightarrow q \cdot 3 = a$

$\left.\begin{array}{l} r = 1 \\ r = 2 \end{array}\right\}$ congruación

Conjunto cociente = conjunto clase equivalencias

$$\mathbb{Z}/_{\equiv_m} = \{ [0]_m, [1]_m, \ldots, [m-1]_m \}$$

$[i]_m + [j]_m = [i+j]_m$

$[0]_2 + [1]_2 = [1]_2$

$[1] + [1]_2 = [2]_2 = [0]$

$[i]_m = [i']_m \quad i - i' = \lambda m$

$[j]_m = [j']_m \quad j - j' = \mu m$

$(i+1)m \overset{?}{=} (i+j')m$

$(i+j) - (i'+j') =$

$= i - i' + j - j' = \lambda m + \mu m =$

$= (\lambda + \mu) m$.

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

neutro suma. $\quad [0]_m - [1]_m = [-1]_m$ $\quad \Rightarrow$ Anillo conmutativo y unitario

Obtenemos infinitos anillos finitos

neutro producto $\quad [1]_m$ neutro

$(\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$

$\underset{[0]_4}{\overset{\ne}{[2]_4}} \underset{[0]_4}{\overset{\ne}{[2]_4}} = [4]_4 = [0]_4$

Para que $(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$

Dom integridad $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ m es primo $\Rightarrow$ cuerpo

$\mathbb{Z}^{\times}_{(18)}$ $\Rightarrow$ No es cuerpo (Ejc hallar unidades = elem. inversibles)

no primo

23/Oct.

Definición

R anillo, $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in R$ polinomio del coeficiente n, se denomina $R[x]$

1) $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$ (Suma)

2) $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) \overset{def}{=} \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$ (Producto)

Propiedades

i) R anillo $\Longrightarrow$ $R[x]$ anillo

ii) R unitario $\Longrightarrow$ $R[x]$ unitario $1_R = 1_{R[x]}$

iii) R conmutativo $\Longrightarrow$ $R[x]$ conmutativo

iv) R dominio $\Longrightarrow$ $R[x]$ dominio

v) R cuerpo $\not\Longrightarrow$ $R[x]$ cuerpo

Demostración (iv)

$$0 \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\Big)\Big(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\Big) = \dots + \underbrace{c_{n+m-1} x^{n+m-1}}_{\neq 0} + \underbrace{c_{n+m} x^{n+m}}_{\neq 0}$$

$a_n \neq 0$ $\Downarrow$ grado n

$b_j \neq 0$

Definición

R es un anillo conmutativo y unitario y suponemos que $R \subset S$ siendo S anillo conmutativo y unitario, R es subanillo de S $\alpha \in S$ se puede definir:

$$\varphi_\alpha^*: R[x] \longrightarrow S$$

$$\underset{\substack{\| \\ f}}{\sum_{i=0}^{n} a_i x^i} \xrightarrow[\text{"asigna"}]{} \underset{\substack{\| \\ f(\alpha)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i}$$

Propiedades

con las condiciones de la def

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } \varphi_\alpha(f+g) = \varphi_\alpha(f) + \varphi_\alpha(g) \\ \text{ii) } \varphi_\alpha(f \cdot g) = \varphi_\alpha(f) \cdot \varphi_\alpha(g) \end{array}\right\} \forall f, g \in R[x]$$

iii) $\varphi_\alpha(a) = a \quad \forall a \in R$

Demostraciones. propiedades *

$\varphi(\alpha)$ es homomorfismo de anillos al respetar esas operaciones. (respeta las operaciones de una a otra)

$\mathbb{Z}_6 \quad x^2+x \in \mathbb{Z}_6[x] \quad \overset{\text{no dominio}}{\mathbb{Z}_6} = \{\underset{*}{\bar{0}}, \bar{1}, \underset{*}{\bar{2}}, \underset{*}{\bar{3}}, \bar{4}, \bar{5}\}$

son raíces del polinomio

Propiedades

$R \subset S$, S dominio $f \in \mathbb{R}[x]$

$⋇$ = nº elementos / cardinal del conjunto = $\{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} \leq \text{grado}(f)$

Demostración (inducción sobre $n = \text{grado } f$)

$n = 1 \Rightarrow f = a_0 + a_1 x \qquad a_1 \neq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha \in S, & 0 = f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha \\ \beta \in S & 0 = f(\beta) = a_0 + a_1\beta \end{array}\right\} 0 = \overset{\neq 0}{a_1}(\alpha - \beta)$$

$(\alpha - \beta) = 0$

$\alpha = \beta$

Grado 1, si hay una raíz y es única.

$n-1 \overset{?}{\Rightarrow} n$

$\{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} = \emptyset \qquad f(x) = \overset{\text{cociente}}{q(x)}(x-\alpha) + \underbrace{r(x)}_{\text{resto } = b_0}$

$\{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} \neq \emptyset \to f(\alpha) = 0 \Longrightarrow \downarrow$

$\Longrightarrow q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r(\alpha) = 0 \Longrightarrow r(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(x) = \underbrace{(x-\alpha)}_{\text{como mucho una raíz}} \overset{\text{raíz } n-1}{q(x)}$

$⋇ \; \{ \quad \{ \leq \cancel{1} + n - \cancel{1} = n$

23/oct

Teorema

K es un cuerpo conmutativo $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$, $\Rightarrow \exists$ polinomios únicos $q, r \in K[x]$ tal que

Algoritmo Euclideo polinomio

1) $f = qg + r$
2) $r = 0$ o $\text{grado}(r) < \text{grado}(g)$

} Demost. facil ec euclideo.

Algoritmo euclideo común divisor $\Rightarrow$ mcd.

$$g | f \iff \exists\, q \text{ t/ que } f = qg$$

Propiedad $\forall f, g \in K[x]$ $\exists$ mcd (f, g)

Ejemplo

$$\begin{array}{rl|l} & \overset{f}{\cancel{x^4} + 2x + 1} & \overset{g}{x^2 + 1} \\ + & -\cancel{x^4} - x^2 & x^2 - 1 \\ \hline & -x^2 + 2x + 1 & \\ + & x^2 \qquad + 1 & \\ \hline & \underbrace{2x + 2}_{\mathbb{Z}_2 (\mathbb{F}_2) \text{ se anularía.}} \neq 0 \quad \mathbb{R} \text{ y } \mathbb{Q} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} * \quad \cancel{x^2} + 1 & 2x + 2 \\ -\cancel{x^2} - \cancel{x} & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \\ \hline -x + 1 & \\ x + 1 & \\ \hline 2 \neq 0 & \end{array}$$

$2 = \text{mcd}(f, g)$

Propiedad II $\forall f, g \in K[x]$ $\exists$ $p, q \in K[x]$ tal que

$$fp + gq = \text{mcd}(f, q)$$

(IDENTIDAD BEZOUT)

Ejemplo * $\quad 2 = fp + gq \qquad 1 = f\left(\frac{1}{2}p\right) + g\left(\frac{1}{2}q\right)$

Definición $f \in K[x]$ Se dice que f es irreducible si:

(es conmutativo a no ser que se diga lo contrario)

1) $f \neq 0$

2) f no es constante

3) $f = gh$, $g h \in K[x] \Rightarrow g$ constante ó h constant

Teorema $f \in k[x]$ $f \neq 0$ f no constante $\Longrightarrow \exists\, f_1, \dots, f_t \in k[x]$ irreducibles tal que $f = f_1 \cdots f_t$. Además si $f = g_1 \cdots g_s$ $g_1, \dots, g_s \in k[x]$ irreducible $\Longrightarrow t = s$ y $f_i = a_i g_i$ para alguna $a_i \in k$

24/Oct.

Demostración RAA. ($f \neq 0$, f no cte $\Rightarrow f = f_1 \cdots f_t$, f_i irreducibles)

Por reducción al absurdo ⇒ en caso contrario existiría.

f de grado mínimo : $f \neq f_1 \dots f_t$ irreducible $\Rightarrow$ f no es irreducible

$\Longrightarrow f = gh$, $g, h \in k[x]$; grado (g), grado (h) < grado (f)

$\Longrightarrow g = g_1 \cdots g_r$, $h = h_1, \dots, h_s$ g_i, h_j irreducible $r+s$

$\#$

Unicidad

$$f_1 \cdots f_t = g_1 \cdots g_s \quad f_i, g_j \text{ irreducibles} \Longrightarrow \begin{cases} t = s \\ f_i = a_i g_i, \ a_i \in k \end{cases}$$

Lema $f, g, h \in k[x]$, f irreducible $f | gh \Rightarrow f | g$ o $f | h$

Demostración Supongamos $f \nmid g \Rightarrow 1 = \text{mcd}(f, g) = p \cdot f + qg$

$$\Rightarrow h = phf + q\underbrace{gh}_{=f} = phf + qf\underbrace{k}_{\substack{\text{polinomio} \\ \text{extra cte}}} = (ph + qk)f \Rightarrow f | h$$

$\#$

Demostración Unicidad

$$f_1 | f_1 \cdots f_t \xrightarrow{\text{Lema}} f_1 | g_1 \Longrightarrow \underbrace{g_1}_{\substack{\text{irreducible} \\ K[x] \text{ dominio}}} = \overset{\text{irreducible}}{p f_1} \xrightarrow[\substack{g_1, f_1 \\ \text{irreducibles}}]{} p_1 = a_1 \in k \text{ (constante)}$$

$$\Longrightarrow f_1 \cdot f_2, \dots, f_t = a_1 f_1 g_2 \cdots g_s \Longrightarrow f_2 \cdots f_t = \underbrace{(a_1 g_2)}_{= g_2'} g_3 \cdots g_s$$

$\Longrightarrow t = s$, $f_i = a_i g_i$ (todos asociados)

$\#$

$\Rightarrow$ K[x] dom factorización

(Para Examen tma + demostración) 24/Octubre

Teorema Sea k un cuerpo conmutativo, $f \in k[x]$ irreducible, no constante

Existe un cuerpo conmutativo k_f tal que

1) k es un subcuerpo de k_f

2) $\exists \ \alpha \in k_f : f(\alpha) = 0$

Demostración

podemos suponer que será mónico

$n = \text{grado } f > 0$, $a_n \neq 0$, $a_n^{-1} \cdot f = x^n + \dots$ (polinomio mónico)

mismas raíces — término mayor grado = 1

$f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ grado $n > 1$

$n = 1 \Longrightarrow f = x + a_0$, $\alpha = -a_0 \in k$ $k_f = k$

$k_f = k_n[x] = \{ g : g \in k[x], \text{grado}(g) < n \}$ $\underbrace{+}_{\text{suma usual de } P[x]}$, $\odot$ * dif.

$g, h \in k_f \Longrightarrow g \cdot h = r$, donde

$gh = qf + r$, $r = 0$ y grado $< n$

Prop. que tiene que cumplir para que sea cuerpo conmutativo

$k_f, +, \times$ cuerpo conmutativo (c.c)

$k_f, +$ $\Longrightarrow$ grupo abeliano

Producto asociativo.

$$(g_1 \otimes g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes (g_2 \otimes g_3) \quad g_1, g_2, g_3 \in k_f$$

$$\underbrace{(g_1 \otimes g_2)}_{g_1 g_2 = q_{12} f + r_{12}} \otimes g_3 = \underbrace{r_{12} \times g_3}_{r_{12} g_3 = qf + r} \Longrightarrow = r$$

$$g_1 \otimes \underbrace{(g_2 \otimes g_3)}_{q_{23} f + r_{23}} = \underbrace{g_1 \otimes r_{23}}_{pf + s} = s$$

$$r \neq s \Longrightarrow 0 \neq r - s = r_{12} g_3 - qf) - (g_1 r_{23} - pf) =$$

$$= (g_1 g_2 - q_{12} \textcircled{f}) g_3 - q\textcircled{f} - g_1 (g_2 g_3 - q_{23} \textcircled{f}) + p\textcircled{f} = hf$$

grado h + grado f = n

grado $(r - s) < n$ $\longleftrightarrow$ contradicción

5

- $1 \in K_f$ $\underbrace{1 \otimes g}_{\overset{\shortparallel}{g}} \Rightarrow 1 \cdot g = 0 \cdot f + g$

- Conmutativo si $g_1 \otimes g_2 = g_2 \otimes g_1$

- Distributiva $(g_1 + g_2) \otimes g_3 = g_1 \otimes g_3 + g_2 \otimes g_3$

Probarla.*

- Inverso

$0 = g \in K_f \Rightarrow \exists\, h \in K_f$ talque $g \otimes h = 1$

$\underbrace{\text{grado}(g)}_{\text{menor grado}} < \underbrace{\text{grado}(f)}_{\text{irreducible de grado n}} \Rightarrow \text{mcd}(g, f) = qf + pg =$

$= (k_f + r)g + qf = rg + (k+q)f$

$\swarrow$ $r \in K_f$

$\Rightarrow rg = -(k+g)f + 1 \Rightarrow r \otimes g$

$K \subset K_f$ $a \in K \Rightarrow a \in K[x]$, $\text{grado}(a) = 0 < n \Rightarrow a \in K_f$

$a, b \in K \Rightarrow a + b$

$a \cdot b$

$a \otimes b = ab$ por que es la división euclidea

$ab = 0f + ab$

$\Rightarrow$ Ya tenemos que es un cuerpo conmutativo de K_f y ahora vamos a demostrar que cumple la II propiedad del Tma.

24/Oct

$\alpha = x \in k_f$

(Evaluar $k[x]$) $\varphi_\alpha : k[x] \longrightarrow k_f^{\ni \alpha}$

//

conserva
suma y producto

$$g \longmapsto g(\alpha)$$

$$\sum a_i x^i \longmapsto \sum a_i \alpha_i$$

$(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)(\alpha)$ y vamos a ver que es 0

$$= (x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)(x) = x^{\otimes n} + \underset{a_{n-1}x^n}{\underset{\shortparallel}{a_{n-1} \otimes x^{\otimes n-1}}} + \dots + \underset{a_1 x}{\underset{\shortparallel}{a \otimes x}} + \underset{a_2}{\underset{\shortparallel}{a_0}}$$

$x^n = 1 - f - a_{n-1}x^{n-1} \dots - a_1 x - a_0$

$x^{\otimes n} = -a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1 x - a_0$

$a_{n-1}x^{n-1} \dots x = a_{n-1}x^{n-1} = 0 \cdot f + a_{n-1}x^{n-1}$

Entonces $(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)(\alpha) = 0$

Ejemplo

$f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$

$\mathbb{R}_f \ni ax + b \Longrightarrow a, b \in \mathbb{R} \longmapsto a_i + b$

$x^{\otimes 2} = -1 \nwarrow$

$x^2 = (x^2+1)\textcircled{-1}$

$x^{\otimes 2} + 1 = 0 \Longrightarrow i =$ raiz de $\mathbb{R}_f$

27/Oct

Ejemplo $K = \mathbb{R}$ $f = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$ irreducible $n = 2$

$K_f = \{a + bx : a, b \in \mathbb{R}\}$

$K_f, +, \otimes$

$(a + bx) + (c + dx) = (a + c) + (b + d)x$ ✓

$(a + bx) \otimes (c + dx)$

$$(a+bx)(c+dx) = ac + (ad+bc)x + bdx^2 = \underbrace{ac} + (\underbrace{ad+bc})x$$

$$+ bd(x^2 + \underbrace{1}_{\text{añado}}) \underbrace{- bd}_{\text{quito}}$$

$$\Longrightarrow (a+bx) \otimes (c+dx) = (ac - bd) + (ad + bc)x$$

$\phi : K_f \longrightarrow \mathbb{C}$ $\qquad$ ϕ biyectiva

$a+bx \longmapsto a+bi$ $\qquad$ $\phi(\;+\;) = \phi(\;)+\phi(\;)$

$\phi(\;\otimes\;) = \phi(\;)\cdot\phi(\;)$

Ejemplo

$K=\mathbb{Q}$ $\quad f = x^2+1 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible $n=2$

$K_f = \{a+bx : a,b \in \mathbb{Q}\}$

$(a+bx)+(c+dx) = (a+c)+(b+d)x$

$(a+bx) \otimes (c+dx) =$

$(a+bx)(c+dx) = ac+(ad+bc)x+bdx^2 = ac+(ab+bc)x+bd(x^2+1)-bd$

$\Longrightarrow (a+bx)\otimes(c+dx) = (ac-bd)+(ad+bc)x$

$\phi : K_f \longrightarrow \underbrace{\mathbb{Q}(i)}_{\text{numerable}} = \{a+bi : \underbrace{a}_{\text{numerable}}, \underbrace{b}_{\text{numerable}} \in \mathbb{Q}\}$ subcuerpo $\mathbb{C}$

$\Longrightarrow$ numerable

$a+bx \longmapsto bi$

ϕ biyectiva

$\phi(\;+\;) = \phi(\;)+\phi(\;)$

$\phi(\;\otimes\;) = \phi(\;)\cdot\phi(\;)$

Ejemplo Si el caso anterior fuese en $\mathbb{C}$ no sería irreducible $\Longrightarrow$ no sería un subcuerpo

Ejemplo $\mathbb{Q}(\sqrt{-2}) \underset{\text{subcuerpo}}{\subseteq} \mathbb{C}$

$K=\mathbb{Q}$ $\qquad f = x^2+2 \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible

$K_f \cong \mathbb{Q}(\sqrt{-2})$

$\{a+bx : a,b \in \mathbb{Q}\}$

$(a+bx)\otimes(c+dx) \underset{\text{sin pasos intermedios}}{=} (ac \underbrace{-2bd}_{\text{quitar y poner}}) + (ab+bc)x$

$\Uparrow$

$(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{-2})$

* Pasos intermedios

hacerlo como en los anteriores $\rightarrow$ $(a+bx)(c+dx) =$

27/Oct

$n=2$

$f = x^2 + d$ $\quad d \in \mathbb{Z}$ sin cuadrados

$d = -1, -2, -3, -5, -6, -7 \dots$

$a = 2, 3, 5, 6, 7 \dots$

$f_d = x^2 + d \in \mathbb{Q}[x]$ irreducible

$K_d = K_{f_d} = \{a + bx : a, b \in \mathbb{Q}\}$ → puedo definir una cantidad infinita de productos, una serie infinitas de cuerpos

$+, \otimes_d$

↑

para cada "d" habrá un producto

$\otimes_d$ es coger dos lineales y dividir entre $x^2 - d$ que dan cociente y un resto que serán distintos para cada d por lo que el producto depende de "d"

Ejemplo $K = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $(1+1=0)$

$f = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x] \xRightarrow{\text{irreducible}}$ (no tiene raíces en $\mathbb{Z}_2$ ni 0 ni 1 tiene raíz).

$0^2 + 0 + 1 = 1 \neq 0$

$1^2 + 1 + 1 = 3 = 1 \neq 0$

⇙ Generará un cuerpo.

$K_f = \{a + bx : a, b \in \mathbb{Z}_2\} := \{0, 1, x, 1+x\}$

$|K_f| = 4$

$$(a+bx) \otimes (c+dx) = (ac - bd) + (ad + bc - \underbrace{bd}_{\text{ajustado}})x$$

Es un cuerpo conmutativo

$x^2 = -x - 1 = x + 1$ $\quad x(x+1) = x^2 + x = -1 = 1$

↗ -1 en $\mathbb{Z}_2 = 1$

~~Demostra~~

Otro ejemplo

$f = x^3 + x + 1 \quad \in \mathbb{Z}_2[x]$

$g = x^3 + x^2 + 1$

irreducibles ni 0 ni 1 tienen ~~más~~ raíz en $\mathbb{Z}_2$

$K_f = K_g = \{a + bx + cx^2 : a, b, c = 0, 1\}$

$K_f \simeq K_g$ ISOMORFOS

Teorema

K cuerpo conmutativo, $f \in K[x]$ no constante, $\exists$ un cuerpo conmutativo F: tal que:

1) K es un subcuerpo de F

2) f descompone completamente en $F[x]$, es decir, existen

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ tq $f = \underbrace{a}_{\text{coef. principal del polinomio.}} (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n), a \in K$

Demostración

Inducción sobre grado n, $n \geq 1$

$n = 1$

$f = ax + b \Rightarrow a(x + a^{-1}b) \qquad F = K$

$\alpha_1 = -a^{-1} b \in K$

$n > 1$

$f = f_1 \cdots f_t \quad , f_i \in K[x]$ irreducibles

$\exists \; K_{f_1} \supseteq K \quad \exists \; \alpha_1 \in K_{f_1} : f_1(\alpha_1) = 0$

$f = (x - \alpha_1) g \qquad g \in K_{f_1}[x]$

grado $g = n - 1$

$\xRightarrow{HI} \exists \; F \overset{\text{subcuerpo}}{\supseteq} K_f \quad , g = a(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n) \qquad \alpha_i \in F$

$f = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$

27/Oct.

Para encontrar las raíces de f ⇒ descompongo f y cojo cada trocito irreducible y lo completamos para sacar raíces.

$$x^4 + 1 \in \mathbb{R}[x]$$

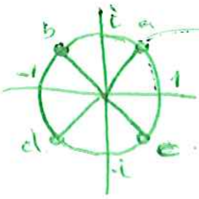
$$\parallel$$

$$(x^2+1)^2 - 2x^2 \longrightarrow (\sqrt{2}\,x)^2$$

$\parallel$ descomponer

$(x^2+1+\sqrt{2}\,x)(x^2+1-\sqrt{2}\,x)$ irreducibles $\mathbb{R}[x]$

en $\mathbb{C}$ $x^4 - 1$ raíces complejas



$a = \frac{1+i}{2}$, $b = \frac{-1+i}{2}$, $c = \frac{1-i}{2}$, $d = \frac{-1-i}{2}$

28/Oct.

Definición Sea R un anillo unitario con dos operaciones

op. internas

$a, b \in R \Longrightarrow a+b, ab \in R$

$n \in \mathbb{Z}, a \in R \Rightarrow na = \begin{cases} \overbrace{a + \dots + a}^{n} & (n>0) \\ 0_R & n = 0_R \\ -(-n)a & (n<0) \end{cases}$

$\mathbb{Z} \times R \longrightarrow R$

op externa

Propiedades

i) $(n+m)a = na + ma$

ii) $(nm)a = n(ma)$ $\underbrace{\overbrace{(a+\dots+a)}^{m} + \dots + \overbrace{(a+\dots+a)}^{m}}_{n}$

iii) $\underbrace{1_{\mathbb{Z}}}_{\text{unidad } \mathbb{Z}} a = a = \underbrace{1_R}_{\text{unidad } R} a$ unidad $\mathbb{Z}$ = unidad R

iv) $0_{\mathbb{Z}}\, a = 0_R = 0_R a$ $0_R a = (0_R + 0_R)a = 0_R a + 0_R \Rightarrow 0_R = 0_R a$

v) $(nm)1_R = n(m 1_R) = (n 1_R)(m 1_R)$

Observación

Producto de un escalar por un vector

$a_u = 0_v \implies a = 0$ ó $u = 0$ y el resultado es 0 perteneciente a V

$$a u = 0, \quad a \neq 0 \implies \exists\, a^{-1} \implies \underset{\substack{\| \\ (a^{-1}a)u \\ \| \\ 1_K u = u}}{a^{-1}(au)} = a^{-1} 0 =$$

$$= a^{-1}(0+0) = a^{-1}0 + a^{-1}0 \Rightarrow a^{-1}\cdot 0 = 0.$$

Definición Isomorfismo

$\phi : V \longrightarrow V'$ es un isomorfismo de K-ev si:

i) ϕ biyectiva

ii) $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

iii) $\phi(au) = a\phi(u)$

$\Big\}\ \forall a \in K,\ \forall u, v \in V$

$u \longmapsto u'$

$(u+v)' = u' + v'$

$(au)' = au'$

Definición Subespacio

$W < V$

W es subespacio de V si $W \subseteq V$ y

$+ : W \times W \longrightarrow W$

$\cdot : K \times W \longrightarrow W$

definen una estructura de ev sobre W

30/Oct.

Propiedades

$\emptyset \neq W \subseteq V$, V K-ev   son equivalentes

no puede ser conjunto vacío.

i) $W < V'$

ii) $\forall u, v \in W \ \forall a \in K \Rightarrow u+v \in W, \ au \in W$

Demostración i ⇒ ii   ii ⇒ i   Estas implican todas las demás

Verificar que $0 \in W$ y $u \in W \Rightarrow u \in W$

$\exists u \in W \qquad \underbrace{0_K u}_{\substack{\parallel \\ 0_W}} \in W$ ← prop anterior.

$(-1_K)\, u = -(1_K u) = -u \in W$

Ejemplos

1) $K^2 = K \times K = \{(a,b) : a, b \in K\}$

$(a+b) + (a', b') = (a+a', b+b')$ $\lambda \in \mathbb{N}$

$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b)$

$K^2, +, \cdot$ es un e.v sobre K

$K^n = \overbrace{K \times K \times \dots \times K}^{n}$

2) $Mat_{m \times n}(K), +, \cdot$

$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$

$a(a_{ij}) = (aa_{ij})$

↗ se multiplica todas por a

Esto tiene forma de ev por estas 2 operaciones

$\boxed{Mat_{m \times n}(K) \simeq K^{m \cdot n} \quad \text{Isomorfismo}}$

3) $a_{ij} \in K$

$$(S)\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

$(a_1 \dots a_n) \in K^n$ tq $\overbrace{a_{11}a_1 + \dots + a_{1n}a_n = 0}^{K}, \dots, a_{n1}a_1 + \dots + a_{mn}a_n = 0$

El conjunto

$\{(a_1, \dots, a_n) \in K^n : (a_1, \dots, a_n)$ solución de $(S)\} < K^n$

la suma de solución es solucion

4) $K[x]$

+: usual

$$a\sum_{i=0}^{n} a_j x^i = \sum_{i=0}^{n} (a a_j) x^i$$

$K[x], +, \cdot \Longrightarrow$ es un espacio vectorial.

El anillo de $K[x]$ tiene estructura de Ev

$$K[x] \times K[x] \longrightarrow K[x] \quad \text{EV.}$$

5) $K_n[x]$ subespacio de $K[x]$

$K_n[x] < K[x]$

6) $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ (funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$)

conjunto

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = af(x)$$

$\mathbb{R}$-ev o e.vectoriales reales.

Ejemplos

30/oct.

7) Funciones continuas

$$C(\mathbb{R};\mathbb{R}) \underset{\text{sub-ev}}{<} \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Las sumas de funciones continuas es función continua

8) $\underset{\underset{\text{derivada}}{\uparrow}}{C^{k}}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \{ f:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, \exists\, f^{(k)}, f^{(k)} \text{ contínua} \}$ ← derivadada k-ésima

$f' = f^{(1)}$

$f'' = f^{(2)}$ f Derivada $\Longrightarrow$ f continua

$f''' = f^{(3)}$ $C^{k} < C$

9) $C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ clase C^{∞} $\Longrightarrow$ tiene ∞ derivadas

Poseen cualquier derivada, como $f = e^{x}$, $f = \text{sen}$ ...

10) $\mathcal{F}(\mathbb{N},k) = \{ f \mid f: \mathbb{N} \longrightarrow k$ es función $\}$

$n \longmapsto a_n$

↑ la imagen $\Longrightarrow$ sucesion

$\{a_n\}_{n\geq 0}$ $a_n \in k$

$\{a_n\}_{n\geq 0} + \{b_n\}_{n\geq 0} = \{a_n + b_n\}_{n\geq 0}$

$a \cdot \{a_n\}_{n\geq 0} = \{a a_n\}_{n\geq 0}$

11) $\mathcal{F} \supseteq K$ F contiene al subcuerpo K

↗ c. conmutativo

$+ : F \times F \longrightarrow F$ $\quad\Big\|\quad$ $K \times F \longrightarrow F$

la q tiene como cuerpo $(u,v) \longmapsto u+v$ $\quad\Big\|\quad$ $(\underset{F}{\overset{\cap}{a}}, \underset{F}{\overset{\cap}{u}}) \longmapsto \underset{F}{\overset{\cap}{a \cdot u}}$

$\Longrightarrow$ F K-ev.

31/Oct

Definición V - ev sobre k

Se dice que $X \subseteq V$ es

i) Sistema de geradores si $\forall \; u \in V \;\; \exists \, u_1, \dots, u_m \in X \;\; \exists \, a_1, \dots, a_m \in k$

tal que $u = a_1u_1 + \dots + a_m u_m$ Combinación lineal.

ii) Linealmente independiente si $\forall \; u_1, \dots, u_m \in X \;\; \forall \; a_1, \dots, a_m \in k$

$a_1u_1 + \dots + a_m u_m = 0 \implies a_1 = \dots = a_m = 0$

iii) Base si es sistema de generadores y linealmente independiente

Ejemplo

1) $K^2 = \{(a_1, a_2) : a_1 a_2 \in k\}$

$B_c = \{e_1, e_2\}$ $\qquad e_1 = (1, 0) \qquad e_2 = (0, 1)$

(a_1, a_2) SG $= a_1 e_1 + a e_2$

$(a_1, a_2) = (0, 0) \implies a_1 = a_2 = 0$ LI

2) k^n, $B_c = \{e_1, \dots, e_n\}$

3) $k_n[x]$, $B = \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$

$a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1}$

$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_{n-1} \cdot x^{n-1}$

4) $k[x]$, $B = \{1, x, \dots, x^n, \dots\}$

Proposición

$X \subseteq V$, V-ev sobre k son equivalentes:

i) X es base

ii) X es linealmente independiente (Maximal)

iii) X es SG minimal.

$X = \{a, b\}$

$P(x) = \{\underset{\text{min}}{\emptyset}, \{a\}, \{b\}, \underset{\text{maximal}}{\{a, b\}}\}$

$P(x) \setminus \{\emptyset\} = \{\underbrace{\{a\}, \{b\}}_{\text{minimales}}, \underbrace{\{a, b\}}_{\text{maximal.}}\}$

31/Oct

Demostración i ⇒ ii

X es base ⇒ X es linealmente independiente y suponemos que es SG

Si X no es maximal ⇒ $\exists\ Y \supsetneq X$, Y linealmente independiente

Sea $u \in Y$, $u \notin X \Rightarrow u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$, $a_i \in k$, $u_i \in X$

$$\underset{\neq 0}{\textcircled{1}} \cdot u - a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0$$

$\{u, u_1 \dots u_m\} \subseteq Y$ linealmente independiente

Demostración ii ⇒ i)

X SG $\qquad u \in V \Rightarrow \begin{cases} u \in X \Rightarrow u = 1 \cdot u \\ u \notin X \Rightarrow X \cup \{u\} \supsetneq X \Rightarrow X \cup \{u\} \text{ no } LI \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow \exists\ a, a_1, \dots, a_m \in k$ no todos nulos

$$a u + a_1 u_1 + \dots + a_n u_m = 0 \qquad a \neq 0$$

$$u = -a^{-1} a_1 u_1 - \dots - a^{-1} a_m u_m$$

No hay un sistema LI que no contenga al LI maximal.

Demostración i ⇒ iii

Supongamos $Y \subsetneq X$, Y SG $\Rightarrow \exists\ u \in X$, $u \notin Y \Rightarrow \exists\ a_1, \dots, a_m \in k$

$\exists\ v_1, \dots, V_m \in Y : u = a_1 v_1 + \dots + a_m V_m \Rightarrow \underset{\neq 0}{\textcircled{1}} u - a_1 V_1 - \dots - a_m V_m$,

$\{u, v_1, \dots, V_m\} \subseteq X$ LI

Demostración iii) ⇒ i) ABSURDO

X no LI $\Rightarrow \exists\ u_1, \dots, u_m \in X$, $\exists\ \underset{\neq 0}{a_1}, \dots, a_m \in k$:

$$\underset{\neq 0}{a_1} \cdot u_1 + \dots + a_m u_m = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow u_1 = -a^{-1} a_2 u_2 - \dots - a_1^{-1} a_m u_m \qquad \underbrace{X \setminus \{u_1\}}_{SG\ ?\ *} \subsetneq \underbrace{X}_{\text{minimal } SG}$

* Si es SG porque si quito u_1 es combinación lineal de los demás. Contradicción #.

Definición

$\text{Dim}_K \; V = \# \; B$ (cardinal de B)

dimensión $= \dim_K K^n = n$

$\dim_K K_n[x] = n$

$\dim_K \text{Mat}_{m\times n}(K) = m \cdot n$

3/Nov.

Proposición

Sea V, ev sobre K, son equivalentes

i) V es F.G

ii) V tiene dimensión finita

Observación

Sea $\{u_1, \dots, u_r\}$ l. independienete, y $\{v_1, \dots, v_s\}$ SG $r \leq s$

$r \leq \dim_K V = n$

Proposición

Sea U, ev sobre K, $W < V$, Si es dimensión finita, entonces:

i) W es de dimensión finita y $\dim_K W \leq \dim_K V$

ii) $\dim_K W = \dim_K V \iff W = V$

Demostración

Sea $\{u_1, \dots, u_m\} \subseteq W$ linealmente independiente. Si $\{u_1, \dots, u_m\}$ es l.i maximal, entonces $\{u_1, \dots, u_m\}$ es base de W (dimensión finita)

Si $\{u_1, \dots, u_m\} \subsetneq \{u_1, \dots, u_{m+1}\} \in V$ l.i, $u_{m+1} \in W$, entonces

$m + 1 \leq n = \dim_K V$

B_W base de W $\Rightarrow B_v$ es l.i $\Longrightarrow \underset{\dim_K W}{\overset{\#B_W}{\shortparallel}} \leq \dim_K V$

⇝ dim W = dim W $\quad \# B_W = \# B_V = n$

$B_W = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq W \Longrightarrow B_W$ l.i maximal $\Longrightarrow B_W$ base de V

(si tiene mismo n' vectores $\Rightarrow$ maximal) $\Longrightarrow W = V$

ÖJÖ dim n solo hay un espacio, no hay otro sobre n

3/Nov.

Definición

$$W_1 \quad W_2 \subset V \Rightarrow \begin{cases} W_1 \cap W_2 \\ W_1 + W_2 = \{u_1 + u_2 : u_1 \in W_1 \,,\, u_2 \in W_2\} \end{cases}$$

Proposición

$$W_1 \cap W_2 \,,\; W_1 + W_2 \subset V$$

Demostración

$$u_1 + u_2 \,,\; v_1 + v_2 \in W_1 + W_2 \Rightarrow (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{propiedad} \\ \text{esp. vectorial} \\ \text{suma}}}{=} (u_1 + v_1) + \underset{\substack{\cap \\ W_1 + W_2 .}}{(u_2 + v_2)}$$

$$a \in K \Rightarrow a(u_1 + u_2) = \underset{\substack{\cap \\ W_1}}{au_1} + \underset{\substack{\cap \\ W_2}}{au_2} \in W_1 + W_2$$

Proposición

Sea V ev de dimensión finita , u $\{u_1, \dots, u_r\}$ l.i , $\{v_1, \dots, v_n\}$ base de V.

$\exists \; v_1', \dots, v_{n-r}' \in \{v_1, \dots, v_r\} : \{u_1, \dots u_r, v_1', \dots, v_{n-r}'\}$ base de V

Demostración

Por el lema del intercambio

Teorema Grassmann

dim = 0 ⟺ E V = vector nulo

★ Sean $W_1 , W_2 \subset V$, V dimension finita

$$\dim_K(W_1 + W_2) = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$$

Demostración

Sea $\{u_1, \dots, u_m\} = B_{W_1 \cap W_2}$ $\quad \dim W_1 \cap W_2 = m$

$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \Rightarrow \exists \; \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, \underline{u_r}\} = B_{W_1}$ $\quad \dim W_1 = r$

$W_1 \cap W_2 \subseteq W_2 \Rightarrow \exists \; \{u_1, \dots, u_m, v_{m+1}, \dots, \underline{v_s}\} = B_{W_2}$ $\quad \dim W_2 = s$

$$\dim W_1 + W_2 = r + s - m$$

$$B = \{u_1, \dots u_r, v_{m+1}, \dots, v_s\} \subseteq W_1 + W_2$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ a_1u_1 + \dots + a_n u_m + a_{m+1} u_{m+1} + \dots + a_r u_r}}{W_1} + \underset{\substack{\shortparallel \\ b_1 u_1 + \dots + b_m u_m + b_{m+1} u_{m+1} + \dots + b_s v_s}}{W_2} \subset W_1 + W_2$$

$$W_1+W_2 = \overset{\in K}{(a_1+b_1)}u_1+\dots+\overset{\in K}{(a_m+b_m)}u_m + a_{m+1}u_{n+1}+\dots+a_r u_r + b_{m+1}v_{m+1}+\dots$$

$$+\, b_s v_s$$

$$a_1u_1+\dots+a_m u_r + a_{m+1}v_{m+1}+\dots+a_s v_s = 0 \overset{?}{\Longrightarrow} a_1=\dots=a_r=a_{m+1}=a_s=0$$

$$a_1u_1+\dots+a_r u_r = -a_{m+1}v_{m+1}-\dots-a_s v_s \in W_1\cap W_2$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \shortparallel$$

$$a_1=\dots=a_r=0 \qquad 0=b_1u_1+\dots+b_m u_m \Rightarrow b_1u_1+\dots+b_m u_m + a_{m+1}v_{m+1}+\dots+a_s v_s=0$$

$$\Downarrow$$

$$b_1=\dots=b_m=a_{m+1}=\dots=a_s=0.$$

$$W_1\cap W_2=\{0\} \Rightarrow \dim W_1+W_2 = \dim W_1+\dim W_2$$

Definición (Suma directa)

Sea V un ev, $V=W_1\oplus W_2$ si

i) $V=W_1+W_2$

ii) $W_1\cap W_2=\{0\}$

$K^2 = K\times K = W_1 \otimes W_2$

$W_1 = K\times\{0\}$

$W_2 = \{0\}\times K$

$$\boxed{\dim W_1\oplus W_2 = \dim W_1+\dim W_2}$$

Proposición

Sea $V = W_1\oplus W_2 \Longleftrightarrow \forall\, u\in V\ \exists!\, u_1\in W_1,\ u_2\in W_2 : u=u_1+u_2$

Demostración

"$\Longrightarrow$" $u=u_1+u_2=v_1+v_2 \Rightarrow u_1-v_1=v_2-u_2 \in W_1\cap W_2$

y si la suma es directa $W_1\cap W_2=\{0\}$

$$\Longrightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{u_1-v_1} = \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{v_2-u_2}$$

"$\Longleftarrow$"

$V=W_1+W_2 \qquad u\in W_1\cap W_2 \Rightarrow u=u+0=0+u \Rightarrow u=0$ y $0=u$

3/Nov.

Proposición

$\dim_K V = n$, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base V

$u \in V \Rightarrow \exists\, a_1, \dots, a_n \in K$ tq $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, $u = (a_1, \dots, a_n)_B$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(a_1 - b_1)}u_1 + \dots + \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{(a_n - b_n)}u_n = 0$$

Teorema

$\operatorname{Dim}_K V = n$, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V la aplicación :

$$V \longrightarrow K^n$$

$$u \longmapsto u_B$$

es un isomorfismo (probar que es biyectiva y que lleva a la suma de coordenadas)

$$u \longmapsto (a_1, \dots, a_n)$$

$\Longrightarrow V \simeq K^n$

$V_1 \simeq V_2 \iff \dim_K V_1 = \dim_K V_2$

Ejemplo

$K^n \simeq K^m \iff n = m$

4/Nov.

Repaso - Recuerdo.

$\operatorname{Dim}_K V = n$, $B = \{u_1, \dots, u_m\}$ base de V , $u \in V \Rightarrow \exists!\, a_1, \dots, a_n \in K$ tal que $u = a_1u_1 + \dots + a_nu_n$, $u = (a_1, \dots, a_n)_B$

$$V \longrightarrow K^n$$

$$u \longmapsto (a, \dots, a_n)_B$$

Isomorfismo de K-ev

Proposición

F cuerpo conmutativo finito $\Longrightarrow |F| = p^n$, $p = \chi(F)$ y $n > 0$

$$\dim_K W_1 + W_2 = \dim_K W_1 + \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$$

$$\dim_K W_1 + W_2 - \dim_K W_1 = \dim_K W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$$

$$W_1 / W_1 \cap W_2 \longrightarrow W_1 + W_2 / W_2$$

$$\phi(\bar{w}_1) = \tilde{w}_1$$

$$\bar{w}_1 = \bar{w}_2 \implies w_1 - w_2 \in W_1 \cap W_2 \parallel \tilde{w}_1 = \tilde{w}_2 \text{ , } w_1 - w_2 \in W_2$$

Veamos que es inyectiva y suprayectiva

$$\phi(\bar{w}_1) = \phi(\bar{w}_1')$$

$$\tilde{w}_1 = \tilde{w}_1' \implies w_1 - w_1' \in W_2$$

$$\overset{\cap}{W_1} \qquad \overset{\cap}{W_1} \implies w_1 - w_1' \in W_1 \cap W_2$$

$$\implies \bar{w}_1 = \bar{w}_1'$$

$$\widetilde{w_1 + w_2} = \tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 = \tilde{w}_1 + \tilde{0} = \tilde{w}_1 = \phi(\bar{w}_1)$$

$$\phi(\bar{w}_1 + \bar{w}_1') = \phi(\bar{w}_1) + \phi(\bar{w}_1')$$

$$\phi(a\bar{w}_1) = a\phi(\bar{w}_1)$$

$$\tilde{w} = \tilde{0} \iff w - 0 \in W_2$$

$$\implies W_1 + W_2 / W_2 \simeq W_1 / W_1 \cap W_2$$

6/Nov.

Aplicaciones lineales (pag 89)

Definición Sean V, W k-ev: se dice que $\phi : V \longrightarrow W$ es k-lineal (k-homomorfismo de k-ev) si

1) $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

2) $\phi(au) = a\phi(v)$

Notación

$$\mathrm{Hom}_k(V, W) = \{\phi : \phi \text{ es } k\text{-lineal}\}$$

Propiedades que cumple la aplicación para ser lineal

Proposición

ϕ k-lineal $\Rightarrow \phi(0) = 0, \ \phi(-u) = -\phi(u)$

Proposición

$V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\Psi} U$ $\quad \phi, \Psi$ son k-lineales $\Rightarrow V \xrightarrow{(\Psi \circ \phi)} U$ es k-lineal

Demostración

$$(\Psi \circ \phi)(u+v) = \Psi(\phi(u+v)) = \Psi(\phi u + \phi(v)) = \Psi(\phi(u)) + \Psi(\phi(v)) =$$
$$= (\Psi \circ \phi)(u) + (\Psi \circ \phi)(v)$$

$$(\Psi \circ \phi)(au) = \quad \ldots\ldots \quad = a(\Psi \circ \phi)(u)$$

Proposición identidad

$$\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow V \text{ es } k\text{-lineal}$$
$$u \longmapsto u$$

Proposición $0_V : V \longrightarrow V$ es k-lineal
$$u \longmapsto 0$$

Proposición

$\phi, \Psi : V \longrightarrow W$ k-lineal $\Rightarrow \Psi + \phi$ es k-lineal

$$(\phi + \Psi)(au) = \phi(au) + \Psi(au) = a\phi(u) + a\Psi(u) = a(\phi(u) + \Psi(u)) =$$
$$= a(\phi + \Psi)(u)$$

Proposición

$a \in k, \ \phi : V \longrightarrow W \Longrightarrow a\phi : V \longrightarrow W$ es k-lineal

$\text{Hom}_K(V, W)$ $+, \cdot$ (escalares) K-ev.

$\text{Hom}_K(V, W), +, \cdot$ (escalares) → K-espacio vectorial

$\text{Hom}_K(V, W) \simeq \text{Mat}_{m \times n}(K)$

$\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$

Si consideramos $V = W$

$\text{Hom}_K(V, V) = \text{End}_K(V)$ (endomorfismo)

→ $\text{End}_K(V)$ $+, \circ$ (composición) ⇝ Anillo unitario no conmutativo
en general

$\text{End}_K(V) \simeq \text{Mat}_n(K)$ ⇝ ($\dim_K V = n$)

→ $\text{End}_K(V), +, \cdot$ (escalar) → K-espacio vectorial

$\text{End}_K(V) \simeq \text{Mat}_n(K)$ ⇝ ($\dim_K V = n$)

⇝ $\text{End}_K(V), +, \cdot, \circ$ ⇝ Estructura K-álgebra

Ejemplos

① Supongamos que $W < V$

$$i: W \longrightarrow V \qquad u \longmapsto u$$

K-lineal, inyectiva

K-monomorfismo (K-homomorfismo inyectivo)

② $W \subset V$

$$V \longrightarrow V/W \qquad u \longmapsto \bar{u}$$

K-lineal suprayectiva

K-epimorfismo

③ $V = W \oplus W$

K-lineal sobreyectiva

$$\pi_W : V \longrightarrow W \qquad u \longmapsto w$$

donde $u = w + w'$ ⇝ (única descomposición posible)

$$\pi_W(u+v) = w + \alpha = \pi_W(u) + \pi_W(v)$$

$$\left.\begin{array}{l} u = w + w' \\ v = \alpha + \alpha' \end{array}\right\} \Rightarrow u + v = \underset{\overset{\cap}{W}}{(w+\alpha)} + \underset{\overset{\cap}{W'}}{(w'+\alpha')}$$

$w, \alpha \in W$

$w', \alpha' \in W'$

$$\pi_W(au) = a\,\pi_W(u)$$

$$\pi_W \circ \pi_W = \pi_W$$

6/Nov

Definición Sea $\phi \in Hom_K(V, W)$ se definen

1) $\ker \phi = \{u \in V : \phi(u) = 0\}$ núcleo

2) $Im\ \phi = \{\phi(u) : u \in V\}$ imagen.

Proposición

$Ker\ \phi < 0$, $Img\ \phi < W$

Demostración

Sean $u, v \in \ker \phi \Rightarrow \phi(u) = \phi(v) = 0 \Rightarrow \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v) =$

$= 0 + 0 = 0 \Rightarrow u + v \in \ker \phi$

Ahora veamos , $a \in k$, $u \in \ker \phi \Rightarrow aw \in \ker \phi$

$a \in k$, $\underbrace{w \in Img\ \phi}_{w = \phi(u)} \Rightarrow aw = a\phi(v) = \phi(au) \in Img\ \phi$

Proposición

1) ϕ monomorfismo $\Leftrightarrow \ker \phi = \{0\}$

2) ϕ Epimorfismo $\Leftrightarrow Img\ \phi = W$

Demostración $\boxed{1.}$

"$\Rightarrow$" $u \in \ker \phi \Rightarrow \underset{\phi(u)}{\underset{\|}{0}} = \phi(u) \Rightarrow 0 = u$

"$\Leftarrow$" $\phi(u) = \phi(v) \Rightarrow \underset{\phi(u-v)}{\underset{\|}{\phi(u) - \phi(v)}} = 0 \Rightarrow u - v \in \ker \phi = \{0\}$

$\Rightarrow u - v = 0 \Rightarrow u = v$

Proposición

Sea $\phi \in Hom_K(V, W)$, $\dim_K V = 0$, se verifica que:

1) $Ker\ \phi$, $Im\ \phi$ tienen dimensión finita

2) $\dim_K Ker\ \phi + \dim_K Img\ \phi = n$

Demostración 1)

Sea $\ker \phi < V \Rightarrow \dim_f \ker \phi = k$ finita , entonces $\dim_K \operatorname{Img} \phi = n-$

Elegimos una base del núcleo de ϕ

$\{u_1, \dots, u_k\}$ base de $\ker \phi$

$\{u_1, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n\}$ base de V

¿ $\{\phi(u_{k+1}), \dots, \phi(u_n)\}$ base de $\operatorname{Img} \phi$?

$\omega \in \operatorname{Img} \phi$, $\omega = \phi(u) = (a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n) =$

$= a_1 \underset{\overset{\|}{0}}{\phi(u_1)} + \dots + a_n \underset{\overset{\|}{0}}{\phi(u_k)} + a_{k+1} \phi(u_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n) =$

$= a_{k+1} \phi(u_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n)$ S.G sistema generadores

$0 = a_{k+1} \phi(v_{k+1}) + \dots + a_n \phi(u_n) = \phi(a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n}_{\overset{\|}{a_1 u_1 + \dots + a_k u_k}}$ (xq vale 0) $\in \ker \phi \Rightarrow -a_1 u_1 - \dots - a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots$
$+ a_n u_n = 0 \Longrightarrow a_{k+1} = \dots = a_n = 0$

$$(S) = \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = 0 \\ \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = 0 \end{cases} \quad a_{ij} \in k \iff$$

S.L Homogéneo.

$$\iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\phi_s : k^n \longrightarrow k^m$

$\phi_s(a_1, \dots, a_n) = (\underbrace{a_{11} a_1 + \dots + a_{n1} a_n}_{\overset{\|}{0}}, \dots, \underbrace{a_{m1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n}_{\overset{\|}{0}})$

Φ_s k-lineal

porque sería sol. del núcleo cuya sol es 0.

6/Nov.

Proposición

Sean (S) y ϕ_S un sistema lineal homogéneo y la aplicación K-lineal asociada. Sea $A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(K)$ la "matriz del sistema" Se verifica:

1) $\ker \phi_S$ es el conjunto de soluciones de (S)

2) $\dim_K \ker \phi_S = n - \dim_K \underset{\substack{\| \\ \boxed{\text{rango } A}}}{Img \phi_S}$ $= rg(\phi_S)$ (determinante)

7/Nov.

Repasillo - Recuerdo.

$\phi_S : K^n \longrightarrow K^m$

$\phi_S(a_1, \dots, a_n) = (a_{11}a_1 + \dots + a_{1n}a_n, \dots, a_{m1}a_1 + \dots + a_{mn}a_n)$

$A = (a_{ij}) \in Mat_{m\times n}(K)$, (S); $\underset{m\times n}{A}\underset{n\times 1}{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} = \underset{m\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}$ $Ax^t = 0$

Definición

Sea $\phi \in Hom_K(V, W)$, $A \in Mat_{m\times n}(K)$

1) $rg\, \phi = \dim_K Img\, \phi$ (dimensión e v, de Im => rango)

2) $rg\, A = \dim_K \langle \underbrace{(a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{n1}, \dots, a_{mn})}_{\in K^m} \rangle$

$Im\, \phi_S = \langle \phi(e_1), \dots, \phi(e_n) \rangle = \langle \underset{\in K^m}{(a_{11}, \dots, a_{m1})}, \dots, \underset{\in K^m}{(a_{n1}, \dots, a_{mn})} \rangle$

Ejemplo

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ $m = 2$, $n = 3$ ⇝ rg x columna

$\underset{\substack{\| \\ 0,1,2}}{\dim_K} \langle \underbrace{(1,3), (0,-1), (2,4)}_{\in K^2} \rangle$

$a(1,3) + b(0,-1) = (0,0)$

$a \cdot 1 + b \cdot 0 = 0$, $a = 0$, $a \cdot 3 + b \cdot -1 = 0$ ⇝ $b = 0$

Teorema

$\ker \phi_S$ es el espacio de soluciones del sistema lineal homogéneo S, por tanto el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo S, tiene dimensión $\boxed{n - rg\, A}$.

$$S_b : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{m1} x_n = b_m \end{cases} \qquad \phi_{S_b} : K^n \longrightarrow K^m$$

$$\phi_S (a_1, \dots, a_n) = (a_{11} a_1 + \dots a_{1n} a_n , \dots , a_{m1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n)$$

$$A = (a_{ij}) \in Mat_{m \times n}(K)$$

$$(A | b) = \left(a_{ij} \middle| \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \right) \in Mat_{m \times (n+1)}(K)$$

S_b compatible $\iff (b_1, \dots, b_m) \in Img\, \phi_S \iff (b_1, \dots, b_m) \in \langle (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots$

$\dots, (a_{1n}, \dots, a_{mn}) \rangle \iff \langle (a_{11}, \dots, a_{m1}), \dots, (a_{1n}, \dots a_{mn}), (b_1, \dots, b_m) \rangle =$

$= \langle (a_{11}, \dots, a_n), \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \rangle \iff \dim_K \langle\ \rangle = \dim_K \langle\ \rangle \quad \underset{m \leq n}{W \subset V}$

$W = V \iff m = n \iff \boxed{rg(A|b) = rg A}$

Teorema (de Rucheblundy)

Se verifica:

1) El sistema lineal S_b es compatible $\iff rg(A|b) = rg\, A$

2) Si S_b es compatible $\Rightarrow$ el conjunto de soluciones de S_b es $(a_1, \dots, a_n) + \ker \phi_S$, siendo $(a_1, \dots, a_n)$ alguna solución de S_b

$$S_b = \begin{cases} a_{11} a_n + \dots + a_{1n} a_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} a_1 + \dots + a_{mn} a_n = b_m \end{cases} \quad \Bigg| \quad \overset{(c_1, \dots, c_n)}{\begin{cases} a_{11} c_1 + \dots + a_{1n} c_n = b \\ \\ a_{m1} c_1 + \dots + a_{mn} c_n = b_m \end{cases}}$$

$$\begin{cases} a_{11} (c_1 - a_1) + \dots + a_{1n} (c_n - a_n) = b_1 - b_1 = 0 \\ \vdots \\ a_{m1} (c_1 - a_1) + \dots + a_{mn} (c_n - a_n) = b_m - b_m = 0 \end{cases}$$

$$\underline{(c_1 - a_1, \dots, c_n - a_n) \in \ker \phi_S}$$

7/Nov.

Teoremas de Isomorfía

Sean $W_1, W_2 \subset V \Longrightarrow W_1 + W_2 / W_1 \simeq W_2 / W_1 \cap W_2$

1er Teorema de Isomorfía

Sea $\phi : V \longrightarrow W$ k-lineal, se verifica que $\underbrace{V/\ker\phi}_{\text{conjunto cociente}} \simeq \operatorname{Im}\phi$

Demostración

$\phi : V/_{\ker\phi} \longrightarrow \operatorname{Im}\phi$

$\bar\Phi(\bar u) = \phi(u) \in \operatorname{Im}\phi$

$\bar u = \bar v \Longrightarrow \phi(u) = \phi(v)$

$u - v \in \ker\phi \Longrightarrow \phi(u-v) = 0$

ϕ es k-lineal $\begin{cases} \bar\Phi(\bar u + \bar v) = \bar\Phi(\overline{u+v}) = \phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v) = \bar\Phi(\bar u) + \bar\phi(\bar v) \\ \bar\Phi(a\bar v) = \dots = a\phi(u) = a\bar\Phi(\bar u) \end{cases}$

$\bar\Phi$ sobreyectiva $v \in \operatorname{Im}\phi \Longrightarrow v = \phi(u) = \bar\phi(\bar u) \in \operatorname{Im}\phi$

$\bar\Phi$ inyectiva $\bar u \in \ker\bar\phi \Longrightarrow \bar u = \bar 0$ $u \in \ker\phi$

$\bar\phi(\bar u) = 0 = \phi(u)$

matriz de una aplicación.

11/Nov.

Teorema

Sea $\dim_k V = n$, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V, $\{V_1, \dots, V_n\} \subseteq W$, W-ev.

$\exists$ una única aplicación k-Lineal $\phi : V \longrightarrow W$:

$\phi(v_i) = V_i$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Demostración

Unicidad $\phi, \Psi : V \longrightarrow W$ k-lineal : $\phi(u_i) = \Psi(u_i) = V_i$

para cada $i = 1, \dots, u \Longrightarrow \phi = \Psi$

$u \in V \Longrightarrow u = (a_1, \dots, a_n)_B = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \Longrightarrow \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \phi(\overline{u_i}) =$

$= \sum_{i=1}^{n} a_i \Psi(\overline{u_i}) = \Psi(u)$

#

Existencia Defino $\phi(u) = \sum_{i=1}^{n} a_i \underbrace{v_i}_{\text{imágenes}}$, $u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$

¿ ϕ k-lineal?

¿ $\phi(u_i) = v_i$?

$u_i = (\underset{\substack{\shortparallel \\ a_1}}{0}, \dots, \underset{\substack{\shortparallel \\ a_{i-1}}}{0}, \underset{\substack{\uparrow \\ a_i}}{1}, 0, \dots, 0)_B \Longrightarrow \phi(u_i) = 1 \cdot v_i = v_i$

$+$: $\phi(\underset{\substack{\shortparallel \\ (a_1,\dots,a_n)_B}}{u} + \underset{\substack{\shortparallel \\ (a'_1,\dots,a'_n)_B}}{u'}) = \sum_{i=1}^{n} (a_i + a'_i) v_i = \sum a_i v_i + \sum a'_i v_i = \phi(u) + \phi(u')$

$\cdot$: $\phi(au) = \sum_{i=1}^{n} (a \cdot a_i) v_i = \sum a (a_i v_i) = a \sum a_i v_i = a\phi(u)$.

$\phi : V \longrightarrow W$ k-lineal , $\dim_K V = u$, $\dim_K W = m$

$B_V = \{u_1, \dots, u_n\}$ $B_W = \{v_1, \dots, v_m\}$

$\phi(u_i)_{i=1,\dots,n}$ vectores únicos e imágenes únicas

Entonces las coordenadas serían únicas

$$\phi(u_1) = (a_{i1}, \dots, a_{im})_{B_W} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j$$

$i = 1, \dots, n$

$u \in V$, $u = (x_1, \dots, x_n)_{B_V} = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i \Longrightarrow \phi(u) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ij} v_j =$

$\shortparallel$ vector en W B_W

$(y_1, \dots, y_m)_{B_W}$

$\shortparallel$

$\sum_{j=1}^{m} y_j v_j$

$$= \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} x_i a_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} \right) v_j$$

$\Longrightarrow B_W$ base W $y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{a_{ij}} = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}$ $\forall j = 1, \dots, m$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ \underset{\substack{\uparrow \\ \phi(u_1)}}{a_{m1}} & \cdots & \underset{\substack{\uparrow \\ \phi(u_n)}}{a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Esta matriz es $M_\phi(B_V, B_W)$

11/Nov.

Ejemplo

$$\begin{tikzcd} K^3 \arrow[r] & K^2 \end{tikzcd}$$ En bases canónicas

$B_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ $B_c' = \{(1,0),(0,1)\}$

Es k-lineal

$$\phi(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$$

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

$$M_\phi(B_c, B_c') = \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & (1,0) \\ 1 & 0 & 1 & (0,1) \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \\ \phi(1,0,0) & \phi(0,1,0) & \phi(0,0,1) & \end{array}$$

$$\phi(e_1) = (1, 1)$$

$$\phi(e_2) = (-1, 0)$$

$$\phi(e_3) = (0, 1)$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{B_W} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_{B_V}$$

$$(y_1, y_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$$

Propiedades

$$\phi, \psi : \underset{B_V}{V} \longrightarrow \underset{B_W}{W}$$

- $+$ $(\phi + \psi)(u) \overset{def}{=} \phi(u) + \psi(u)$

$$\Longrightarrow \boxed{M_{\phi+\psi}(B_V, B_W) = M_\phi(B_V, B_W) + M_\psi(B_V, B_W)}$$

- $a\phi$ es k-lineal

$$(a\phi)(u) = a\phi(u) \Longrightarrow \boxed{M_{a\phi}(B_V, B_W) = \textcircled{a} \cdot M_\phi(B_V, B_W)}$$

por todas las coordenadas.

- Composición aplicaciones

$$\begin{tikzcd} \underset{B_V}{V} \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "\psi \circ \phi"'] & \underset{B_W}{W} \arrow[r, "\psi"] & \underset{B_U}{U} \end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow M_{\psi\circ\phi}(B_V, B_U) =$$

$$\psi(\phi(u))$$

$$= M_\psi(B_W, B_U) \cdot M_\phi(B_V, B_W)$$

Ejemplo anterior.

$$K^3 \longrightarrow K^2$$

$$\phi(x_1, x_2, x_3) \longmapsto (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$$

$\phi(e_1) = (1,1) = v_1$

$\phi(e_2) = (-1,0) = v_2$

$\phi(e_3) = (0,1)$

$\{v_1, v_2\}$ Base K^2

$$\overset{\shortparallel}{\{(1,1),(-1,0)\}} = B'$$

$av_1 + bv_2 = (0,0) \Rightarrow a = b = 0$

son L.I $\Rightarrow$ son Base

$$M_\phi(B_c, B') = \begin{array}{ccc|c} \left(\begin{matrix} 1^a & 0^a & 1^a \\ 0^b & 1^b & 1^b \end{matrix}\right) & & & \begin{matrix} (1,1) \\ (-1,0) \end{matrix} \\ \phi(e_1) \quad \phi(e_2) \quad \phi(e_3) & & & \end{array}$$

Esta matriz es escalonada

$\phi(e_1) = (1,1) = av_1 + bv_2 \rightsquigarrow a = 1, b = 0$

$\phi(e_2) = (-1,0) = av_1 + bv_2 \rightsquigarrow a = 0, b = 1$

$\phi(e)\ (0,1) = av_1 + bv_2 \rightsquigarrow a = 1, b = 1$

Ejemplo

$M_{id}(B,B) = I_n \qquad n = \dim_K V$

Ejemplo

$0 : V \longrightarrow W$

$0(u) = 0$

$M_0(B_V, B_W) = 0 \in Mat_{m \times n}(K)$

Ejemplo

$$\underset{B}{V} \longrightarrow \underset{B'}{V}$$

$M_{id}(B, B') = (a_{ij}) \in Mat_n(K)$

$u \in V, \quad u = (x_1, \dots, x_n)_B = (x'_1, \dots, x'_n)_{B'}$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \underbrace{(a_{ij})}_{\text{matriz cambio coordenadas}} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$= M(B, B')$ matriz de paso

11 / Nov

Continuación Ejemplo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id} & V_{B} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V_{B'} \arrow[r, "\mathrm{id}"] & V_{B} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{I_n = M(B', B)\, M(B, B')}$$

Es decir la matriz de paso de una matriz es la inversa (son inversas)

17 / Nov.

Espacio Dual.

Proposición

Sea $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$ y B_V, B_W las bases de V y W la aplicación:

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_K(V, W) &\longrightarrow \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \simeq K^{m\cdot n} \\ \phi &\longmapsto M_\phi(B_V, B_W) \end{aligned}$$

es un K-isomorfismo.

Demostración

Sabemos $M_{\phi+\psi}(B_V, B_W) = M_\phi(B_V, B_W) + M_\psi(B_V, B_W)$

$$M_{a\phi}(B_V, B_W) = a\, M_\psi(B_V, B_W) \Rightarrow \forall u \in B_V, \phi(u) = \psi(u) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi(u) = \phi(u) \quad \forall u \in V$$

$$\Downarrow$$

$$\phi = \psi$$

$$(a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \in \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \overset{?}{\Longrightarrow} \exists\, \phi \in V \longrightarrow W :$$

$$\phi(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} v_j \quad , \quad B_W = \{v_1, \dots, v_m\}, \quad B_V = \{u_1, \dots, u_n\}$$

Proposición

$$\mathrm{Hom}_K(V, W) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \simeq K^{mn}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Hom}_K(K, W) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) \simeq K^m \simeq W$$

$\dim_K K = n = 1$ $\dim W = m$

En este caso es el isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_K(K, W) \simeq W$$

$$\phi(u) \longleftarrow\!\shortmid\; u$$

$$\phi(u)(a) = a \cdot u$$

$\Phi(u) \in \mathrm{Hom}_K(K,W)$

Es aplic. Lineal.

$$\begin{cases} \phi(u)(a+b) \overset{?}{=} \phi(u)(a) + \psi(u)(b) \iff (a+b)u \overset{?}{=} au+bu \\ \phi(u)(ba) \overset{?}{=} [b\phi(u)](a) \iff (bu)u \overset{?}{=} b(\phi(u)(a)) = b(au) \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "\tau"] & \mathrm{Hom}_K(K,W) \\ u \arrow[r, mapsto] & \phi(u) \end{tikzcd}$$

$\tau(u+v) \overset{?}{=} \tau(u)+\tau(v) \iff \phi(u+v) \overset{?}{=} \phi(u)+\phi(v) \iff$

$\iff \underset{\substack{\| \\ a(u+v)}}{\phi(u+v)(a)} \overset{?}{=} (\phi(u)+\phi(v))(a) = \underset{\substack{\| \\ au+av}}{\phi(u)(a)+\phi(v)(a)}$

$\tau(au) \overset{?}{=} a\tau(u) \iff \phi(au) \overset{?}{=} a\phi(u) \iff$

$\iff \phi(au)(b) \overset{?}{=} (a\phi(u))(b) = a(\phi(u)(b) \iff b(au)=a($

Ya hemos demostrado que es ap. Lineal, ahora veamos que es una biyección

τ biyectiva

τ inyectiva, $\ker\tau \overset{?}{=} \{0_W\}$

$\tau(u) = 0_{K\to W} \implies \forall a \in K \quad \underset{\substack{\| \\ \phi(u)(a) = au}}{\tau(u)(a)} = 0$

$\xRightarrow{a=1_K} 1_K \cdot u = 0 \implies u=0.$

$\mathrm{Hom}_K(V,K) \simeq \mathrm{Mat}_{1\times n}(K) \simeq K^n \simeq V$

$m=1$
$\dim V = n$

$\mathrm{Hom}_K(V,K) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{no es} \\ \text{canónico}}}{\simeq} V \quad (\dim_K V \text{ finita})$

No se ha encontrado y un $\mathrm{Hom}_K(V,K)$ Biyectiva Isomorfismo y canónico

17/Nov.

Definición

$V^* = \underbrace{Hom_K(V, K)}_{\text{formas K lineales de V}}$ Espacio Dual.

Observación

$V^* \underset{=}{\sim} V$ (isomorfo a V) si $dim_K V$ finita

$B = \{u_1, \dots, u_m\}$ base V $\qquad u_i^* \in V^* \overset{?}{\iff} u_i^*(u_j) \quad \forall j = 1, \dots, n$

$$u_i^*(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \ i = j \\ 0 & si \ i \neq j \end{cases} \Longrightarrow$$ obtenemos base dual $B^* = \{u_1^*, \dots, u_n^*\}$ base V^*

Demostración

$dim_K V^* = dim_K V = n$

$a_1 u_1^* + \dots + a_n u_n^* = 0 \quad a_i \in K \Rightarrow (a_1 u_1^* + \dots + a_n u_n^*)(u_j) = 0(u_j) = 0 \quad \forall j$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i u_i^*\right)(u_j) = \sum_{i=1}^n a_i u_i^*(u_j) = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{ij} = a_i \cdot \delta_{jj} = a_j$$

Ejemplo.

$\mathbb{R}^2 \quad \underset{\{\underset{e_1}{(1,0)}, \underset{e_2}{(0,1)}\}}{\underset{\shortparallel}{B_c}}, B = \{\overset{u_1}{\overset{\shortparallel}{(1,1)}}, \overset{u_2}{\overset{\shortparallel}{(1,2)}}\}$ Base $\mathbb{R}^2$

$B^* = \{u_1^*, u_2^*\}$

$u_1^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad u_1^*(u_1) = 1 \quad u_1^*(1,1) = 1$

$u_1^*(u_2) = 0 \quad u_1^*(1,2) = 0$

sobre B_c

$u_1^*(e_2) = u_1^*((1,2) - (1,1)) = 0 - 1 = -1$

$u_1^*(e_1) = u_1^*(2(1,1) - (1,2)) = 2 \cdot 1 - 0 = 2$ //

$u_1^*(x, y) = 2x - y$

$u_2^* : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad : \quad u_2^*(u_1) = 0 \quad u_2^*(1,1) = 0$

$u_2^*(u_2) = 1 \quad u_2^*(1,2) = 1$

$u_2^*(e_1) = u_2^*(($

$u_2^*(e_2) = u_2^*(($

¿hacerlo?

$u_2^*(x, y) =$

öjö

$$\underset{\in B}{u} \in V \not\Longrightarrow \underset{\underset{V}{\cap}}{u^*} \in V^*$$

$$B = \{(\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{1,0}), (0,1)\} \Longrightarrow u^*$$

$$\nparallel \qquad\qquad V^* \neq \{u^* : u \in V\}$$

$$B' = \{(\underset{\underset{u}{\shortparallel}}{1,0}), (1,1)\} \Longrightarrow u^*$$

Sea $\omega \in V^*$, $\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*$

$$\forall j \ , \ \omega(u_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*\right)(u_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i^*(u_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ij} = a_{ij}$$

$$\boxed{\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega(u_i) u_i^*}$$

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i$$

$$u_j^*(u) = u_j^*\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i u_j^*(u_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_{ji} = a_j$$

$$\Longrightarrow u = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i = \sum_{i=1}^{n} u_i^*(u)(u_i)$$

$u, v, w \ \dots \in V$

$w, \alpha, \quad V^*$

18/Nov

Proposición

$V^* = Hom_K(V, K)$ $dim_K V$ finita $\Longrightarrow V \simeq V^*$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] & W \arrow[d, "w"] \arrow[r, Rightarrow, "?"] & W^* \arrow[r, "\phi^*"] & V^* \\ & K & & \end{tikzcd}$$

$$\phi \in Hom_K(V, W) \Rightarrow \phi^* \in Hom(W^*, V^*)$$

Definición

$\phi^*(w) = w \circ \phi \in V^*$ $\qquad w \in W^*$

Propiedades

i) $(id_V)^* = id_{V^*}$

ii) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$

Demostración

$$(\psi \circ \phi)^*(w) = w \circ (\psi \circ \phi) = (w \circ \psi) \circ \phi = \phi^*(w \circ \psi) =$$
$$= \phi^*(\psi^*(w)) = (\phi^* \circ \psi^*)(w)$$

Proposición

Sea $Dim_K V = n$, $dim_K W = m$ y B_V y B_W base de V y W, respecto $\phi \in Hom_K(V, W)$, $\phi^* \in Hom_K$, $\phi^* \in Hom_K(W^*, V^*)$.

Se verifica que $\underbrace{M\phi^*(B^*_W, B^*_V)}_{\phi^*} = Mat\,\phi(B_V, B_W)^t$

Demostración

$B_V = \{u_1, \dots, u_m\}$ $\qquad \phi^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^* \Longrightarrow [\phi^*(v_i^*)](u_k) =$

$B_W = \{v_1, \dots, v_m\}$ $\qquad = \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^*\right)(u_k)$

$$\Longrightarrow (v_i^* \circ \phi)(u_k) = \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j^*(u_k) = a_{ik}$$
$$\parallel$$
$$v_i^*(\phi(u_k))$$
$$\parallel$$
$$v_i^*\left(\sum_{j=1}^m b_{kj} v_j\right) = \sum_{j=1}^m b_{kj} v_i^*(v_j) = b_{ki}$$

$\dim_k V$ finita $\Longrightarrow V \simeq V^* \simeq V^{**}$ no hay isomorfismo canónico

Principio dualidad (dual sobre dual)

$$V^{**} = (V^*)^* = \text{Hom}_k(V^*, k) = \text{Hom}_k(\text{Hom}_k(V, k), k)$$

Proposición

Si V es de dimensión finita, entonces la aplicación

$\eta : V \longrightarrow V^{**}$ dada por

$[\eta(u)](w) = w(u)$ para cada $u \in V$, $w \in V^*$, es un k-isomorfismo de ev.

Demostración

i) $\eta(u_1+u_2) = \eta(u_1) + \eta(u_2)$,, $\forall\, w \in V^*$

$$[\eta(u_1+u_2)](w) \overset{?}{=} [\eta(u_1) + \eta(u_2)](w$$

$w(u_1+u_2) = w(u_1) + w(u_2)$ $=$ $\eta(u_1)(w) + \eta(u_2)(w)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\; \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad w(u_1) + w(u_2)$ ✓

η conserva la suma

ii) $\eta(au) = a\eta(u)$

$$\eta(au)(w) \overset{?}{=} [a\eta(u)](w)$$

$w(au)$ $\qquad\qquad\qquad a[n(u)(w)]$

$\;\;\|\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \|$

$aw(u)$ $=$ $aw(u)$ # ✓

i) ii) $\Longrightarrow \eta$ es k-lineal.

Continuación demostraciones

18/Nov

iii) η inyectiva $\xRightarrow[\dim V = \dim V^{**}]{}$ η biyectiva finita

$$u \in \operatorname{Ker} \eta \Rightarrow \eta(u) = 0 \Rightarrow \eta(u)\overset{\overset{w(u)}{\parallel}}{(w)} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} u = 0$$

$u \in V$. $\qquad w \in V^*$

Por reducción al absurdo

Supongamos $n \neq 0$

$B = \{\underset{\overset{\neq}{0}}{u_1}, \dots, u_n\}$: base de V

$B^* = \{u^*_1, u^*_2, \dots, u^*_n\}$ base dual en V^*

$w = u^*1$

$0 = u^*_1(u) = u^*(u_1) = 1$

Vamos a ver que todos los elementos del núcleo son cero, tendríamos que llegar a que $w = u^*1$ es igual a cero pero es 1 por lo que hay una contradicción

Definición corchete canónico

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \longrightarrow k,$$

$$\langle u, w\rangle \overset{def}{=} w(u) = \eta(u)(w) \quad , u \in V, w \in V^*$$

Proposición /Propiedades

Se verifican

$\langle\ ,\ \rangle$ es un k-forma k-forma bilineal

i) $\langle u_1 + u_2, w\rangle = \langle u_1, w\rangle + \langle u_2, w\rangle$

ii) $\langle a u_1, w\rangle = a\langle u, w\rangle$

iii) $\langle u, w_1 + w_2\rangle = \langle u\ w_1\rangle + \langle u, w_2\rangle$

iv) $\langle u, a w\rangle = a\langle u, w\rangle$

Demostración propiedad iii)

$$\langle u, w_1 + w_2 \rangle = (w_1 + w_2)(u) = w_1(u) + w_2(u) = \langle u, w_1 \rangle + \langle u, w'_2 \rangle$$

Definición (Espacio ortogonal)

$$W \subset V \Longrightarrow W^{\perp} \text{ (ortogonal)} = \{ w \in V^* : \underset{w(u)}{\langle u, w \rangle} = 0 \quad \forall u \in W \} =$$

$$= \{ w \in V^* : w(u) = 0 \ \forall u \in W \} \subseteq V^*$$

Ejemplos

i) $0^{\perp} = \{ w \in V^* : w(0) = 0 \} = V^*$

ii) $V^{\perp} = \{ w \in V^* : w(u) = 0 \ \ \forall u \in V \} = \{0\}$

iii) $W_1 \subseteq W_2 \Longrightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

Demostración

$$\omega \in W_2^{\perp} \Rightarrow \omega(u) = 0 \quad \forall u \in W_2 \Longrightarrow \omega(u) = 0 \ \forall u \in W_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u \in W_1^{\perp}$$

Recuerdo otro día

20/Nov.

$\eta_V : V \longrightarrow V^{**}$ isomorfismo, $\langle \ , \ \rangle : V \times V^* \longrightarrow k$ k - lineal

$\eta_V(u)(\omega) = \omega(u) = \langle u, w \rangle$

$u \in V, \ \omega \in k^*$

Ejemplos

iv) $V < V \Longrightarrow W^{\perp} < V^*$

Demostración

$$w_1, w_2 \in W^{\perp} \Rightarrow \forall u \in W, \ \langle u, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, w_1 \rangle + \langle u, w_2 \rangle =$$

$$= 0 + 0 = 0 \Longrightarrow \omega_1 + \omega_2 \in W^{\perp}$$

$$a \in k, \ \omega \in W^{\perp} \Longrightarrow \forall u \in W, \ \ \langle u, aw \rangle = a \langle u, w \rangle = a \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow a\omega \in W^{\perp}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Sub}(V) &\longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*) \\ W &\longmapsto W^{\perp} \end{aligned}$$

$\eta_V(W), \ W^{\perp\perp} < V^{**}$

20/Nov.

Ejemplos

v) $\eta_V(W),\ W^{\perp\perp} < V^{**}$

$$\eta_V(W) = W^{\perp\perp} = (W^\perp)^\perp$$

Demostración

"$\subseteq$" $\quad u \in W, \quad w \in W^\perp \Longrightarrow \eta_V(u) \in (W^\perp)^\perp$

$$0 \overset{?}{=} \langle w, \eta_V(u) \rangle = \eta_V(u)(w) = \langle u, w \rangle = 0$$

$u \in W$
$w \in W^\perp$

"$\supseteq$" $\quad \underset{\substack{\| \\ \eta_V(u)}}{\Omega} \in W^{\perp\perp} < V^{**} = \eta_V(V)$

$\eta_V(u)$, $w \in V$

¿$u \in W$?

Supongamos que $u \in W \Longrightarrow u \neq 0 \Longrightarrow B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ base V

$B^* = \{u_1^*, u_2^*, \ldots, u_n^*\}$ base V^*, $W = u_1^* \in V^*$

¿$u \in W$? $\forall\, w \in W^\perp \Longrightarrow 0 = \langle w, \Omega \rangle = \langle w, \eta_V(u) \rangle$

$\| \quad \eta_V(u)(w) = W(u)$

¿$W^{\perp\perp} \subseteq \eta_V(W)$?

$$\Omega \in W^{\perp\perp} < V^{**} = \eta_V(V) \Longrightarrow \Omega = \eta_V(u),\ u \in V$$

$u \notin W \Longrightarrow u \neq 0 \Longrightarrow \{\underset{\substack{\| \\ u}}{u_1}, \underbrace{\ldots, u_n}_{u_{n-m+1}, \ldots, u_n}\} = B$ base V, B^* de V^*

$u \in W = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$ Base

$\{u, v_1, \ldots, v_m\}$ LI.

$$0 = \langle w, \Omega \rangle = \langle w, \eta_V(u) \rangle = \eta_V(u)(w) \overset{w = u_1^*}{=} u_1^*(u) =$$

$$= u_1^*(u_1) = 1 \quad \forall\, w \in W^\perp$$

$u_1^* \in W^\perp \Longleftrightarrow \langle v, u_1^* \rangle = 0 \quad \forall\, v \in W$

$\| \quad u_1^*(v)$

$$u_1^*(u_{n-m+1}) = \ldots = u_1^*(u_n) = 0$$

$\| \quad \delta_{1j} = 0$

Teorema de la dualidad

Sea $\dim_K V = n$, la aplicación :

$$(\circ)^{\perp} : \mathrm{Sub}(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*)$$

$$W \longmapsto W^{\perp}$$

es biyectiva.

Demostración

$$W_1^{\perp} = W_2^{\perp} \Longrightarrow W_1^{\perp\perp} = W_2^{\perp\perp} \Rightarrow \eta_V(W_1) = \eta_V(W_2)$$

$$\Rightarrow W_1 = W_2$$

$$H < V^* \Longrightarrow H^{\perp} < V^{**} \overset{\eta_V}{\simeq} V \Longrightarrow H^{\perp} = \eta_V(W)$$

$$= W^{\perp\perp} \Longrightarrow H = W^{\perp}$$

Proposición

$$\dim_K V = n \ , \ W < V \ , \ \dim_K W = m \Longrightarrow \dim_K W^{\perp} = n - m =$$

$$= \mathrm{codim}_K W$$

Demostración

$$B = \{ \underbrace{u_1, \dots, u_m}_{B_W}, u_{m+1}, \dots, u_n \} \text{ Base de } V,,$$

B^* base V^* ¿ $\{ u^*_{m+1}, \dots, u_n^* \}$ base de $W^{\perp}$

$$j = m+1, \dots, n \Longrightarrow u_j^*(u_i) = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, m$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{u^*_{m+1}, \dots, u_n^*}_{LI} \in W^{\perp}$$

$$\omega \in W^{\perp} \Longrightarrow \omega = \omega(u_1)u^*_1 + \dots + w(u_m)$$

$$w \in W^{\perp} \Rightarrow w(u_1) = \langle u_1, w \rangle = 0, \dots, W(u_m) = \langle u_m, W \rangle = 0$$

$$\omega = \underbrace{\underbrace{W(u_1)}_{0} u_1^* + \dots + \underbrace{w(u_m)}_{0} u^*_m}_{0} + w(u_{m+1})u^*_{m+1} + \dots + W(u_n)u_n^*$$

$\{ u^*_{m+1}, \dots, u^*_n \}$ SG de $W^{\perp}$

20/Nov

Proposición

1) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

Demostración

$$W_1 , W_2 \subseteq W_1 + W_2 \Rightarrow (W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} , W_2^{\perp} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$$

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 , W_2 \Rightarrow W_1^{\perp} , W_2^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp}$$

$$\Rightarrow W_1^{\perp} + W_2^{\perp} \subseteq (W_1 \cap W_2)^{\perp} \Rightarrow (W_1 + W_2)^{\perp} \subseteq W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$$

#

2) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

Demostración

$$w \in W^{\perp} \Rightarrow \eta_v (W_1 \cap W_2) = (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} \subseteq (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} \subseteq$$

$$\subseteq W_1^{\perp\perp} \cap W_2^{\perp\perp} = \eta_v (W_1) \cap \eta_v (W_2)$$

$$\Rightarrow \eta_v (W_1 \cap W_2) = \eta_v (W_1) \cap \eta_v (W_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp\perp} = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp}$$

$$\Rightarrow (W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$$

#

3) $V = W_1 \oplus W_2 \Longrightarrow V^{*} = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$

21/Nov.

Ejemplo

Sean $W_1, W_2 < k^3$ planos distintos, $W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1^\perp \neq W_2^\perp$, son rectas de $(k^3)^*$

$$(k^3)^* \simeq k^3 \Longrightarrow \underset{(W_1 \cap W_2)^\perp}{\underset{\shortparallel}{W_1^\perp + W_2^\perp}} \Longrightarrow W_1 \cap W_2 \subseteq k^3 \text{, rectas}$$

Ec. paramétricas.

$\dim_k V = n$, $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V $\quad u = (x_1, \dots, x_n)_B = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$

$W < V$, $\dim_k W = m \leq n$, $B_W = \{v_1, \dots, v_m\}$ base de W

$v_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})_B = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} u_i \quad a_{ji} \in k$

$$u \in W \iff u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m,\ \lambda_i \in k \iff \begin{cases} x_1 = \lambda_1 a_{11} + \dots + \lambda_m a_{m1} \\ \vdots \\ x_n = \lambda_1 a_{1n} + \dots + \lambda_m a_{mn} \end{cases}$$

m es el nº parámetros = dimensión

Ec. cartesianas

$\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\} = B'$ base de V

$\dim W^\perp = n - \dim W$, $\{v^*_{m+1}, \dots, v_n^*\}$ base de $W^\perp$

$$\forall u \in W \begin{cases} v^*_{m+1}(u) = 0 \\ \vdots \\ v^*_n(u) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \forall u \in W \ (*)$$

$$(*) \begin{cases} 0 = v^*_{m+1}(u) = v^*_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_j u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{v^*_{m+1}(u_i)}_{b_{m+1\,i} \in K} \\ \vdots \\ 0 = v^*_n(u) = v^*_n\left(\sum_{i=1}^{n} x_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \underbrace{v_n^*(u_i)}_{b_{ni} \in K} \end{cases}$$

Nº Ecuaciones cartesianas es $n - m$ ec. independientes

21/Nov

Definición

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] & W \arrow[r, phantom, "\Longrightarrow"] & W^* \arrow[r, "\phi^*"] & V^* \\ & & \omega \arrow[r, mapsto] & \phi^*(\omega) = \omega \circ \phi \end{tikzcd}$$

$$M_{\phi^*}(B_{W^*}, B_{V^*}) = \underbrace{\underbrace{M_\psi(B_V, B_W)}_{A}{}^t}_{A^t}$$

$rg\, A = \dim_K \operatorname{Im} \phi$

$rg\, A^t = \dim_K \operatorname{Im} \phi^*$

Proposición

1) $\ker \phi^* = (\operatorname{Im} \phi)^\perp \in \text{sub } W^*$

Demostración

$\omega \in \ker \phi^* \Longrightarrow \phi^*(\omega) = \omega \circ \phi \Longleftrightarrow \forall u \in V,\ 0 = (\omega \circ \phi)(u) =$

$= \langle \phi(u), \omega \rangle \Longleftrightarrow \omega \in (\operatorname{Im} \phi)^\perp$

2) $\operatorname{Im} \phi^* = (\ker \phi)^\perp \in \text{sub } V^*$

Demostración

$\omega \in \operatorname{Im} \phi^* \Longrightarrow \omega = \underset{\alpha \circ \phi}{\underset{\|}{\phi^*(\alpha)}},\ \alpha \in W^*$

Sea $u \in \ker \phi$ ¿$\langle u, \omega \rangle = 0$?

$\langle u, \omega \rangle = \langle u, \alpha \circ \phi \rangle = (\alpha \circ \phi)(u) = \alpha(\phi(u)) = \alpha(0) = 0$

"$\subseteq$"

$\underline{\dim_K \operatorname{Im} \phi^*} = \dim_K W^* - \dim_K \ker \phi^* = \dim_K W - \dim_K (\operatorname{Im} \phi)^\perp =$

$= \dim_K W - (\dim_K W - \dim_K \operatorname{Im} \phi) = \underline{\dim_K \operatorname{Im} \phi} = \dim_K V^* - \dim_K \ker \phi =$

$= \dim_K (\ker \phi)^\perp = \dim_K \operatorname{Im} \phi^*$

24/NOV

Ejemplo. ejercicio 3 Hoja 3 (continuación)

c) $D : k[x] \longrightarrow k[x]$

$$\text{Ker } D = \begin{cases} k = \langle 1 \rangle & \text{si } \chi(k) = 0 \\ k[x^p] & \text{si } \chi(k) = p \end{cases}$$

$$\text{Im } D = \langle D(1), D(x), \dots, D(x^n), \dots \rangle = \langle 0, 1, 2x, \dots, nx^{n-1}, \dots \rangle =$$

$$= \begin{cases} k[x] & \chi(k) = 0 \\ = \langle \{x^i : px^{n+i}\} \rangle \end{cases}$$

$0 \neq x^i \in \text{Im} D$

$\Longleftrightarrow (1+i)x^i \neq 0$

$p = \chi(k)$

Teoría

$$\chi(k) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} D \text{ epimorfismo} \\ D \text{ no inyectiva} \end{cases}$$

d) $D : k_n[x] \longrightarrow k_{n-1}[x]$ ¿k-lineal?

dim $= n$ $\mathcal{B}\{1, x, \dots, x^{n-1}\}$ dim $= n-1$ $\mathcal{B}\{1, x, \dots, x^{n-2}\}$

$D(p+q) = D(p) + D(q)$ $D(ap) = aD(p)$

$$\underset{\underset{k_n[x]}{\cap}}{p = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i} \Longrightarrow D(p) = \sum_{i=0}^{n-1} i a_i x^{i-1} = \underset{\underset{k_{n-1}[x]}{\cap}}{\sum_{j=0}^{n-2} b_j x^j}$$

Para ser epimorfismo tiene que suceder:

$$D \text{ epimorfismo} \Longleftrightarrow \langle \underset{\underset{0}{\parallel}}{D(1)}, \underset{\underset{1}{\parallel}}{D(x)}, \dots, \underset{\underset{(n-1)x^{n-2}}{\parallel}}{D(x^{n-1})} \rangle = k_{n-1}[x]$$

$\{1, 2x, 3x^2, \dots, (n-1)x^{n-2}\}$

$$\Longleftrightarrow x^2 \in \langle 0, 1, \dots, (n-1)x^{n-2} \rangle \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \quad \overset{\chi(k) = p.}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow p \, X_i \quad \forall i = 1, \dots, n-2 \Longleftrightarrow p \, \chi \, (n-2)!$$

$$D \text{ epimorfismo} \Longleftrightarrow \chi(k) = 0$$

Continuación ejercicio 3

24/Nov

$D : K_6[x] \longrightarrow K_5[x] \qquad K = \mathbb{F}_4 \qquad x^4 - x$

$B_6 = \{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5\} \qquad \chi(\mathbb{F}_4) = 2$

$B_5 = \{1, x, x^2, x^3, x^4\}$

¿$rg(D)$?

$$M_D(B_6, B_5) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{Im} D = \langle 1, x^2, x^4 \rangle$$

$rg(D) = \dim_{\mathbb{F}_4} \operatorname{Im} D = 3$

$D(x^2) = 2x = 0$

$D(x^3) = 3x^2 = x^2$

$$M_D(B_6', B_5') = \begin{array}{ccc|ccc|c} D(p'_0) & & & & & D(p'_5) & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_0 = 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_1 = x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & q'_2 = x^4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_3 = x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & q'_4 = x^3 \end{array}$$

$p'_0 = x \qquad q'_0 = 1$

$p'_1 = x^3$

$p'_2 = x^5$

$p'_3 = 1$

$p'_4 = x^2$

$p'_5 = x^4$

Clasificación del endomorfismos

$\phi \in \text{End}_K(V) \quad \dim_K V = n$

$\phi_i \quad V \longrightarrow V$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \phi(u_1) = a_{11}u_1 + u_{21}u_2 + \dots + u_{n1}u_n \\ \vdots \\ \phi(u_n) = a_{1n}u_1 + \dots + a_{nn}u_n \end{array}$$

$B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$ base de V

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "\phi"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B'}{V} \end{tikzcd}$$

$$M_\phi(B') = \underset{\underset{M(B',B)^{-1}}{\parallel}}{M(B,B')}\ \overset{A}{\overset{\shortparallel}{M_\phi(B)}}\ M_{id}(B',B) = P^{-1}AP$$

$P = M(B'B) \in GL_n(k)$

Definición

$A, A' \in Mat_n(k)$, A y A' son semejantes si $A' = P^{-1}AP \quad P \in GL_n(k)$

Observación

La semejanza de matriz es una relación de equivalencia

$A = I_n^{-1} A I$

$$A' = P^{-1}AP \Rightarrow \underset{\underset{(P^{-1})^{-1}A'P^{-1}}{\parallel}}{PA'P^{-1}} = A$$

$A' = P^{-1}AP$

$A'' = Q^{-1}A'Q$

A'' semejante A

$A' = QAP$

$$A \in Mat_n(k) \Longrightarrow A \sim \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} r = rg\,A \\ n+1 = \dim \end{array}$$

24/Nov.

Continuación observación

$a \in k$

$$\phi_a(u) = au \quad \forall u \in V \qquad \phi_a(u_i) = au_i$$

$$\phi_a(u_1) = a_{11}u_1 + \dots + a_n u_n$$

$$\phi_a \in \mathrm{End}_k(V)$$

Jessi/Esther

$$B = \{u_1, \dots, u_n\} \Rightarrow M_{\phi_a}(B) = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ & a & \\ 0 & \ddots & a \end{pmatrix} = \boxed{a I_n + \dots + a_{nn} U_n}$$

Observación

Sea k un cuerpo conmutativo $\Rightarrow \underbrace{k[x]}_{\text{función racional}}$ d.i $\Rightarrow k(x) = \left\{ \frac{g}{h} : g, h \in k[x] \right\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{g}{h} + \frac{g'}{h'} = \frac{gh' + g'h}{hh'} \\[2ex] \frac{g}{h} \cdot \frac{g'}{h} = \frac{g \cdot g'}{hh'} \\[2ex] k(x), +, \cdot \quad \text{es cuerpo conmutativo}, \; k[x] \subseteq k(x] \end{array} \right.$$

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$g \longmapsto \frac{g}{h} = \frac{gh}{h}$$

Definición

$A \in \mathrm{Mat}_n(k)$

$$P_A = |A - xI_n| = \underbrace{\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - x \end{vmatrix}}_{\in \mathrm{Mat}_{n \times n}(k[x])} \in k[x]$$

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_A = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ 1 & -x & 1 \\ 0 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 1 + x$$

$$A' = P^{-1}AP \Rightarrow P_{A'} = |A' - xI_n| = |P^{-1}AP - P^{-1}xI_nP|$$

$$B\begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x \end{pmatrix}B$$

$$= |P^{-1}(A - xI_n)P| = |P^{-1}||A - xI_n||P| = |P^{-1}|P_A|P| = P_A.$$

Definición

Polinomio característico, polinomio ϕ es $P_\phi = P_A$, donde $A = M_\phi(B)$

Repasillo

25/Nov.

$$P_\phi = P_A = |A - xI_n|$$

$$A = M_\phi(B) \qquad \phi \in \mathrm{End}_K(V), \quad n = \dim_K V$$

Proposición

i) $P_\phi \in K[x]$

ii) Grado $P_\phi = n$

iii) $P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} t(\phi)\, x^{n-1} + \dots + \det(\phi)$

donde $t(\phi) = t(A)$, traza de A ; $\det(\phi) = |A|$, $A = M_\phi(B)$

Demostración

$$A' = M_\phi(B') \Longrightarrow A' = P^{-1}AP, \quad P = M(B', B) \Longrightarrow |A'| = |P|^{-1}|A||P| = |A|$$

$$\Longrightarrow t(A') = t(A)$$

Demo i)

$$A - xI_n \in M_n(K[x]), \quad b_{ij} \in K[x] \Longrightarrow P_\phi \in K[x]$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}-x & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-x \end{pmatrix} = (b_{ij})$$

$\boxed{n!}$ ✳

Demostración ii)

$$P_\phi = (a_{11}-x) \dots (a_{nn}-x) + \text{términos de menor grado} \rightsquigarrow n! - 1$$

$$\| \qquad (-1)^n x^n + \text{término de menor grado}$$

$$(-x)^{n-1}a_{11} + (-x)^{n-1}a_{22} + \dots + (-x)^{n-1}(a_{nn})$$ ✳

Demostración iii)

$$P_\phi = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$$

$$b_0 = P_\phi(0) = |A - xI_n|(0) = |A - 0I_n| = |A|$$ ✳

Definición

Sea $\phi \in End_K(V)$ es diagonalizable si $\exists B$ base de V : $M_\phi(B)$ diagonal

Ejemplo

$\phi : V \longrightarrow V$ $n=2$

$B = \{u_1, u_2\}$

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\phi(u_1) = u_2$, $\phi(u_2) = u_1$

¿ $M_\phi(B') = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$?

$\phi(u'_1) = \lambda_1 u'_1$ $\phi(u'_2) = \lambda_2 u'_2$

$$\left.\begin{array}{l} \phi(u') = \lambda u' \\ u' = a_1 u_1 + a_2 u_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda u' = \phi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_2 u_1 + a_1 u_2 \\ \quad \| \\ \lambda a_1 u_1 + \lambda a_2 u_2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda a_1 = a_2 \\ \lambda_2 a_2 = a_1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \lambda \in K \\ a_1, a_2 \in K \end{array}$$

$$\boxed{\lambda^2 a_2 = a_2}$$

1er caso $a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow u' = 0$

2º caso $a_2 \neq 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = 1 \Rightarrow a_1 = a_2 \Rightarrow u'_1 = u_1 + u_2 \\ \lambda = -1 \Rightarrow a_2 = -a_1 \Rightarrow u'_2 = u_1 - u_2 \end{array}\right\}$$ 2 vectores que forman base

$B' = \{u'_1, u'_2\}$ $M_\phi(B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Ejemplo 2

$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\phi(u_1) = -u_2$ $\phi(u_2) = u_1$

$$\begin{array}{l} \lambda u' = \phi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_2 u_1 - a_1 u_2 \\ \quad /\!/ \\ \lambda a_1 u_1 + \lambda a_2 u_2 \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda a_1 = a_2 \\ \lambda a_2 = -a_1 \end{array}\right. \quad \lambda \in K \quad a_1, a_2 \in K$$

$$\lambda^2 a_2 = -a_2$$

$\boxed{\lambda^2 a_2 = -a_2}$

1° $a_2 = 0 \Longrightarrow a_1 = 0 = u' = 0$

2° $a_2 \neq 0 \Longrightarrow \lambda^2 = -1$ $\lambda \in \mathbb{R}$ $\leadsto$ No diagonaliza

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ diagonaliza $\lambda = \pm i$

$\lambda = i \Longrightarrow a_2 = i a_1 \Longrightarrow u'_1 = u_1 + i u_2$

$\lambda = -i \Longrightarrow a_2 = -i a_1 \Longrightarrow u_2 = u_1 - i u_2$

$B' = \{u'_1, u'_2\}$ $\qquad M_\phi(B') = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$

Gris ?

Definición

$\phi \in End_K(V)$, $\lambda \in K$. se define:

$$V_{\phi,\lambda} = \{u \in V : \phi(u) = \lambda u\}$$

Proposición

$V_{\phi,\lambda} < V$

Demostración Sean $u, v \in V_{\phi,\lambda} \Longrightarrow \phi(u) = \lambda u, \phi(v) = \lambda v$

$\Longrightarrow \phi(u+v) = \lambda(u+v) \Longrightarrow u + v \in V_{\phi,\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l} u \in V_{\phi,\lambda} \\ a \in K \end{array}\right\} \Longrightarrow au \in V_{\phi,\lambda}$$

Nombre

$V_{\phi,\lambda}$ es el subespacio propio de ϕ relativo a λ

25/Nov

Definición

i) λ, es el autovalor (valor propio) de ϕ si $V_{\phi,\lambda} \neq \{0\}$

ii) $\sigma(\phi)$ = espectro de ϕ = $\{ \lambda_1, \dots, \lambda_t \,;\, \lambda \in K,\ \lambda$ es autovalor de $\phi \}$

$$M_\phi(B') = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} K = \mathbb{R} \Rightarrow \sigma(\phi) = \phi = \{1, -1\} \\ K = \mathbb{C} \Rightarrow \sigma(\phi) = \{i, -i\} \end{cases}$$

$\sigma(\phi) = \{1, -1)$

Lema

27/Nov.

Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ los autovalores distintos, $u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$ para cada $i = 1, \dots, t$ si $u_1 + \dots + u_t = 0$, entonces $u_1 = \dots = u_t = 0$

Demostración

$t = 1 \Longrightarrow u_1 = 0$ $\qquad$ $u_1 + \dots + u_t = 0 \Rightarrow \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_t u_t = \phi \quad *_1$

$< t \Longrightarrow t$ $\qquad$ $\lambda_t u_1 + \dots + \lambda_t u_t = 0 \quad *_2$

Restamos $*_1 - *_2$

$$\underbrace{(\lambda_t - \lambda_1) u_1}_{\in V_{\phi,\lambda_1}} + \dots + \underbrace{(\lambda_t - \lambda_{t-1}) u_{t-1}}_{\in V_{\phi,\lambda_{t-1}}} = 0 \Longrightarrow \underbrace{(\lambda_t - \lambda_i)}_{\neq 0} u_i = 0$$

$$\Longrightarrow u_1 = \dots = u_{t-1} = 0 \Longrightarrow u_t = 0$$

Teorema

Son equivalentes

i) ϕ es diagonalizable

ii) V posee una base de vectores propios

Demostración

ii) $\Longrightarrow$ i) $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base: $\underbrace{u_i \in V_{\phi,\lambda_i}}_{\phi(u_i) = \lambda_i u_i}$

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \bigcirc \\ & \ddots & \\ \bigcirc & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

i) $\Longrightarrow$ ii)

$\exists\ B = \{u_1 \dots u_n\}$ base de V :

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in k \Rightarrow \forall\, i, \phi(u_i) = \lambda_i u_i$$

$$u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$$

Definición

$\lambda \in k$, $e_{\phi,\lambda}$ = multiplicidad de λ como raíz de P_ϕ

Ejemplo

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow P_\phi = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

$k = \mathbb{R}$, $e_{\phi,1} = 1 = e_{\phi,-1}$ „ $e_{\phi,7} = 0$

$k = \mathbb{F}_2$ $e_{\phi,1} = 2$ # en $\mathbb{F}_2$ $P_\phi = (x-1)^2$

Observación

$P_\phi(\lambda) = 0 \iff e_{\phi,\lambda} \geq 1$

Lema

Se verifica :

i) $\lambda \in \sigma(\phi) \iff e_{\phi,\lambda} \geq 1 \iff P_\phi(\lambda) = 0$

ii) $\sigma(\phi)$ es finito

iii) $0 \leq \dim_k V_{\phi,\lambda} \leq e_{\phi,\lambda} \leq n$

$\parallel$

$f_{\phi,\lambda} \equiv$ dim Geométrica de λ respecto de ϕ

Demostración

i) $\lambda \in \sigma(\phi) \iff V_{\phi,\lambda} = \{0\} \iff \ker(\phi - \lambda id_V) \neq \{0\} \iff$

$\overline{V_{\phi,\lambda}}$

$\iff \dim_k \ker(\phi - \lambda id_V) > 0$

$\parallel$

$$n - rg(\phi - \lambda id_V) = n - rg(A - \lambda I_n)$$

$\iff n > rg(A - \lambda I_n) \iff |A - \lambda I_n| = 0 \iff P_\phi(\lambda) = 0$

27/Nov

Demostraciones (continuación)

ii) $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ con $t \leq n$

iii) Sean $\lambda \in \sigma(\phi)$, $f = \dim_K V_{\phi,\lambda}$ $\quad e = e_{\phi,\lambda}$

$\{u_1, \dots, u_f\}$ base de $V_{\phi,\lambda}$

$B = \{u_1, \dots, u_f, u_{f+1}, \dots, u_n\}$

$$M_\phi(B) = \left(\begin{array}{c|c} \underbrace{\begin{matrix} \lambda & & \\ & \ddots_f & \\ & & \lambda \end{matrix}}_{\substack{\phi(u_i) = \lambda u_i \\ i=1,\dots,f}} & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_f & A_{f \cdot (n-f)} \\ \hline 0 & B_{(n-f)(n-f)} \end{array}\right)$$

$$P_\phi = P_{M_\phi(B)} = \left|\begin{array}{c|c} \lambda I_f - x I_f & A \\ \hline 0 & B - x I_{nf} \end{array}\right| = |\underbrace{\lambda I_f - x I_f}_{\substack{\shortparallel \\ |(\lambda - x) I_f|}}| \cdot |B - x I_{n-f}| =$$

$$= (\lambda - x)^f \, |B - x I_{nf}|$$

Ejemplo.

$$M_\phi(B) = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & A_{2\times 3} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right) \qquad P_\phi = \left|\begin{array}{cc|c} \lambda - x & 0 & \\ 0 & \lambda - x & A_{2\times 3} \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & B \end{array}\right|$$

Notación

$\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $\quad t \leq n \quad e_i, f_i \quad i = 1, \dots, t$

$$\underset{\overset{\shortparallel}{n}}{t} \leq \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{f_1 + \dots + f_t} \leq \underset{\overset{\shortparallel}{n}}{e_1 + \dots + e_f} \leq n$$

Corolario (condicción suficiente no necesaria)

Si P_ϕ tiene n raíces distintas, entonces ϕ es diagonalizable

Demostración

$t = n$, $e_i \geqslant 1$ $\quad e_i \leqslant n \quad f_i \geqslant 1$

Ejemplo $P_\phi = x^2 + 1$ $\quad \mathbb{R} \quad \sigma(\phi) = \emptyset$ No diagonaliza

dim = 2

$\mathbb{C} \quad \sigma(\phi) = \{i, -i\}$ Diagonaliza

dim = 2

* Teorema

Son equivalentes

i) ϕ es diagonalizable

ii) P_ϕ descompone completamente en $k[x]$ y $f_i = e_i$

$\forall \; i = 1, \dots, t \quad (e_1 + \dots + e_t = u)$

$P_\phi = (-1)^n (x - \lambda_1)^{e_1} \dots (x - \lambda_t)^{e_t} = (\lambda_1 - x)^{e_1} \dots (\lambda_t - x)^{e_t}$

28/Nov.

Basecilla.

$\phi \in \mathrm{End}_K(V)$, $n = \dim_K V$, $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $\quad f_i = \dim_K V_{\phi, \lambda_i}$

e_i = multiplicidad de λ_i en P_ϕ.

Teorema

P_ϕ se descompone completamente en $k[x] \Longleftrightarrow P_\phi = (\lambda_1 - x)^{e_1} \dots (\lambda_t - x)$

$\Longleftrightarrow n = e_1 + \dots + e_t$

$t \leqslant f_1 + \dots + f_t \leqslant e_1 + \dots + e_t \leqslant n$

Demostración teorema *

ii) $\Longrightarrow$ i)

$\forall \; i = 1, \dots, t \quad B_i = \{u_{i1}, \dots, u_{if_i}\}$ base de V_{ϕ, λ_c}

$B = B_1 \cup \dots \cup B_t = B_i \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_t \Longrightarrow \# B = \# B_1 + \dots + \# B_t =$

$= f_1 + \dots + f_t = e_1 + \dots + e_t = n \Longrightarrow B$ es L. independiente

$\dot{\cup}$ = unión disjuntas

28/NOV

Continuación demostración ii ⟹ i

B base de V ⟹ ϕ diagonaliza y

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{f_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_t I_{f_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{f_i} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_t \ddots \lambda_t}^{f_i} \end{pmatrix}$$

$$0 = \sum_{\substack{i=1,\dots,t \\ j=1,\dots,f_i}} a_{ij} u_{ij} = v_1 + \dots + v_t \quad \text{donde} \quad v_i = \sum_{j=1,\dots,f_i} a_{ij} u_{ij} \in V_{\phi,\lambda_i}$$

LEMA* (27 NOV)

$$\Longrightarrow v_1 = \dots = v_t = 0 \Longrightarrow 0 = \sum_{j=1,\dots,f_i} a_{ij} u_{ij} \xrightarrow{B_i \text{ base}} a_{ij} = 0$$

#

i ⟹ ii

Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V formado por el vector propio $u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$

$\lambda_i \in k$

$$A = M\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ddots \lambda_1}^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_t \ddots \lambda_t}^{a_t} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow P_\phi = |A - x I_n| = \begin{vmatrix} \overbrace{\lambda_1 - x \ddots \lambda_1 - x}^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_t - x \ddots \lambda_t - x}^{a_t} \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda_1 - x_1)^{a_1} \dots (\lambda_t - x_t)^{a_t} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} P_\phi \text{ descompone completamente en } k[x] \\ \\ a_i = e_i \end{cases}$$

(Probarlos)

$$f_i = \dim_k V_{\phi,\lambda_i} = \dim_k \ker(\phi - \lambda_i \mathrm{id}_V) = n - \dim_k \mathrm{Im}(\phi - \lambda_i \mathrm{id}_V)$$

$$= n - \mathrm{rg}(A - \lambda_i I_n) = n - \mathrm{rg}\begin{pmatrix} \overbrace{\lambda_1 - \lambda_i \ddots \lambda_1 - \lambda_i}^{a_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overbrace{\lambda_t - \lambda_i \ddots \lambda_t - \lambda_i}^{a_t} \end{pmatrix}$$

$$= n - (n - a_i) = a_i \Longrightarrow a_i = e_i$$

1/Dic

$f_1 = e_1 \implies \phi$ no es diagonalizable

$e'_1 = e_1 - e_2$, $e'_2 = e_1 - e_3$

$B' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ base de V

$$M_\phi(B') = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & c_1 \\ 0 & a-1 & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 \end{pmatrix} = A'$$

$\phi(e'_1) = (a-1)e'_1$

$\phi(e'_2) = (a-1)e'_2$

$\phi(e'_3) = c_1 e'_1 + c_2 e'_2 + c_3 e'_3$

$c_i \in K$

$$P_\phi = P_{A'} = \begin{vmatrix} a-1-x & 0 & c_1 \\ 0 & a-1-x & c_2 \\ 0 & 0 & c_3 - x \end{vmatrix} = (a-1-x)^2 (\underset{\overset{\shortparallel}{a-1}}{c_3} - x)$$

$$A' = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & c_1 \\ 0 & a-1 & c_2 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

Definición ϕ es triangularizable (superior) si $\exists B$ base de $V : M_\phi(B)$ es triangular (sup) $a_{ij} = 0 \ \forall i < j$

Lema ϕ es triangularizable superior $\iff \phi$ es triangularizable inferior

Demostración

$M_\phi(\{u_1, \dots, u_n\})$ triangular superior $\implies M_\phi(\{u_n, \dots, u_1\})$ triangular inf er

$(a_{ij}) \longmapsto (a_{n+1-j, u+1-i})$

Teorema Son equivalentes:

i) ϕ es triangularizable

ii) P_ϕ se descompone completamente en $K[x]$

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii) $\exists B$ base de V : $M_\phi(B) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & & \vdots \\ & 0 & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix} = A \in Mat_n(K)$

$$P_\phi = P_A = \begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} - x \end{vmatrix} = (a_{11} - x) \cdots (a_{nn} - x) \quad a_{ii} \in K$$

1/Dic.

Demostración Teorema

ii) $\Rightarrow$ i) $\dot{¿}$ $\underset{\{u_1,\dots,u_n\}}{\underset{\shortparallel}{B}}$ base de V : $M_\phi(B)$ triangular?

Inducción sobre n

$\underline{n=1}$ $\quad P_\phi = \lambda_1 - x \in k[x]$, $M_\phi(\{u_1\}) = (a_{11}) \in Mat_1(k)$

Ⓗⓘ Supongamos que la $\dim_k W = n-1$, $\psi \in End_k W$, P_ψ se descompone completamente en $k[x] \Longrightarrow \exists\ B_W$ base de W, $M_\psi(B_W)$ triangular superor

$P_\phi = (\lambda_1 - x)\dots(\lambda_n - x)$ $\quad \lambda_i \in k$ $\quad \lambda_i \in \sigma(\phi)$

Sea $0 = u_1 \in V_\phi$, λ_1 ,, $\phi(u_1) = \lambda u_1$

$\langle u_1 \rangle \oplus W = V$, $\quad B = \{u_1, v_2, \dots, v_n\}$ base de V

$$A = M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_n \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\overset{\shortparallel}{C}$

$W = \langle v_2, \dots, v_n \rangle$ $\quad \dim_k W = n-1$

$\langle u_1 \rangle \oplus W = V$

$V = \langle u_1 \rangle + W$ $\qquad 0 = a_1 u_1 = a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$

$\{0\} = \langle u_1 \rangle \cap W$ $\qquad \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_1}} u_1 - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_2}} v_2 - \dots - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{a_n}} v_n = 0$

$\{u_1\} \oplus W = V \Longrightarrow \forall\ u \in V\ \exists!\ a_1 u_1 \in \{u_1\}$ $\quad v \in W$

$\psi : W \longrightarrow W : M_\psi(\{u_1, \dots, u_n\}) = C$

$$P_\psi = (\lambda_1 - x)\dots(\lambda_n - x) = P_A = \left| \begin{array}{c|c} \lambda_1 - x & a_{12} \dots \\ \hline 0 & C - x I_n \end{array} \right| = (x_1 - x)\,|C - x I_n| =$$

$= (\lambda_1 - x)\, P_\psi \equiv P_\gamma = (\lambda_2 - x) \dots (\lambda_n - x)$

Se descompone completamente en $k[x]$

4/Dc

Introd.

$A \in \mathrm{Mat}_n(K)\ (+,\cdot)$ $\quad K[x] \longrightarrow \mathrm{Mat}_n(K)$ $\quad$ Homo de anillos

$$f \longmapsto f(A)$$

$$f = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0 \qquad f(A) = a_m A^m + \dots + a_1 A + a_0 I_n$$

$$(f+g)(A) = f(A) + g(A)$$

$$(f \cdot g)(A) = f(A)\, g(A)$$

$$f = \sum a_i x_i \qquad g = \sum b_j x^j ,$$

$$fg = \sum a_k x^k \ , \ c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

$$f(A)g(A) = \sum a_i A^i \sum b_j A^j = \sum_k \sum_{i+j=k} a_i A^i b_i A^j =$$

$$= \sum_k \sum_{i+j=k} a_i b_j A^i A^j = \sum_k \sum_{i+j=k} a_i b_j A^{i+j}$$

Introd II

$K[x] \longrightarrow \mathrm{End}_K(V)$ $(+,\circ)$ $\quad$ Homo de anillos

$f \longmapsto f(\phi)$ $\quad$ $\phi\ \mathrm{End}_K(V),\ \dim_K V = n$

$$f(\phi) = a_m \phi^m + \dots + a_1 \phi + a_0 \mathrm{id}_V$$

$$\phi^k = \phi \circ \underbrace{\dots}_{\text{composición } k\text{-veces}} \circ \phi$$

Base de V, $M_\phi(B) = A \Rightarrow M_{\phi^2}(B) = A^2 \Rightarrow M_{\phi^i}(B) = A^i$

$$M_{a_i \phi^i}(B) = a_i A^i$$

$$M_f(\phi)(B) = f(A)$$

$$f(\phi) = 0 \iff M_{f(\phi)}(B) = 0 \iff f(A) = 0$$

4/Dic

Teorema (Cayley - Hamilton) ★ Exam.

$P_\phi(\phi) = 0$ (Polinomio característico de ϕ en ϕ se anula)

Demostración

Caso particular P_ϕ se descompone completamente en $k[x]$

$\pm P_\phi = (x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_n)$, $\lambda_i \in k$

$\|$

$g_i h_i = h_i g_i \quad \forall i \le n$

$g_i = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_i)$

$h_i = (x-\lambda_{i+1})\cdots(x-\lambda_n)$

Sea $B = \{u_1 \dots u_n\}$ base de V : $M_\phi(B)$ es triangular

$\phi(u_1) = \lambda_1 u_1$

$\phi(u_2) = a_{12} u_1 + \lambda_2$

$\phi(u_3) = a_{13} u_1 + a_{23} u_2 + \lambda_3 u_3$

$\vdots$

$\phi(u_1) = v_{i-1} + \lambda_i u_i$, $v_{i-1} \in \langle u_1, \dots, u_{i-1} \rangle$

Prop $[*]_i$ $\forall i \le n \ \forall j \le i \quad [g_i(\phi)](u_j) = 0$

$i = 1$

$[g_i(\phi)](u_i) = [(x-\lambda_1)(\phi)](u_1) =$

$= (\phi - \lambda_1 id_V)(u_1) = \phi(u_1) - \lambda_1 u_1 = \lambda_1 u_1 - \lambda_1 u_1 = 0$

$[*]_{i-1} \Longrightarrow [*]_i$

$j \le i-1 \Rightarrow [g_i(\phi)](u_j) = \Big(\big((x-\lambda_i) g_{i-1}\big)(\phi)\Big)(u_j) =$

$= [(\phi - \lambda_i id_V) \cdot (g_{i-1}(\phi))(u_j) = (\phi - \lambda_i id_V)\underbrace{(g_{i-1}(\phi)(u_j))}_{0} = 0$

$\forall \ i = i$

$[g_i(\phi)](u_i) = [(g_{i-1} \cdot (x-\lambda_i))(\phi)](u_i) = (g_{i-1}(\phi) \cdot (\phi - \lambda_i id_V))(u_i)$

$= g_{i-1}(\phi)\big(\phi(v_{i-1}) + \lambda_i u_1 - \lambda_i u_i\big) = g_{i-1}(\phi)(\underset{\in \langle u_1 \dots u_{i-1} \rangle}{\phi(v_{i-1})})$

$\phi(v_i - 1) \in \langle \phi(u_1), \dots, \phi(u_{i-1}) \rangle = \langle u_1 \dots u_i \dots u_{i-1} \rangle = \langle u_1 \dots u_{i-1} \rangle$

$P_\phi(\phi)(u_i) = [h_i(\phi) \circ g_i(\phi)](u_i) = h_i(\phi)\left(g_i(\phi)(u_i)\right) =$

$= h_i(\phi)(0) = 0$

$P_\phi(\phi) = 0.$

Caso general $\phi \in End_K(V)$, $P_\phi \in k[x]$

Sea $F \supset K$, F cuerpo conmutativo, K subgrupo de F donde P_ϕ se descompone completamente en $F[x]$

$A = M_\phi(B)$;, $P_\phi = P_A$,, $P_\phi(\phi) = 0 \Longleftrightarrow P_A(A) = 0$

$P_A(A) = P_\phi(A) = M_{P_\phi}(\phi)(B)$

$A \in Mat_n(K) \subseteq Mat_n(F)$

$\varphi \in End_F F^n$, $Mat_\varphi(Bc) = A$

$P_\varphi = P_A$ $\quad P_A(A) = 0 \Longleftrightarrow P_\varphi(\varphi) = 0$ (Cierto por el caso particular)

Ejemplo.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad P_A = \begin{vmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & 1-x \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 - 2x + 2$

$A^2 - 2A + 2I_2 = 0.$

$P_\phi(\phi) = 0$

$P_A(A) = 0$

grado P_A = grado $P_\phi = n$

Definición

$q_\phi \equiv$ polinomio mínimo de ϕ

i) $q_\phi \in k[x]$ mónico, $q_\phi \neq 0$

ii) $q_\phi(\phi) = 0$

iii) q_ϕ grado mínimo

4/Dic

Proposición $q_\phi \mid p_\phi$

$p_\phi = q_\phi \cdot h$, $h \in k[x]$

Demostración

$p_\phi = q_\phi \cdot h + r$, $h, r \in k[x]$

$$\underset{0}{\underset{\|}{p_\phi(\phi)}} = \underset{0}{\underset{\|}{q_\phi(\phi)}} \cdot h(\phi) + r(\phi)$$ grado $r(x) <$ grado $q_x(x)$

$\Longrightarrow r(\phi) = 0$

$P_A = x^2 - 2x + 2 \in \mathbb{R}[x]$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in Mat_2(\mathbb{R})$

$q_A = 1$, P_A $\quad 1(A) = I_2 \neq 0$

$A = I_2 \quad p_1 = (1-x)^2 \quad \underbrace{q_A = 1 - x}_{\text{Pol. mínimo}}$, P_A

$I_2 - A = 0.$

5/Dic.

Proposición

Sea $f \in k[x]$, $\phi \in End_k(V)$ $n = \dim_k V$, se verifica

i) $q_\phi \mid p_\phi$

ii) $q_\phi \mid f \iff f(\phi) = 0$

iii) $q_\phi(\lambda) = 0 \iff p_\phi(\lambda) = 0$

Demostraciones

i) (Demostración anterior)

ii) "$\Longrightarrow$" $f = g \cdot q_\phi \Longrightarrow f(\phi) = g(\phi) \circ q_\phi(\phi) = g(\phi) \circ 0 = 0$

"$\Longleftarrow$" $f = g \cdot q_\phi + r \Longrightarrow 0 = f(\phi) = \underbrace{g(\phi) \circ q_\phi(\phi)}_{0} + r(\phi) = r(\phi) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow r = 0 \Longrightarrow f = g \cdot q_\phi \Longrightarrow q_\phi \mid f$ *

$g, r \in k[x]$, $r = 0$ o grado $r <$ grado q_ϕ

iii) $q_\phi(\lambda) = 0 \Longrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

$P_\phi(\lambda) = 0$, $q_\phi(\lambda) \neq 0$ $\quad x - \lambda \nmid q_\phi \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \mathrm{mcd}(x-d, q_\phi) = 1 = g(x)(x-\lambda) + h(x)q_\phi(x) \Longrightarrow$

$g, h \in k[x] \quad \Longrightarrow id_V = g(\phi) \circ (\phi - \lambda id_V) + h(\phi) \circ q_\phi(\phi) =$

$= g(\phi) \circ (\phi - \lambda id_V)$

$u \in V_\phi, \lambda \neq \{0\}$

$\Longrightarrow u = g(\phi)\left[(\phi - \lambda id_V)(u)\right] = g(\phi)(\lambda u - \lambda u) = g(\phi)(0) \Longrightarrow$

Teorema (de descomposición)

Sea $f = f_1 \cdots f_t$, $f_i \in k[x]$, $\mathrm{mcd}(f_1, \dots, f_t) = 1$. Si $f(\phi) = 0$, entre

i) $\ker f_i(\phi)$ es un subespacio de V ϕ-invariante

$(\phi(\ker f_i(\phi)) \subseteq \ker f_i(\phi)) \quad \forall i = 1, \dots, t$

ii) $V = \ker f_1(\phi) \oplus \dots \oplus \ker f_t(\phi)$

$(\forall u \in V \ \exists! \ u_i \in \ker f_i(\phi) : u = u_1 + \dots + u_t)$

iii) Si B_i es base de $\ker f_i(\phi)$, entonces

$B = B_1 \cup \dots \cup B_t$ es base de V y se tiene

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$$

diagonalizado por cajas donde

$A_i = M_{\phi|_{\ker f_i(\phi)}}(B)$

$A \in Mat_n(k) \quad n = \dim_k V$

$A_i \in Mat_{n_i}(k) \quad n_i = \dim_k \ker f_i(\phi)$

$u_1 + \dots + u_t = u.$

Demostración

5/Dic.

i) $\forall u \in \ker f_i(\phi) \Rightarrow \underbrace{\phi(u) \in \ker f_i(\phi)}$

$f_i(\phi)(u)=0$ $\qquad 0 \overset{?}{=} f_i(\phi)(\phi(u)) = (f_i(\phi)\circ\phi)(u) =$

$= [(f_i(x)\cdot x)(\phi)](u) =$

$= [(x f_i(x))(\phi)](u) = \phi(f_i(\phi)(u)) = \phi(0) = 0$

#

ii) $f = f_1 \cdots f_t = f_i \hat{f_i} = \hat{f_i} f_i \qquad \text{mcd}(\hat{f_1}, \dots, \hat{f_t}) = 1 =$

(primo 2a2)

$= \hat{f_1} g_1 + \dots + \hat{f_t} g_t \Longrightarrow id_V = \hat{f_1}(\phi)\circ g_1(\phi) + \dots + f_t(\phi)\circ g_t(\phi)$

$\Longrightarrow \forall u \in V, \; u = \underbrace{\hat{f_1}(\phi)\big(g_1(\phi)(u)\big)}_{u_1} + \dots + \underbrace{\hat{f_t}(\phi)\big(g_t(\phi)(u)\big)}_{u_t}$

¿$u_1 \in \ker f_i(\phi)$?

$f_i(\phi)\Big(\hat{f_i}(\phi)\big(g_i(\phi)(u)\big)\Big) = \Big[\big(\underbrace{f_i(\phi)\circ f_i(\phi)}_{= f(\phi) = 0}\big)\circ g_i(\phi)\Big](u) =$

$= (0 \circ g_i(\phi))(u) = 0(u) = 0$

$f = f_1 \cdots f_t = f_i \hat{f_i} = \hat{f_i} f_i \qquad \text{mcd}(\hat{f_1}, \dots, \hat{f_t}) = 1 = \hat{f_1} g_1 + \dots + f_t g_t$

$u_1 + \dots + u_t = v_1 + \dots + v_t \Rightarrow u_i = v_i \qquad u_i, v_i \in \ker f_i(\phi)$

$\Longrightarrow \hat{f_t}(\phi)(u_1 + \dots + u_t) = \hat{f_t}(\phi)(u_1) + \dots + \hat{f_t}(\phi)(u_{t-1}) + \hat{f_t}(\phi)(u_t)$

$\hat{f_t} = f_1 \cdots f_{t-1} \qquad \hat{f_t}(\phi) = f_1(\phi)\circ \dots \circ f_{t-1}(\phi) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \hat{f_t}(\phi)(u_1) = \dots = \hat{f_t}(\phi)(u_{t-1}) = 0$

$\text{mcd}(f_t, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{todos} - f_t}}{\hat{f_t}}) = 1 = g f_t + h \hat{f_t} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow id_V = g(\phi)\circ f_t(\phi) + h(\phi)\circ \hat{f_t}(\phi)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} n_t = g(\phi)\big(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f_t(\phi)(u_t)}\big) + h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(u_t)\big) = h\phi\big(\hat{f}_t(\phi)(u \\ u_t = g(\phi)\big(f_t(\phi)(\overset{\shortparallel}{v_t})\big) + h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(v_t)\big) = \\ \qquad = h(\phi)\big(\hat{f}_t(\phi)(v_t)\big) \end{cases}$$

#

iii) B_i base de $\ker f_i(\phi) \Rightarrow B_1 \cup \ldots \cup B_t$ es base de V

$u = u_1 + \ldots + u_t$

$$M_\phi(\underset{u_1 \nearrow}{B_1} \cup \ldots \cup \underset{\nwarrow u_t}{B_t}) = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \cline{2-2} \underset{\phi(u_1)}{\uparrow} & \end{array}\right)$$

$B_1 = \{u_{11}, \ldots, u_{1n}\}$

$\phi(u_{11}) \in \ker f_1(\phi)$

$u_1 \in B_1 \subseteq \underbrace{\ker f_1(\phi)}_{\phi\text{ - invariante.}}$

9/ Dic.

Corolario Son equivalentes:

i) ϕ es diagonalizable

ii) q_ϕ se descompone completamente en $k[x]$ y es separable.

Demostración

$i \Rightarrow ii)$ P_ϕ se descompone completamente en $k[x] \Longrightarrow P_\phi = (\lambda_1 - x)^{e_1} \ldots (\lambda_t - x)^{e_t}$

$\lambda_i \in k$

$q_\phi \mid P_\phi \Longrightarrow q_\phi = (\lambda_1 - x)^{a_1} \ldots (\lambda_t - x)^{a_t}$, $a_i \leq e_i$

$a_i \geq 1$, λ_i raiz de $P_\phi \Rightarrow \lambda_i$ raíz de $q_\phi \Rightarrow a_i \geq 1$

$(\lambda_1 - x) \ldots (\lambda_t - x)(\phi) = 0 \Longrightarrow q_\phi \mid (\lambda_1 - x) \ldots (\lambda_t - x)$

$\Longrightarrow \underset{\text{polinomio mínimo}}{q_\phi} = \underset{\text{mónico}}{\boxed{\pm}}(\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_t - x)$

9/Dic.

Continuación demostración

$$\sigma(\phi) = \{\lambda_1 \dots \lambda_t\} \Longrightarrow e_1 = f_i \quad , \exists B \text{ base de } V:$$

diagonal

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \overset{e_1=f_1}{\lambda_1 \ddots \lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overset{e_t = f_t}{\lambda_t \ddots \lambda_t} \end{pmatrix}$$

$\exists B = \{u_1, \dots, u_{e_1}, \dots\}$

$$\Big[\big[(\lambda_1 - x) \dots (\lambda_t - x)\big](\phi)\Big](u_i) \underset{1 \leq i \leq e_1}{=}$$

$$= \Big[(\lambda_2 - x) \dots (\lambda_t - x)\big((\lambda_1 - x)(\phi)\big)\Big](u_i) =$$

$$= \Big[(\lambda_1 id_V - \phi) \circ \dots \circ (\lambda_t \, id_V - \phi) \circ (\lambda_i id_V - \phi)\Big](u_i) =$$

$$= \psi\big[(\lambda_i \, id_V - \phi)(u_i)\big] = \psi(0) = 0$$

ii ⟹ i)

$$\pm q_\phi = (\lambda_1 - x) \dots (\lambda_t - x) \;, \quad \lambda_i \neq \lambda_j \;\; \forall i,j \;\; \lambda_i \in k$$

$$q_\phi(\phi) = 0 \;, \quad mcd(\lambda_1 - x, \dots, \lambda_t - x) = 1$$

$$V = \ker(\lambda_1 id_V - \phi) \oplus \dots \oplus \ker(\lambda_t id_V - \phi)$$

$$M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} A_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & A_t \end{pmatrix}$$

B_i es base de $\ker(\lambda_t \, id - \phi)$

$$A_i = M_{B_i}\left(\phi|_{\ker(\lambda i d_V - \phi)}\right) = \overset{e_i = f_i}{\begin{pmatrix} \lambda_i & & O \\ & \ddots & \\ O & & \lambda_i \end{pmatrix}} = \lambda I e_i$$

$$u \in B_i \Longrightarrow \underset{0}{\overset{}{(\lambda \, id_V - \phi)(u)}} = 0 \qquad \lambda_i u = \phi(u)$$

#

Ejemplo. ejercicio 2 pag 178 (libro Castellet)

a)

$$A \in M_2(\mathbb{R}) \qquad A^2 = 0$$

$$P_A = x^2 - t(A)x + \det(A) I_2$$

$$0 = P_A(A) = A^2 - t(A)A + \det(A) I_2 = 0$$

$$A^2 - t(A)A = 0 \Longrightarrow \underbrace{t(A)}_{\in \mathbb{R}}A = 0 \Longrightarrow \underset{t(A)\,t(A) \,=\, t(A)^2 \,\Rightarrow}{\underset{\shortparallel}{t(t(A)A)}} = t(0) = 0$$

$$\Longrightarrow t(A) = 0$$

$$P_A = x^2$$

$$q_A \mid P_A = x^2 \Longrightarrow q_A = \begin{cases} x & ① \\ x^2 & ② \end{cases}$$

① $\Longrightarrow$ A diagonalitzable $\Longrightarrow$ A semejante a $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$0 = q_A(A) = A$$

② $\Longrightarrow$ A nodiagonalitzable $\quad \sigma(\phi) = \{\underset{\lambda_1}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{0}}}\} \quad e_1 = 2 \quad f_1 = 1$

$$\Longrightarrow \underset{\{u_1, u_2\}}{M_\phi(\underset{\shortparallel}{B})} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \Longrightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} P$$

vector propio

9/Dic

Ejemplo 2 pag 178 (Castellet)

b)

$A \in M_4(\mathbb{R})$

$A^2 - 3A + 2I_4 = 0$

$\phi : \mathbb{R}^4 - \mathbb{R}^4$

$M_\phi(B_c) = A$

$$(x^2 - 3x + 2)(\phi) = 0$$

$$\overset{\shortparallel}{(x-2)(x-1)}$$

ϕ siempre va a ser diagonalizable

$$q_\phi = \begin{cases} x-1 \Rightarrow P_\phi = (x-1)^4 \\ x-2 \Rightarrow P_\phi = (x-2)^4 \\ (x-2)(x-1) \Rightarrow P_\phi = \begin{cases} (x-2)(x-1)^3 & ① \\ (x-2)^2(x-1)^2 & ② \\ (x-2)^3(x-1) & ③ \end{cases} \end{cases}$$

$$0 = q_A(A) = \begin{cases} A - I_4 \\ A - 2I_4 \end{cases}$$

① $\Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}P$

② $\Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}P$

③ $\Rightarrow A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & & & 0 \\ & 2 & & \\ & & 2 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}P$

Ejemplo. I

$\phi \in \mathrm{End}_K K^3 \quad n = 3 \quad P_\phi = (x+2)(x^2+2)$

$$K = \mathbb{C} \Longrightarrow P_\phi = (x+2)(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) \underset{\nearrow}{\Rightarrow} M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 2 & & 0 \\ & \sqrt{-2} & \\ 0 & & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

diagonaliza

$$K = \mathbb{R} \Rightarrow P_\phi = (x+2)(x^2+2) \quad \mathrm{mcd}(x+2, x^2+2) = 1 \underset{\nearrow}{\Rightarrow}$$

Tma Estructura

$$\mathbb{R}^3 = \underset{\substack{\shortparallel \\ V_{\phi,-2} \\ B_1 = \{u_1\}}}{\ker(\phi + 2id_{\mathbb{R}^3})} \oplus \underset{\substack{\shortparallel \\ V_2 = \{u_2, u_3\}}}{\ker(\phi^2 + 2id_{\mathbb{R}^3})}$$

$$M_\phi(\{u_1, u_2, u_3\}) = \left(\begin{array}{c|c} A_{1\times1} & 0 \\ \hline 0 & A_{2\times2} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & + & + \\ 0 & + & + \end{array}\right) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$0 \neq u_2 \in \ker(\phi^2 + 2id\, \mathbb{R}^2)$

$a u_2 + b\phi(u_2) = 0$

$\Downarrow$

$[(a + bx)(\phi)](u_2) = 0 \Rightarrow [(x^2+2)(\phi)](u_2) = 0$

$\phi(u_3) = \phi^2(u_2) = -2u_2$

$$x^2+2 = q(x)(a+bx)+c$$

$$\Rightarrow (\underbrace{q(\phi)(a\,id_{\mathbb{R}^3}+b\phi)}_{\overset{\shortparallel}{0}} + c\,id_{\mathbb{R}^3})(u_2) = cu_2 \underset{\overset{\uparrow}{u_2 \neq 0}}{\Longrightarrow} c=0$$

~~eso~~

$\chi(k) = 2 \Longrightarrow P_\phi = x^3 \Rightarrow q_x = \begin{cases} x \\ x^2 \\ x^3 \end{cases}$

$\chi(k) = 3$.

Continuación Ejemplo. I.

11/Dic.

$-P_\phi = (x+2)(x^2+2)\quad \phi \in End_k\, k^3$

$k = \mathbb{C} \Longrightarrow -P_\phi = (x+2)(x+\sqrt{-2})(x-\sqrt{-2}) \Rightarrow \sigma(\phi) = \{-2, -\sqrt{-2}, \sqrt{-2}\}$

$\Longrightarrow M_\phi(B) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{-2} \end{pmatrix}$, B base de k^3 diagonalizable.

$k = \mathbb{R} \Rightarrow -P_\phi = (x+2)(x^2+2)$, x^2+2 irreducible en $\mathbb{R}[x] \Rightarrow$

$\Longrightarrow M_\phi(B) = \left(\begin{array}{c|cc} -2 & & \\ \hline & 0 & -2 \\ & 1 & 0 \end{array}\right)$, B base de $\mathbb{R}^3$, $\sigma(\phi) = \{-2\}$

No diagonaliza

No triangulariza.

$\chi(k) = 2 \Longrightarrow -P_\phi = x^3$, $\sigma(\phi) = \{0\} \Rightarrow q_\phi = \begin{cases} x \text{ ①} \\ x^2 \text{ ②} \\ x^3 \text{ ③} \end{cases}$

① $\Rightarrow 0 = q_\phi(\phi) = \phi \Longrightarrow M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\forall$ B base de k^3

② $\Rightarrow \phi = 0$, $\phi = 0 \Longrightarrow \{0\} \subsetneq \overset{2}{\ker}\,\phi \subsetneq \underset{3}{\ker}\,\phi^2 = k^3$

ϕ triangularizable (P_ϕ dc.) $\dim \ker\phi = 3 - \dim Im\phi \geq 3 - \dim\ker\phi$

ϕ no diagonal (q_ϕ no separ)

$$Im\,\phi \subseteq \ker\phi$$

$$\phi\,\phi(n) = 0$$

$$0 = u_1 \in k^3,\ u_1 \notin \ker\phi \Rightarrow \phi(u_i) \neq 0$$

11 / Dic

Continuación ejemplo

$u_2 = \phi(u_1) \in \ker \phi$

$\{u_1, u_2\}$ l.i.

$$\begin{array}{l} a_1u_1 + a_2u_2 = 0 \\ \shortparallel \\ a_1u_1 + a_2\phi(u_1) \end{array} \Longrightarrow a_1\phi(u_1) = 0 \Rightarrow u_1 = 0 \quad \phi(u_1) = 0$$

$$a_2u_2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_2 = 0 \\ 0 = u_2 = \phi(u_1) \end{cases}$$

$\{u_1, u_3\}$ l.i $\qquad u_3 \in \ker\phi$

$\{u_1, u_2, u_3\}$ Li

$a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 = 0$

$a_1u_1 + a_2\phi(u_1) + \phi_3u_3 = 0$

$a_1\phi(u_1) = 0 \Longrightarrow a_1 = 0$

$a_2u_2 + a_3u_3 = 0$

$\Downarrow$ u_2, u_3 l.i

$a_2 = a_3 = 0$

caja Jordan.

$$M_\phi(\{u_1, u_2, u_3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ V_3

③ $x^3 \Rightarrow \phi^3 = 0$, $\phi^2 \neq 0 \Longrightarrow 0 \subseteq \underset{1}{\ker\phi} \subseteq \underset{2}{\ker\phi^2} \subseteq \underset{3}{\ker\phi^3} = k^3 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow M_\phi(\{u_1, u_2, u_3\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ϕ no diagonalizable (q_ϕ no separable)

ϕ triangularizable (P_ϕ se d.c en $k[x]$)

$\{u_1, \underset{u_2}{\overset{\shortparallel}{\phi(u_1)}}, \underset{u_3}{\overset{\shortparallel}{\phi^2(u_1)}}\}$ $\qquad \phi^2(u_1) \neq 0$

$au_1 + a_2\phi(u_1) + a_3\phi^2(u_1) = 0$ $\qquad \phi(u_1) = u_2$

$a_1\phi^2(u_1) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 0 \\ \phi^2(u_1) = 0 \end{cases}$ $\qquad \phi(u_2) = u_3$

$\phi(u_3) = \phi(\phi^2(u_1)) = \phi^3(u_1) = 0$

$\chi(k) = 3 \Longrightarrow -P_\phi = (x-1)(x^2-1) = (x-1)^2(x+1)^2$

$$\sigma(\phi) = \{\underset{\lambda_1}{\overset{e_1=2}{1}}, \underset{\lambda_2}{\overset{e_2=1}{-1}}\} \Rightarrow q_\phi = \begin{cases} (x-1)(x+1) \Rightarrow \phi \text{ diagonalizable} \Rightarrow \exists B \text{ base } k^3 \\ (x-1)^2(x+1) \; * \end{cases}$$

* ϕ no diagonalizable (q_ϕ no separ) triangularizable (P_ϕ d.c $k[x]$)

$$f_1 = (x-1)^2 \quad f_2 = x+1 \implies k^3 = \underbrace{\ker(\phi - id_{k^3})^2}_{2} \oplus \underbrace{\ker(\phi + id_{k^3})}_{V_{\phi,1} = 1 \text{ dim } 1}$$

$\{u_1, u_2\}$ base $\ker(\phi - id_{k^3})^2$

$\{u_3\}$ " $\ker(\phi - id_{k^3})$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ base k^3

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} A_1 & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline 0\ 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{A_1 = M_{\phi|\ker(\phi - id_{k^3})}(\{u_1, u_2\})}_{}$$

Ejemplo prox día del Tma que va a dar.

12/Dic

Teorema

$P_\phi = (-1)^n (x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t} \iff \phi$ diagonalizable

$\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $n = e_1 + \dots + e_t$
autovalores

$q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t}$ $1 \le a_i \le e_i$ $\forall\, i = 1, \dots, t$

mismo nº raíces y mónico

$f = q_\phi$

$f_i = (x-\lambda_i)^{a_i}$

$f = f_1 \dots f_t$

$\text{mcd}(f_1, \dots, f_t) = 1$

Tma Estructura

$V = \ker(\phi - \lambda_1 id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)^{a_t}$

$V = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$ N_i es ϕ-invariante

$N_i = \ker(\phi - \lambda_i id_V)^{a_i} = N_{\phi, \lambda_i} \supseteq V_{\phi, \lambda_i}$

$$\exists\, B_i \text{ base de } N_i : M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$$

$A_i = M_{\phi|N_i}(B_i)$

$\phi = \lambda_i \cdot id_V + \phi - \lambda_i id_V$

$\phi|_{N_i} = \lambda_i id_{N_i} + (\phi - \lambda_i id_V)|_{N_i} = \lambda_i id_{N_i} + \eta_i$

$\eta_i = (\phi - \lambda_i id_V)|_{N_i} : N_i \longrightarrow N_i$ endomorfismo

12/Dic

Continuación Teorema

$$\eta_i^{a_i} = (\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}\big|_{N_i} = 0$$ endomorfismo nulpotente ?

$$A_i = M_{\phi|N_i}(B_i) = M_{\lambda_i \, id_{N_i}}(B_i) + M_{\eta_i}(B_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i \end{pmatrix} + M_{\eta_i}(B_i)$$

Proposición

Examen parte teoría. ★

$N_i = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}$

$\eta_i = (\phi - \lambda_i \, id_V)|_{N_i}$

$\phi_i = \phi|_{N_i} = \lambda_i \, id_{N_i} + \eta_i$

$n = e_1 + \dots + e_t$

i) $q_{\phi_i} = (x-\lambda_i)^{a_i}$ $\quad \left(q_\phi = \prod_{i=1}^{t} q_{\phi_i} \right)$

ii) $p_{\phi_i} = (-1)^{e_i} (x-\lambda_i)^{e_i}$

iii) $\dim_K N_i = e_i$

iv) $N_i = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i+j} \quad \forall j \geq 0$

$$\ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^1 = \overset{\overset{\dim: \, f_i}{\uparrow}}{V_{\phi,\lambda_i}} \subseteq \underset{\underset{N_i}{\parallel}}{\overset{\overset{\leq \; e_i}{\uparrow}}{N_{\phi,\lambda_i}}} = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}$$

$$\ker(\phi - \lambda_i \, id) \subsetneq \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^2 \subsetneq \dots \subsetneq \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} =$$
$$= \ker(\phi - \lambda \, id_V)^{a_i+1}$$

Demostración

i) $(x-\lambda_i)^{a_i}(\phi_i) = (\phi_i - \lambda_i \, id_{V_i})^{a_i} = (\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i}\big|_{N_i} = 0$

Para ser $q_\phi \Rightarrow \quad (x-\lambda_i)^{a_i - 1}(\phi_i) \neq 0$

RAA Supongamos que $(x-\lambda_i)^{a_i-1}(\phi_i) = 0 \Rightarrow$

$N_i \subset \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i - 1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \Big[\underset{\underset{\frac{q_\phi(x)}{x-\lambda_i}}{\parallel}}{(x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_{i-1})^{a_{i-1}} (x-\lambda_i)^{a_i} (x-\lambda_{i+1})^{a_{i+1}} \dots (x-\lambda_t)^{a_t}} \Big](\phi) = 0$$

Contradicción

$B = B_1 \cup \dots \cup B_t$, B_j base $N_j \Rightarrow [h(\phi)](u_j) = 0 \quad \forall u_j \in B_j$

ii) $A = M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{M_{\phi_1}(B_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_{\phi_t}(B_t)} \end{pmatrix}$

$$A_i = M_{\phi|N_i}(B_i)$$

$$A_i = M_{\phi_i}(B_i)$$

$$P_\phi = P_A = |A - \lambda I n| = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 - x I_{m_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{A_t - x I_{m_t}} \end{pmatrix} =$$

$$P_\phi = \pm (x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t}$$

$$= \underset{(x-\lambda_i)^{a} \dots (x-\lambda_i)^{b_i}}{\underset{\shortparallel}{|A - xI_{m_1}| \cdot \ldots \cdot |A_t - xI_{m_t}|}}$$

$$P_\phi = \pm (x-\lambda_i)^{b_i} \qquad a_i \leq b_i$$

Ahora demostraremos $b_i = e_i$

15/Dic.

$\phi \in End_k(V)$, $\overset{?}{n} = \dim_k V = e_1 + \dots + e_t$

$P_\phi = (-1)^n (x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t}$ $\quad \lambda_i \in k$

$q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t}$ $\quad 1 \leq a_i \leq e_i \ \forall i$

$N_i = \ker(\phi - \lambda_i id_V)^{a_i}$ $\quad \phi$ - invariant

$V = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$

$\phi_i = \phi|N_i \in End_k(N_i)$ $\quad \phi_i = \lambda_i idv_{N_i}$ $\quad \overset{\overset{\eta_i}{\shortparallel}}{(\phi_i - \lambda_i id_{N_i})}$

$\exists$ B_i base de N_i : $M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boxed{A_t} \end{pmatrix}$

$$\underset{A_1 \oplus \dots \oplus A_t}{\shortparallel}$$

$$A_i = M_{\phi_i}(B_i) = M_{\lambda_i id_{V_i}}(B_i) + M_{\eta_i}(B_i) = \lambda_i I_{e_i} + M_{\eta_i}(B_i)$$

15 / Dic

Proposición

1) $q_{\phi_i} = (x-\lambda_i)^{a_i}$

2) $p_{\phi_i} = (-1)^{e_i}(x-\lambda_i)^{e_i}$

3) $\dim_K N_i = e_i$

4) $\ker(\phi-\lambda_i\, id_V)^{a_i} = \ker(\phi-\lambda_i\, id_V)^{a_i+j} \quad \forall j \geqslant 0$

Demostración

3) $\dim_K N_i = \text{grado } p_{\phi_i} \overset{②}{=} e_i$

4)

$$f = (x-\lambda_1)^{a_1+j} \dots (x-\lambda_t)^{a_t+j}$$

$$f(x) = q_\phi(x)\left[(x-\lambda_1)\dots(x-\lambda_t)\right]^j \qquad j \geqslant 0$$

$$\begin{cases} f(\phi) = 0 \\ \text{m.c.d}\left[(x-\lambda_1)^{a_1+j}, \dots, (x-\lambda_t)^{a_t+j}\right] = 1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$V = \ker(\phi-\lambda_1\, id_V)^{a_1+j} \oplus \dots \oplus \ker(\phi-\lambda_t \cdot id_V)^{a_t+j}$$

$$V = \ker(\phi-\lambda_1\, id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi-\lambda_t \cdot id_V)^{a_t}$$

$$\eta_i \in \text{End}_K(N_i)$$

$$\eta_i^a = 0 \iff \forall n \in \underset{\overset{\|}{\ker(\phi-\lambda_i\, id_V)^{a_i}}}{N_i} \quad \eta_i^{a_i}(\upsilon) = 0$$

$$\eta_i^{a_i-1} \neq 0$$

$$(\phi_i - \lambda_i\, id_{N_i})^{a_i}(v)$$

$$(\phi|_{N_i} - \lambda_i\, id_{N_i})^{a_i}(v)$$

$$\left[(\phi - \lambda id_V)|_{N_i}\right]^{a_i}(v)$$

Endomorfismos nilpotentes

Por definición, supongamos que:

$\dim_K N = e$, $\eta \in \mathrm{End}_K(N)$ es nilpontente de indice a sí:

① $\eta^a = 0$

② $\eta^{a-1} \neq 0$

Observación

1) $q_\eta = x^a$

2) $P_\eta = x^e$

3) $\sigma(\eta) = \{0\}$ $\boxed{\lambda_1 = 0}$ $e_1 = e$ $1 \leq f_1 < e$

4) $1 \leq a \leq e$

Ejemplo.

$M_\eta(B)$ B base d N

Caso 1

$a = 1 \Rightarrow q_\eta = x \Rightarrow \eta = 0 \Rightarrow M_\eta(b) = 0$ Ie

$a = e \Rightarrow N_K = \ker \eta^k$ $k \geq 0$

$N_K < N$ (subespacio) $N_0 = \ker \eta^0 = \ker id_N = \{0\}$

$N_1 = \ker \eta \supsetneq N_0$ (Si $N_1 = N_0$, entonces $\ker \eta = \{0\} \Rightarrow \eta$ inyec a

$\Rightarrow \eta$ biyectiva $\Rightarrow \eta^a \neq 0$)

$$\eta^a = 0 \Rightarrow \underset{\overset{\shortparallel}{\eta^{a-1}}}{\eta^{-1} \cdot \eta^a} = 0$$

$N_K \subsetneq N_{K+1}$ $K + 1 \leq a$

$N_K \subseteq N_{K+1}$ $\left[\eta^k(U) = 0 \Rightarrow \eta^{k+1}(U) = \eta(\eta^k(u)) = \eta(0) = 1\right]$

$\forall\ U \in N_{K+1} \Rightarrow U \in N_K$

$\forall\ U \in N_a = N_{a-(K+1)+K+1} \Rightarrow \eta^{K+1}\left(\eta^{a-(K+1)}(u)\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \eta^{a-(K+1)}(U) \in N_{K+1} \subseteq N_K$

15/Dic

$$\eta^k(\eta^{a-(k+1)}(u))=0 \Longrightarrow \eta^{a-1}(u)=0 \Longrightarrow U \in N_{a-1}$$

$$\underset{\substack{\parallel \\ N}}{N_a} = N_{a+1}$$

↳ subespacios de N

$a = e$

$$\{0\} = N_0 \subsetneqq N_1 \subsetneqq \dots \subsetneqq N_{a-1} \subsetneqq N_a = N$$

$$\{0\} = \underset{\substack{\downarrow \\ 0=(\dim)}}{N_0} \subsetneqq \underset{\substack{\downarrow \\ 1=(\dim)}}{N_1} \subsetneqq \dots \subsetneqq \underset{\substack{\downarrow \\ (e-1)=\dim}}{N_{e-1}} \subsetneqq \underset{\substack{\downarrow \\ e(\dim)}}{N_e} = N$$

$\dim N_K = K$

Ejemplo

Elegimos $n \in \underset{\substack{\parallel \\ N}}{N_e}$, $U \notin N_{e-1}$

$$B = \{\overset{u_1}{\overset{\parallel}{U}}, \overset{u_2}{\overset{\parallel}{\eta(u)}}, \dots, \overset{u_e}{\overset{\parallel}{\eta^{e-1}(u)}}\} \text{ base de } N$$

$\# B = e$

$$\sum_{i=0}^{e-1} \lambda_i \cdot \eta^i(u) = 0 \xrightarrow{e-1} \lambda_0 \cdot \eta^{e-1}(u) + \lambda_1 \overset{0}{\boxed{\eta^e}}(u) + \dots = \lambda_0 \eta^{e-1}(u) \Rightarrow$$

$$\lambda_0 = 0 \text{ ó } \eta^{e-1}(u) = 0 \Longrightarrow \lambda_0 = 0$$

$$M_\eta(B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{J_{\underset{\substack{\downarrow \\ \text{autovalor}}}{0},e}}$$

Base etacíclica, η-cíclica

Matriz Jordan

$e = 3$

$$\underset{\substack{\parallel \\ J_{0,1} \oplus J_{0,1} \oplus J_{0,1}}}{0 \cdot I_3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0} & & 0 \\ & \boxed{0} & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{0,1} & & \\ & J_{0,1} & \\ & & J_{0,1} \end{pmatrix}$$

← matriz nula

$a = 3$

$$J_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J_{0,2} \oplus J_{0,1} = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad a = 2$$

16 / Dic

Repasillo

$\eta \in \mathrm{End}_K(N) \quad \eta^a = 0 \,, \ \eta^{a-1} \neq 0$

$e = \dim_K N \qquad 1 \leq a \leq e$

$$\boxed{N_K = \ker \eta^K}$$

$$N_0 = \{0\} \subsetneq N_1 \subsetneq \cdots \subsetneq N_{a-1} = N_a = N$$

Definición /Notación

- $e_K = \dim_K N_K$
- $d_K = e_K - e_{K-1}$

Proposición

i) $0 < e_1 < \cdots < e_{a-1} < e_a = e$

ii) $0 < d_a \leq d_{a-1} \leq \ldots \leq d_1 = e_1$

Demostración

i) $0 < \dim_K N_1 < \ldots < \dim_K N_{a-1} < \dim_K N_a = \dim_K N$

ii) $0 < d_a = e_a - e_{a-1}$

$d_1 = e_1 - \textcircled{e_0} \longrightarrow e_0 = \dim_K N_0 = \dim_K \ker \eta^0 = \dim_K(\ker id_N) =$

$= \dim_K \{0\} = 0$

$d_1 = e_1 - 0 = e_1$

$d_K \leq d_{K-1} \qquad 2 \leq K \leq a$

$e_K - e_{K-1} \leq e_{K-1} - e_{K-2}$

16/Dic

Continuación demostración ii)

$$\dim_K N_K - \dim_K N_{K-1} \leq \dim_K N_{K-1} - \dim_K N_{K-2}$$

$$\Vert$$

$$\dim_K N_K/N_{K-1} \leq \dim_K N_{K-1}/N_{K-2}$$

$$\begin{tikzcd} N_K/N_{K-1} \arrow[r, "\Phi"] & N_{K-1}/N_{K-2} \\ \bar{u}_K \arrow[r, mapsto] & \widetilde{\eta(u_K)} \end{tikzcd}$$

Φ lineal e inyectiva

$$\Phi(\bar{u}_K + \bar{v}_K) = \phi(\overline{u_K + v_K}) = \widetilde{\eta(u_K+v_K)} = \widetilde{\eta(u_K)+\eta(v_K)} =$$

$$= \eta(\widetilde{u_K}) + \eta(\widetilde{v_K}) = \phi(\bar{u}_K) + \phi(\bar{v}_K)$$

$\Phi(a\bar{u}_K) = a\phi(\bar{u}_K) \quad \Longrightarrow \phi$ k-lineal

$$\bar{u}_K \in \operatorname{Ker} \phi \overset{?}{\Longrightarrow} u_K \in N_{K-1}$$

$$\bar{u}_K \in \operatorname{Ker} \phi \Rightarrow \underset{\widetilde{\eta(u_K)}}{\underset{\Vert}{\phi(\bar{u}_K)}} = \tilde{0} \Rightarrow \eta(u_K) \in N_{K-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \eta^{K-2}(\eta(u_K)) = 0 \Rightarrow \eta^{K-1}(u_K) = 0 \Rightarrow u_K \in N_{K-1}$$

$$\Rightarrow \quad d_{K-1} - d_K \geq 0$$

$$d_a > 0$$

Prop ii consecuencia

$$d_{K-1} - d_K \geq 0$$

$$d_a > 0$$

Observación previa

$$M_1, \dots, M_t \Rightarrow M_1 \oplus \dots \oplus M_t$$

$$\Vert$$

$$\begin{pmatrix} \boxed{M_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \boxed{M_t} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{M \oplus \dots \oplus M}_{d} = M^{(d)}$$ matriz diagonal cajas M

Teorema (Jordan para endomorfismos nilpotentes)

$\exists$ una base B de N tal que

$$M_\eta(B) = J_{0,a}^{(d_a)} \oplus J_{0,a-1}^{(d_{a-1}-d_a)} \oplus \dots \oplus J_{0,2}^{(d_2-d_3)} \oplus J_{0,1}^{(d_1-d_2)}$$

Observación (Matriz Jordan)

$$J_{\underset{\uparrow \atop \text{autovalor}}{0},i} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad J_{\lambda,i} = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ 1 & \lambda & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

Ejemplo

$$e = 3 \Longrightarrow \begin{cases} a = 1 \Longrightarrow \eta = 0 \Longrightarrow M_\eta(B) = 0 \\ a = 3 \Longrightarrow M_\eta(B) = J_{0,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \boxed{a = 2} \Longrightarrow \eta^2 = 0 \quad \eta \neq 1 \end{cases}$$

$$0 < \overset{1,2}{\overset{\shortparallel}{e_1}} < e_2 = e = 3$$

$$0 < \underset{\underset{e_2 - e_1}{\shortparallel}}{d_2} \leq d_1 = e_1$$

$$\Longrightarrow e_2 - e_1 \leq e_1 \Longrightarrow 3 = e_2 \leq 2e_1 \quad \boxed{e_1 = 2}$$

$$d_1 = e_1 = 2$$

$$\boxed{d_2 = e_2 - e_1 = 3 - 2 = 1}$$

$$\underset{3\times 3}{M_\eta(B)} = \underbrace{J_{0,2}^{(1)}}_{\substack{\text{caja} \\ 2\times 2}} \oplus \underbrace{J_{0,1}^{(1)}}_{\substack{\text{caja} \\ 1\times 1}}$$

$$\shortparallel$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Demostración Teorema

16/Dc

$$N = \overset{e_a}{N_a} \overset{>}{=} \overset{e_{a-1}}{N_{a-1}} \oplus \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle$$

$$N_{a-1} = N_{a-2}$$

$\{u_{a1}, \dots, u_{ad_a}\}$ Li $\Rightarrow \{\eta^i(u_{aj}) : 0 \le i < a ,\ 1 \le j \le d_a\}$ lineal. indep.

$$\sum \lambda_{ij}\, \eta^i(u_{aj}) = 0 \underset{\eta^{a-1}}{\Longrightarrow} \sum \lambda_{oj}\, \eta^{a-1}(u_{aj}) = 0$$

$$\Rightarrow \eta^{a-1}\Big(\sum \lambda_{o,j}\, u_{aj}\Big) = 0$$

$$\sum \lambda_{oj} u_{aj} \in \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{N_{a-1} \cap}} \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle \Rightarrow \lambda_{oj} = 0 \quad \forall j = a \dots d_a$$

$$N = N_a = N_{a-1} \oplus \langle u_{a1}, \dots, u_{ad_a} \rangle$$

$$N_{a-1} = N_{a-2} \oplus \langle \eta(u_{a1}), \dots, \eta(u_{ad_a}) \rangle \oplus \langle u_{a-1}, \dots, u_{a-1, d_{a-1}-d_a} \rangle$$

$$N_{a-2} = N_{a-3} \oplus \langle \eta^2(u_{a1}), \dots, \eta^2(u_{ad_a}) \rangle \oplus \langle \eta(u_{a-1,1}), \dots, \eta(u_{a-1, d_{a-1}-d}$$

$$\oplus \langle u_{a-2,1}, \dots (u_{a-2}, d_{a-2} - d_{a-1}) \rangle$$

$$d_1 \geq d_2 \qquad N_1 = \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{N_0}} \oplus \langle \dots \rangle \oplus \langle u_{11}, \dots, u_{1 d_1 \dots d_2} \rangle$$

$$B = \{u_{a,1}, \eta(u_{a,1}) \dots \eta^{a-1}(u_{a,1}), u_{a,2}\ \eta(u_{a,2}) \dots \eta^{a-1}(u_{a,2}), \dots$$

$$u_{a-1,1}\ \eta(\eta_{a-1,1}), \dots, \eta^{a-2}(u_{a-1,1}) \dots \}$$

#

Ejemplo

$e = 3 = e_2$

$a = 2$

$e_1 = 2$

$$N = N_2 = N_1 \oplus \langle u_{21} \rangle$$

$$\underset{\text{dim } 2}{\underset{|}{N_1}} = \underset{\{0\}}{\underset{\shortparallel}{N_0}} \oplus \langle \eta(u_{21}) \rangle \oplus \langle u_{11} \rangle$$

¿Como se ordena la base?

$$B = \{ u_{2,1},\ \eta(u_{21}),\ u_{11} \}$$

$$M_\eta(B) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = J_{0,2} \oplus J_{0,1}$$

$e = 3$ $\quad e_3 = 3$

$a = 3$ $\quad e_2 = 2$

$e_1 = 1$

$$N_3 = N_2 \oplus \langle u_{31} \rangle$$

$$N_2 = N_1 \oplus \langle \eta(u_{31}) \rangle$$

$$N_1 = \underset{\{0\}}{\underset{\parallel}{N_0}} \oplus \langle \eta^2(u_{31}) \rangle$$

$$M_n(\{\cdot\}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2° Semestre

16/2/2015

ESPACIOS AFINES

1. Espacio afín.

Definición

Un espacio afín es una terna (A, V, φ) donde:

i) A es un conjunto

ii) V es un k-espacio vectorial de dimensión finita

iii) $\varphi : A \times A \longrightarrow V$ es una aplicación tal que:

i) $\forall\, p \in A \quad \varphi_p : A \longrightarrow V$ dada por $\varphi_p(q) = \varphi(p,q)$ es biyectiva

ii) $\forall\, p, q, r \in A \Longrightarrow \varphi(p,q) + \varphi(q,r) = \varphi(p,r)$ (Chasles)

Chasles

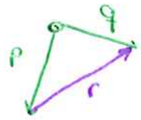
$\varphi(p,q) = \vec{pq} = u \in V$

$\dim_k A = \dim_k V = 0 \Longrightarrow V = \{0\} \Longrightarrow A = \{p\}$

$\vec{A} = V \qquad A \times V \longrightarrow A$

$(p, u) \longmapsto p+u$

$p + u = p + \vec{pq} = q \quad q \in A$ único



Ejemplo.

$A = V = k^2 = \{(a_1, a_2) : a_i \in k\}$

$\varphi : k^2 \times k^2 \longrightarrow k^2$

$(a_1, a_2), (b_1, b_2) \Longrightarrow (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Verificar que se cumplen las dos propiedades:

i) $\overrightarrow{(a_1, a_2)(b_1, b_2)} + \overrightarrow{(b_1, b_2)(c_1, c_2)} = (b_1 - a_1 ; b_2 - a_2) + (c_1 - b_1, c_2 - b_2) =$

$= (b_1 - a_1 + c_1 - b_1, b_2 - a_2 + c_2 - b_2) = (c_1 - a_1, c_2 - a_2) = \overrightarrow{(a_1, a_2)(c_1, c_2)}$ #

ii) $(a_1, a_2) \in k^2$

$k^2 \longrightarrow k^2$

$(b_1, b_2) \longrightarrow \overrightarrow{(a_1, a_2)(b_1, b_2)}$ ¿Biyectiva?

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2)$

Supongamos: $(b_1-a_1, b_2-a_2) = (c_1-a_1, c_2-a_2) \Rightarrow b_1=c_1, b_2=c_2$

$\Rightarrow (b_1, b_2) = (c_1, c_2) \longrightarrow$ Inyectiva.

$u = (u_1, u_2) \in k^2 = V$

$u \overset{?}{=} \overrightarrow{(a_1, a_2)(b_1, b_2)}$, para algún $(b_1, b_2 \in k^2)$

El vector $(u_1, u_2) = (b_1-a_1, b_2-a_2)$ tienen que existir a y b

$b_1 = u_1 + a_1 \qquad b_2 = u_2 + a_2$.

Operaciones

suma : $V \times V \longrightarrow V$

$\varphi : A \times A \longrightarrow V$

$A \times V \longrightarrow A$ (vector y punto)

$(p, u) \longmapsto p+u$

$p+u = q \iff u = \overrightarrow{pq}$

Propiedades

i) $\overrightarrow{pq} = 0 \iff p = q$

ii) $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$

iii) $\overrightarrow{pq} = \overrightarrow{rs} \iff \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{qs}$

Demostraciones.

i) "$\Longrightarrow$" $\quad q = p + \overrightarrow{pq} = p + 0 = p + \overrightarrow{pp} = p$

"$\Longleftarrow$" $\quad \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} + \overrightarrow{pp} = \overrightarrow{pp} = 0$

ii) $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \overrightarrow{pp} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$

iii) "$\Longrightarrow$" $\quad \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{rs} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qs}$

16/2/2015

Definición Sea R referencia afín :

$R = \{ O ; B \}$ O (centro) punto del espascio afín (A)

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base del espacio vectorial

$p \in A \Rightarrow \overrightarrow{Op} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$p = (x_1, \dots, x_n)_R$

$A = V = k^n$

Definición

$R_c = \{ O = (0, \dots, 0) ; B_c \}$; $B_c = \{e_1, \dots, e_n\}$

$p = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$

$\overrightarrow{Op} = p - O = (x_1 - 0, \dots, x_n - 0) = (x_1, \dots, x_n)_{B_c} \Rightarrow p = (x_1, \dots, x_n)_{R_c}$

R_c es la referencio afín canónica.

Definición Sea R la referencia afín y S el sistema de referencia de A

$R = \{O ; B\} = \{O ; \{u_1, \dots, u_n\}\}$

$S = \{O' ; B'\} = \{O' ; \{v_1, \dots, v_n\}\}$ Sistema de referencia de A

$p \in A \Longrightarrow \begin{cases} p = (x_1, \dots, x_n)_R \Longleftrightarrow \overrightarrow{Op} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n \\ p = (y_1, \dots, y_n)_S \Longleftrightarrow \overrightarrow{O'p} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \\ OO' = (b_1, \dots, b_n)_B \Longleftrightarrow OO' = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n \end{cases}$

$\overrightarrow{Op} = \overrightarrow{Op} + \overrightarrow{O'p} \Longrightarrow x_1 u_1 + \dots + x_n u_n = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n + y_1 v_1 + \dots + y_n v_n \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1 u_1 + \dots + b_n u_n + y_1 \underbrace{(\underline{a_{11}} u_1 + \dots + \underline{a_{n1}} u_n)}_{v_1} + \dots + y_n \underbrace{(\underline{a_{1n}} u_1 + \dots + \underline{a_{nn}} u_n)}_{v_n}$

$x_1 = b_1 + a_{11} y_1 + \dots + a_{1n} y_n$

$\vdots$

$x_n = b_n + a_{n1} y_1 + \dots + a_{nn} y_n$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = M(B'B) =$$

= matriz de paso.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} + M(B'B) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B',B) \\ b_n & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B',B) \\ b_n & \end{array}\right) = M(S,R)$$

17/2/2015

Ejemplo $\mathbb{R}^3$, R_c, $R = \{p(1,0,1)$; $B = \{u_1 = (1,1,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,0,1\}\}$

¿Matriz de paso R_c, R?

Métodos hallar Matriz.

Primer método

$$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M(B_c, B) \\ b_3 & \end{array}\right)$$

$(b_1, b_2, b_3)_R = O = (0,0,0)$ — O centro canónico $(0,0,0)$

p centro $R = (1,0,1)$

$\overrightarrow{PO} = (-1, 0, -1)$

$$M(B_c, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$B_c = \{ \underset{\overset{\shortparallel}{e_1}}{(1,0,0)}, \underset{\overset{\shortparallel}{e_2}}{(0,1,0)}, \underset{\overset{\shortparallel}{e_3}}{(0,0,1)} \}$

$(1,0,0) = e_1 = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0)$

$\boxed{a_{11} = 0}$ $\boxed{a_{21} = 0}$ $\boxed{a_{31} = 1}$

$(0,1,0) = e_2 = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0)$

$\boxed{a_{12} = 0}$ $\boxed{a_{22} = 1}$ $\boxed{a_{32} = -1}$

$(0,0,1) = e_3 = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0)$

$\boxed{a_{13} = 1}$ $\boxed{a_{23} = -1}$ $\boxed{a_{33} = 0}$

17/2/2015

$$M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b_1, b_2, b_3)_R =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\overrightarrow{PO}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Segundo método

$$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \quad 0 \quad 0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M(B_c, B) \\ b_3 & \end{array}\right)$$

$(b_1, b_2, b_3)_R$ mismo proceso

$$M(B_c, B) \cdot \overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$M(B_c, B) = M(B, B_c)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \underbrace{1}_{u_1} & \underbrace{0}_{u_2} & \underbrace{0}_{u_3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -1 \qquad M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Adj(M^t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \frac{Adj(M^t)}{\det M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Tercer método

$$M(R_c, R) = M(R, R_c)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ p & u_1 & u_2 & u_3 \end{array}\right)^{-1}$$

Operar sólo filas

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Definición

Sea $p \in A$, $W < V$

$X = p + W = \{p + u : u \in W\}$, siendo X una subvariedad afín de A que pasa por P y cuya dimensión es W

Ejemplo $A = k^2$, $p = (1, 2)$, $w : x - 3y = 0$ $\quad \dim_k W = 1 \quad W = \langle (3, 1) \rangle$

$p + w = \{(1, 2) + \lambda(3, 1) : \lambda \in k\} = \{(1 + 3\lambda), (2 + \lambda) : \lambda \in k\}$

$$p + w : \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in k$$

$q \in p + w \iff q = p + u \iff \overrightarrow{pq} = u \in W$

$q = (x, y) \in p + w \iff \overrightarrow{pq} \in W \iff (x - 1, y - 2) \in W$

$\iff (x - 1) - 3(y - 2) = 0 \iff x - 3y + 5 = 0$ //

17/2/2015

Proposición $x = p + W \Longrightarrow x = q + W \quad \forall q \in x$

Demostración

Sea $r \in p + W \overset{?}{\Longrightarrow} r \in q + W$

$r = p + u = p + \overrightarrow{pr} = p + \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = q + \boxed{\overrightarrow{qr}} \in W$

$\overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \underbrace{-\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{pr}}_{\text{Están en W porque q y r lo están.}}$

$u \in W \qquad u = \overrightarrow{ps}$ único

$r = p + \overrightarrow{ps} = s.$

Definición Sea $X \subset A$ (subconjunto de A) $\Rightarrow \vec{X} = \{\overrightarrow{pq} : p, q \in X\}$

Proposición

Sea $x = p + W \Longrightarrow \begin{cases} \vec{x} = W \\ p \in x \;\; (p = p + 0 = p + \overrightarrow{pp}) \in W \end{cases}$

Demostración

"$\subseteq$" $q, r \in x = p + W$, ¿$\overrightarrow{qr} \in W$?

$$\left.\begin{array}{l} q = p + u \\ r = p + v \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{qp} + \overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pr} - \overrightarrow{pq} = v - u \in W$$

$u, v \in W$

"$\supseteq$" $u \in W \Rightarrow \exists!\; s \in A : u = \overrightarrow{ps} \Longrightarrow s = p + u \in p + W = x$

$u = \overrightarrow{ps}$; $p, s \in X \Rightarrow u \in \vec{X}$

Definición

$\dim p + W := \dim_K W$

Propiedades. (dim p.)

* dim = 0 ⇒ puntos afines
* dim = 1 ⇒ rectas afines
* dim = 2 ⇒ planos afines
* Dim = n - 1 ⇒ hiperplanos afines

19/2/2015

Lema. Intersección

Sea $x, x' \subset A$, $x = p_0 + W = p + W$; $x' = p_0' + W' = p' + W'$

entonces:

i) $x \cap x' = \emptyset$

ii) P(punto) $\in x \cap x' \Rightarrow x \cap x' = p + W \cap W'$

$W = \vec{x}$, $W' = \vec{x'}$

Demostración ii)

$$q \in x \cap x' \Rightarrow \underset{u \in W \,,\; u' \in W'}{q = p + u = p + u'} \Rightarrow \begin{cases} u = \overrightarrow{pq} \\ u' = \overrightarrow{pq} \end{cases} \Rightarrow u = u' \in W \cap W'$$

$$\Rightarrow q = p + u \in p + W \cap W'$$

"recíproco"

$$p + W \cap W' \subseteq (p + W) \cap (p + W') = x \cap x'$$

Proposición. Fórmula Grassmann

$$\dim x \cap x' \underset{\boxed{x \cap x' \neq \emptyset}}{=} \dim \overrightarrow{x \cap x'} = \dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim (W + W')$$

$$= \dim x + \dim x' - \dim (W + W')$$

Observación

Supongamos las ecuaciones cartesianas

$$x : \begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} \quad m\text{-ecuaciones} \qquad (x_1 \dots x_n)_R = q \in x$$

$$x' : \begin{cases} a'_{11} x_1 + \dots + a'_{1n} x_n = b'_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a'_{n1} x_1 + \dots + a'_{pn} x_n = b'_n \end{cases} \quad p\text{-ecuaciones}$$

$x \cap x' \Longrightarrow m + p$ linealmente independiente

19/2/2015

Proposición Soma

$X = P_0 + W \subset A$

$X' = P_0' + W' \subset A$

Definición ~~soma~~ $X + X' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle$

Observación

i) $X + X'$ variedad de A

ii) $X, X' \subset X + X'$

Demostración

$X = P_0 + W \subseteq P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0} \rangle = X + X'$

$X' = P_0' + W' = P_0 + \overrightarrow{P_0 P_0'} + W' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle =$

$= X + X'$

iii) $X, X' \subset Y$ variedad $\Rightarrow X + X' \subset Y$

Demostración

$X + X' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \overset{?}{\subseteq} Y$

$P_0 \in X \subseteq Y \Longrightarrow P_0 \in Y$

$X \subset Y \Rightarrow \bar{X} \subseteq \bar{Y}$

$X = P_0 + \bar{X} \qquad Y = P_0 + \bar{Y}$

$\forall u \in \bar{X} \qquad P_0 + u \in P_0 + \bar{Y} \quad // \quad P_0 + u = P_0 + v \;, v \in \bar{Y}$

$q = P_0 + u \qquad u = \overrightarrow{P_0 q} \;, \; v = \overrightarrow{P_0 q} \qquad u = v$

$$\left\{ \begin{array}{l} X \subset Y \Rightarrow W \subseteq \bar{Y} \\ X' \subset Y \Rightarrow W' \subseteq \bar{Y} \\ \underset{Y}{\underset{\cap}{P_0}} \in X \;, \quad \underset{Y}{\underset{\cap}{P_0'}} \in X' \Longrightarrow P_0, P_0' \in Y \Rightarrow \overrightarrow{P_0 P_0'} \in \bar{Y} \end{array} \right.$$

$W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \subseteq Y$

$X + X' = P_0 + W + W' + \langle \overrightarrow{P_0 P_0'} \rangle \subseteq P_0 + \bar{Y} = Y$

$$M_{h_0}(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Proposición Si ϕ es afín, $h_0(\overrightarrow{p_0 p}) = \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)}$ lineal, entonces $h_1(\overrightarrow{p_1 p}) = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p)}$ es lineal y $h_0 = h_1$

Demostración

$$h_1(\overrightarrow{p_1 p}) = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p)} = \overrightarrow{\phi(p_1)\phi(p_0)} + \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} =$$

$$= -\overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p_1)} + \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(p)} = -h_0(\overrightarrow{p_0 p_1}) + h_0(\overrightarrow{p_0 p}) \underset{\substack{\uparrow \\ h_0 \text{ linealmente} \\ \text{afín}}}{=}$$

$$= h_0(u) = h_1(u) \quad \forall u \in V \Longrightarrow h_0 = h_1$$

Como h_0 es lineal h_1 es linealmente afín #

Previo - definición

$$\phi, \vec{\phi}(\underset{\substack{\shortparallel \\ u}}{\overrightarrow{pq}}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$$

$$\phi(\overrightarrow{p_0 q}) = \overrightarrow{\phi(p_0)\phi(q)} \Longleftrightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(\overrightarrow{p_0 q}) \underset{\substack{\uparrow \\ q = p_0 + u}}{=} \phi(p_0) + \vec{\phi}(u)$$

Definición

$$\phi, \bar{\phi}(\overline{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$$

$$q = p + u \Longrightarrow \phi(q) = \phi(p) + \bar{\phi}(u)$$

$\phi : A \longrightarrow A'$ afín

$R = \{P_0; B\}$ dim $A = n$

$R' = \{P_0'; B'\}$ dim $A' = m$

$q = (x_1, \dots, x_n)_R \in A$

$\Rightarrow$

$\phi(q) = (x_1', \dots, x_m')_{R'} \in A'$

$\phi(P_0) = (h_1, \dots, h_m)_{R'} \in A'$

$\phi(q) = \phi(P_0) + \vec{\phi}(\overrightarrow{P_0 q})$

$$\underbrace{\phi(q) - \phi(P_0)}_{\substack{\shortparallel \\ (x_1' - h_1, \dots, x_m' - h_m)_{R'}}} = \underbrace{\vec{\phi}}_{\text{ap. lineal}}(\overrightarrow{P_0 q})$$

Continuación definición

24/2/2015

Vamos a sacar la matriz de la aplicación

$\overrightarrow{P_0q} = (x_1, \dots, x_n)_B$

$M_{\vec{\phi}}(B, B') \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$

$$\begin{pmatrix} x_1' - b_1 \\ \vdots \\ x_m' - b_m \end{pmatrix} = M_{\vec{\phi}}(B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + M_{\vec{\phi}}(B, B') \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\vec{\phi}}(B, B') \\ b_m & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Mat_{(n+1)\times(m+1)}(K)$$ (matriz de la aplicación afín)

$$M_{\phi}(R, R') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\vec{\phi}}(B, B') \\ b_m & \end{array}\right)$$

Ejemplo I (caso 1)

$\phi : A \longrightarrow A' \quad P_0' \in A'$

$\phi(p) = P_0' \quad \forall p \in A$

$R = \{P_0, B\} \quad R' = \{P_0', B'\}$

$\vec{\phi} = 0$

$\phi(P_0) = P_0' = (0, \dots, 0)_R$

$\overrightarrow{P_0' P_0'} \qquad M_{\phi}(R, R') = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & O \\ 0 & \end{array}\right)$

Ejemplo II (caso II)

$\phi : A \longrightarrow A \qquad A = A' \qquad n = m$

$A = A' \Rightarrow R = R'$

$\phi(p) = p \quad \forall p$

$\vec{\phi} = id_V \Longrightarrow M_{\vec{\phi}}(B, B) = I_n$

$R = \{ P_0 ; B \}$

$P_0 = \phi(P_0) = (h_1, \dots, h_n)$ $\qquad R = (0, \dots, 0)_R$

$\overrightarrow{P_0 P_0} = 0$

$M id(R) = I_{n+1}$

Traslación del vector u_0

Sea $\phi : A \longrightarrow A$, $u_0 \in V$

$\phi(p) = p + u_0$

Vamos a ver qe es afín

$$\underbrace{\vec{\phi}(\overrightarrow{pq})}_{¿Lineal?} = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{p+u_0\, q+u_0} = \overrightarrow{pq}$$

$\vec{\phi} = id_V$ lineal

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & I_n \\ b_n & \end{array}\right)$$

$(h_1, \dots, h_n)_R = \phi(P_0)$

$$\overrightarrow{P_0\, \phi(P_0)} = (h_1, \dots, h_n)_B$$
$$\shortparallel$$
$$\overrightarrow{P_0 P_0 + u_0} = u_0$$

Proposición

Sea la aplicación afín $\phi : A \longrightarrow A$ son equivalentes

i) ϕ es traslación

ii) $\vec{\phi} = id_V$ ⇔ ⇗? x ver.

Pensar en si partimos de una ap afín $\Longrightarrow$ ϕ es traslación cuya ap lineal asociada es Id_n

26/12/2015

Traslación del vector u_0

Las traslaciones son aplicaciones afines $\phi : A \longrightarrow A$ cuya aplicación lineal asociada es la identidad.

Proposición

$$\phi : A \longrightarrow A,\ \bar{\phi} = id : V \longrightarrow V \Longrightarrow \text{traslación}$$

Demostración

$$\forall p,q \in A \Longrightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}}}{\bar{\phi}(\overrightarrow{pq})} = \overrightarrow{pq} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ley paralelogramo}}}{\Longrightarrow} \overrightarrow{p\phi(p)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ u \\ \text{(vector cte)}}}{\overrightarrow{q\phi(q)}} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \phi(p) = p + \overrightarrow{p\phi(p)} = p + u \Longrightarrow \phi \text{ es traslación de vector } u.$$

Matriz traslación

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \{p_i, B\}}}{M_\phi(R)} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & & & \\ \vdots & & I_n & \\ b_n & & & \end{array}\right) \qquad (b_1, \dots, b_n)_R = u$$

Observación.

Una traslación siempre es biyectiva $\Longrightarrow \phi = \tau_u \Longrightarrow \exists\, \phi^{-1} = \tau_{-u}$

Demostración

Composición de una traslación de u y su inversa

$$(\tau_{-u} \circ \tau_u)(p) = \tau_{-u}(p+u) = p + u + (-u) = p \quad \#$$

Composición traslaciones

$$\tau_v \circ \tau_u(p) = (p+u)+v = p+(u+v) = \tau_{u+v}$$

$* \ \tau_0 = id_A$

Observación

El conjunto de traslaciones, $(\underset{\substack{\shortparallel \\ T(A)}}{\{\tau \mid \tau : A \longrightarrow A} \text{ es traslación}, \circ)$ es un grupo conmutativo

$$(T(A), \circ) \cong (V, +)$$

$$\tau_u \longmapsto u$$

Puntos fijos aplicación afín.

Definición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$, aplicación afín

$A\phi = \{p \in A : \phi(p) = p\} \subseteq A$ (ptos fijos de la ap. afín)

Proposición

i) Para que A_0 sea único , $A\phi = p + V\bar{\phi},1$: $V\bar{\phi},1 = 0$.

*importi ii) regla. $A\phi \neq \emptyset \Longrightarrow A\phi = p + V\bar{\phi},1$, siendo $p \in A\phi$

$V\bar{\phi},1$ es la dirección del punto = subespacio propio para el autovalor 1.

Demostración $A\phi \neq \emptyset \Rightarrow A\phi = p + V\bar{\phi},1$

"$\supseteq$" |

Supongamos que $q = p + u$, $u \in V\bar{\phi},1 \Longrightarrow \phi(q) = \phi(p) + \bar{\phi}(u) =$

$\overset{p \in A\phi}{=} p + u = q \Longrightarrow q \in A\phi$ #

"$\subseteq$" |

Supongamos $q \in A_0 \Rightarrow q = p + \overrightarrow{pq} \in p + \langle \overrightarrow{pq} \rangle$ "

$\bar{\phi}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{pq} \Longrightarrow \overrightarrow{pq} \in V\bar{\phi},1$ porque la imagen pq es la misma. #

Homotecia

Definición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ afín , es homotecia (de razón $r \neq 0, 1$)

si $\bar{\phi} = r \cdot id_V$

26/12/2015

Observación . Matriz homotecia

$$\underset{\{p_i, B\}}{\overset{}{M_\phi(R)}} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \begin{matrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r \end{matrix} \\ \vdots & \\ b_n & \end{array}\right)$$

matriz correspondiente

La matriz correspondiente, no cambia según las bases, ya que simplement es $r \times Id$.

Observación punto fijo - centro.

Sea un punto $(x_1, \dots, x_n)_R \in A\phi$ (pto fijo) entonces

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline b_1 & \begin{matrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r \end{matrix} \\ \vdots & \\ b_n & \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} b_1 + (r-1)x_1 = 0 \\ \vdots \\ b_n + (r-1)x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{1-r} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{1-r} \end{cases} \implies \exists!\, c \text{ (existe ún único punto fijo = c)}$$

$$c = \left(\frac{b_1}{1-r}, \dots, \frac{b_n}{1-r}\right)_R \in A\phi$$

* Es una aplicación biyectiva , $\phi(c) = c \implies c$ es el centro homotecia

Si $V_{\bar{\phi}, 1} = \{0\} \implies$ congruente con todo

$\phi = r \cdot id_V \implies V_{\bar{\phi}, r} \underset{\boxed{r \neq 1}}{=} V$

$$M_\phi(\{\underset{\uparrow}{c}; B\}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots 0 \\ \hline 0 & \begin{matrix} r & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & r \end{matrix} \\ \vdots & \\ 0 & \end{array}\right)$$

punto fijo
"
centro

Porque $\overrightarrow{c\phi(c)}$ está en función de B $\Rightarrow \overrightarrow{c\phi(c)} = \{0\}$

Vamos a hallar c de forma algebraica y no por coordenadas

Veamos , $c = p + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)}$ p = pto cualquiera

$$\phi(c) = \phi(p) + \vec{\phi}\left(\frac{1}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)}\right) =$$

$$= \phi(p) + \frac{1}{1-r}\vec{\phi}\left(\overrightarrow{p\phi(p)}\right) = \phi(p) + \frac{r}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)} =$$

$$= p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{r}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)} = p + \left(1 + \frac{r}{1-r}\right)\overrightarrow{p\phi(p)} =$$

$$= p + \frac{1}{1-r}\overrightarrow{p\phi(p)} = c \quad \#$$

Como la aplicación es homotecia $\exists !$ solución $\Longrightarrow$ biyectiva

Notas homotecia.

- Id = homotecia
- Inversa de homotecia sigue siendo homotecia
- La composición de homotecias no es homotecia

Proyecciones

Definición

- Sea $\phi : A \to A$ una aplicación afín , es una proyección si $\phi^2 = \phi$, es decir $\phi \circ \phi = \phi$.
- Se define la proyección como lineal y vectorial con base $V_{\phi,1}$ y dirección $\ker\phi = V_{\phi,0}$

- $V = V_{\phi,1} \oplus \ker \phi$

$$\begin{array}{cccc} V = & V_{\phi,1} & \oplus & \ker\phi \\ & \| & & \| \\ u = & u_1 & + & u_2 \\ & \| & & \\ & \boxed{\phi(u)} & & \end{array}$$

ϕ : es proyección afín con base $\underbrace{\mathrm{Im}\,\phi}_{\substack{\| \\ \text{variedad afín}}}$ y dirección $\underbrace{\ker\vec{\phi}}_{\text{subespacio vectorial.}}$

26/2/2015

Observación

i) $\phi^2 = \phi \implies \vec{\phi}^{\,2} = \vec{\phi}$

Demostración

op. a |

$$\vec{\phi}^{\,2} = \vec{\phi}\circ\vec{\phi} \overset{?}{=} \overrightarrow{\phi\circ\phi} = \overrightarrow{\phi^2} = \vec{\phi} \quad \#$$

op. b (sin usar igualdad) |

$$\forall\, p,q \in A,\ \vec{\phi}^{\,2}(\vec{pq}) = \vec{\phi}(\vec{\phi}(\vec{pq})) = \vec{\phi}\big(\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}\big) =$$

$$= \overrightarrow{\phi(\phi(p))\,\phi(\phi(q))} = \overrightarrow{\phi(p)\,\phi(q)} = \vec{\phi}(\vec{pq}) \quad \#$$

ii) $A_\phi \neq \underset{\text{no vacío}}{\emptyset} \implies A_\phi = p + V_{\vec{\phi},1} \qquad p \in \operatorname{Im}\phi$

$$(\emptyset \neq \operatorname{Im}\phi \subseteq A_\phi \implies A_\phi = \operatorname{Im}\phi)$$

conclusión

Demostración

$$\text{Sea } q \in A_o \implies q = p + \vec{pq} \implies \underset{\overset{\shortparallel}{q}}{\phi(q)} = \underset{\overset{\shortparallel}{p}}{\phi(p)} + \vec{\phi}(\vec{pq})$$

$$\implies \vec{pq} = \vec{\phi}(\vec{pq}) \implies \vec{pq} \in V_{\phi,1} \implies q \in p + V_{\vec{\phi},1} \quad \#$$

ϕ : proyección afín con base $\operatorname{Im}\phi$ y dirección $\ker\vec{\phi} = V_{\vec{\phi},0}$

iii) $\{\phi(q)\} \overset{?}{=} \underbrace{\operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\vec{\phi})}_{\text{se cortan}}$

27/2/2015

Demostración

1. ¿$\phi(q) \in q + \ker\vec{\phi}$?

$\phi(q) = q + \overrightarrow{q\phi(q)} \qquad$ ¿$\overrightarrow{q\phi(q)} \in \ker\vec{\phi}$?

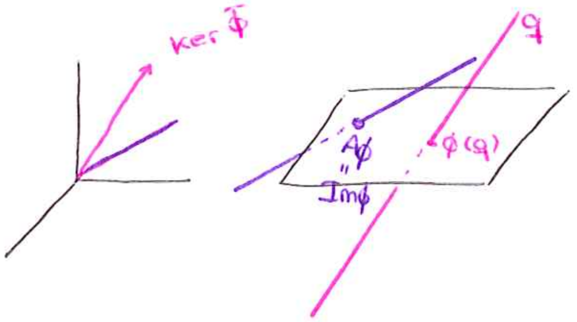
$$\phi(\overrightarrow{q\phi(q)}) = \overrightarrow{\phi(q)\phi^2(q)} = \overrightarrow{\phi(q)\phi(q)} = 0$$

2. $\operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\vec{\phi})$

$$\phi(q) + W,\ W = \operatorname{Im}\vec{\phi} \cap \ker\vec{\phi} = A_{\vec{\phi}} \cap \ker\vec{\phi} = V_{\vec{\phi},1} \cap \ker\vec{\phi} = \{0\}$$

$$\operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\vec{\phi}) = \phi(q) + \{0\} = \{\phi(q)\} \quad \#$$

Observación



Las proyecciones no son biyectivas

Las proyecciones son idelpotentes ?

Proposición

$\dim \mathrm{Im}\,\phi = \dim A_\phi = \dim V_{\bar{\Phi},1} \leq \dim V$

Definición Matriz

$$M_\phi(\{p_i ; B\}) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \cdots\cdots 0 \\ \hline 0 & \\ \vdots & M_{\bar{\phi}}(B) \\ 0 & \end{array}\right)$$

$V = V_{\bar{\Phi},1} \oplus V_{\bar{\Phi},0} \Longleftrightarrow \bar{\Phi}^2 = \bar{\Phi}$

$B = \{u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$\overrightarrow{p\phi(p)} = \overrightarrow{pp} = 0$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 \cdots\cdots & 0 \\ \hline 0 & \overset{r}{1 \ddots 1} & \\ \vdots & & \\ 0 & & \overset{n-r}{0 \ddots 0} \end{array}\right)$$

Ejemplillo.

$q = x^2 - x = x(x-1)$

$$q_{\bar{\Phi}} = \begin{cases} x \Longrightarrow \bar{\Phi} = 0 \\ x-1 \Longrightarrow \phi = id_V \\ x(x-1) \end{cases}$$

Simetrías

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín én $\chi(K) \neq 2$, es una simetría si y solo sí $\vec{\Phi}^2 = id_A$

- * $\vec{\Phi} : V \longrightarrow V$ simetría vectorial de base $V_{\vec{\Phi},1}$ y dirección $V_{\vec{\Phi},-1}$
- * $V = V_{\bar{\Phi},1} \oplus V_{\bar{\Phi},-1}$

$\shortparallel$

$u = u_1 + u_2 \qquad \vec{\Phi}(u) = u_1 - u_2$

27/2/2015

Propiedades

i) $\vec{\phi}^{\,2} = id_V$

→ $\phi \circ \phi = id_A$ $\Longrightarrow$ Simetrías son biyectivas.

ii) $A_\phi \neq \underset{\text{vacío}}{\phi}$ $\quad A_\phi = p + V_{\vec{\phi},1}$ (ϕ es simetría con base $Im\,\phi$ y dirección $V_{\bar{\phi},0} = \ker \bar{\phi}$)

Demostración

$$p \in A \Longrightarrow \begin{cases} p \in A_\phi \\ p \notin A_\phi \Longrightarrow p + \overset{\text{pto medio}}{\boxed{\frac{1}{2}}}\, \overrightarrow{p\,\phi(p)} \in A_\phi \end{cases}$$

$$\phi\left(p + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)}\right) = \phi(p) + \frac{1}{2}\,\phi\left(\overrightarrow{p\,\phi(p)}\right) =$$

$$= p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)\,\phi^2(p)} = p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(p)p} =$$

$$= p + \overrightarrow{p\phi(p)} + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} = p + \frac{1}{2}\overrightarrow{p\phi(p)} \qquad ⋕$$

iii) $\{\phi(q)\} = A_\phi \cap (q + V_{\bar{\phi},-1})$

$\{\phi(q)\} = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$

Demostración

1. $q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in A_\phi$

$$q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in q + V_{\bar{\phi},-1}$$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} \in V_{\bar{\phi},-1}$$

$$\phi\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}\right) = \frac{1}{2}\bar{\phi}\left(\overrightarrow{q\phi(q)}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(q)\phi^2(q)} =$$

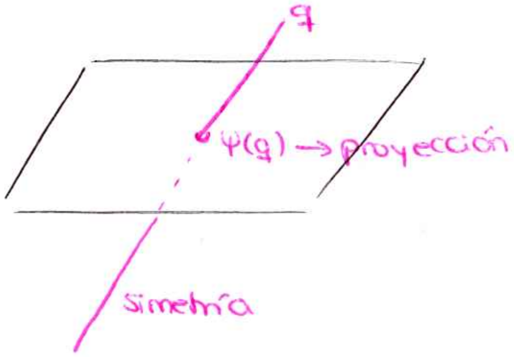
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{\phi(q)q} = \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$$

2. "$\subseteq$" $A_{\vec{\phi}} \cap V_{\vec{\phi},-1} = V_{\bar{\phi},1} \cap V_{\bar{\phi},-1} = \{0\}$

$$(q + V_{\bar{\phi},-1}) = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)} + \{0\} = \{q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}\}$$

#

Observación



$$A \longrightarrow A$$

$$q \longmapsto q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$$

$$V_{\vec{\psi},0} = V_{\vec{\phi},-1}$$

$$\psi = m$$

Definición matriz.

$R = \{p \,;\, B\}$ $\quad B \in A_\phi \quad$ $B = \{\underbrace{u_1, \dots, u_r}_{V_{\bar{\phi},1}}, \underbrace{u_{r+1}, \dots, u_n}_{V_{\bar{\phi},-1}}\}$

$$M_\phi(R) = \text{matriz canónica} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \hline 0 & I_r & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

Observación

La aplicación identidad es una simetría.

2/3/2015

Aplicaciones afines

Proposición

Sea, ϕ y $\psi : A_1 \longrightarrow A_2$ aplicaciones afines tal que $\phi(p) = \psi(p)$ $\quad p \in A_1$ y $\bar{\phi} = \bar{\psi}$. Entonces $\phi = \psi$.

Demostración

$$\forall \underset{\substack{\parallel \\ p+u,\ u \in V_1}}{q} \in A_1, \ \phi(q) = \phi(p) + \bar{\phi}(u) = \psi(p) + \psi(u) = \psi(q)$$

2/3/2015

Proposición II

Sean A_1, A_2 espacios afines y $p \in A_1$; $p' \in A_2$, $h : V_1 \longrightarrow V_2$ es la aplicación lineal. Existe una única $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ afín tal que $\phi(p) = p'$ y $\vec{\phi} = h$.

Demostración

- Unicidad, se cumple por la propiedad
- Existencia ¿$\phi : A_1 \longrightarrow A_2$? $q \in A_1 \Rightarrow q = p + u$,

$u \in V_1$

$\phi(q) = p' + h(u) \in A_2$

¿ϕ afín? ✓ $\quad \phi(p) = p' + \underbrace{h(0)}_{\text{lineal}} = p' + 0 = p'$

¿$\phi(p) = p'$?

¿$\vec{\phi} = h$? $\quad \vec{\phi}(u) = h(u) \quad \forall\, u \in V_1$

$u = \overrightarrow{pq} \qquad q \in A_1$

$$\vec{\phi}(u) = \vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} = \overrightarrow{\underbrace{p'}_{\text{por lo anterior}}\phi(q)} \underset{\text{definición}}{=} h(u)$$

#

Proposición III

Sean A_1, A_2 espacios afines, $p \in A_1$ $p' \in A_2$ y $\{u_1, \ldots, u_n\}$ es base de V_1 , y $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq V_2 \Rightarrow$ Existe una única aplicación afín $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ tal que $\phi(p) = p'$ y $\vec{\phi}(u_i) = v_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$

Proposición IV

Sean A_1, A_2 espacios afines, $\{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ es la referencia afín de A_1 $\{p_0', p_1', \ldots, p_n'\} \subseteq A_2$. Existe una única aplicación afín $\phi : A_1 \longrightarrow A_2 : \phi(p_i) = p_i' \quad \forall i = 0, \ldots, u$.

$P = P_0 \qquad P' = P_0$

$$\text{Base de } V_1 \left\{ \begin{array}{ll} u_1 = \overrightarrow{P_0P_1} & v_1 = \overrightarrow{P_0'P_1'} \\ \vdots & \vdots \\ u_n = \overrightarrow{P_0P_n} & v_n = \overrightarrow{P_0'P_n'} \end{array} \right.$$

Proposición Carácter biyectivo, inyectivo, suprayectivo que hay entre una aplicación afín y una lineal

Sea $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ aplicación afín, $\vec{\phi} : V_1 \longrightarrow V_2$

i) ϕ inyectiva $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ inyectiva

ii) ϕ suprayectivo $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ suprayectiva

iii) ϕ biyectiva $\Longleftrightarrow$ $\vec{\phi}$ biyectiva

Demostración

i) "$\Longrightarrow$" $0 = \vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} \Longrightarrow \phi(p) = \phi(q) \Longrightarrow p = q$

$\Longrightarrow \underbrace{\overrightarrow{pq}}_{\in \phi} = 0$

"$\Longleftarrow$"

$\underbrace{\overrightarrow{pq}}_{\in \phi} = 0 \Longrightarrow p = q \Longrightarrow \phi(p) = \phi(q) \Longrightarrow \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)} =$

$= \phi(\overline{pq}) = 0$

#

ii) de forma similar

iii) Por la demostración i y ii.

Definición Afinidad.

Aplicación afín de A en A biyectiva

3/3/2015

Proposición . Composición aplicaciones afines

Sean ϕ, φ aplicaciones afines tal que $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\varphi} A_3$ y $V_1 \xrightarrow{\vec{\phi}} V_2 \xrightarrow{\vec{\varphi}} V_3$ espacios afines. Se verifica que:

i) $\varphi \circ \phi$ es afín

ii) $\overrightarrow{\varphi \circ \phi} = \vec{\varphi} \circ \vec{\phi}$

Demostraciones

ii) Sean $p, q \in A_1$, $\overrightarrow{\varphi \circ \phi}(\vec{pq}) = \overrightarrow{(\varphi \circ \phi)(p)\,(\varphi \circ \phi)(q)} =$

$= \overrightarrow{\varphi(\phi(p))\,\varphi(\phi(q))} = \vec{\varphi}\,(\overrightarrow{\phi(p)\,\phi(q)}) = \vec{\varphi}\,(\vec{\phi}\,(\vec{pq})) =$

$= (\vec{\varphi} \circ \vec{\phi})(\vec{pq})$ #

i) Sean ϕ, φ afines $\Longrightarrow \vec{\phi}, \vec{\varphi}$ son lineales $\Longrightarrow$ $\vec{\varphi} \circ \vec{\phi}$ es lineal $\Longrightarrow \varphi \circ \phi$ es afín

Proposición

Sea ϕ una aplicación afín , biyectiva , $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2$, $\Longrightarrow \phi^{-1} : A_2 \to A_1$ es afín y $\overrightarrow{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1}$

Demostración

Sea ϕ afín biyectiva $\Longrightarrow \vec{\phi}$ biyectiva $\Longrightarrow \vec{\phi}^{-1}$ es lineal y biyectiva.

$$\overrightarrow{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1} \iff \begin{cases} \vec{\phi} \circ \overrightarrow{\phi^{-1}} = id_{V_2} \; * \\ \\ \overrightarrow{\phi^{-1}} \circ \vec{\phi} = id_{V_1} \end{cases}$$

* Sea $p, q \in A_2$,, $(\vec{\phi} \circ \overrightarrow{\phi^{-1}})(\vec{pq}) = \vec{\phi}\,(\overrightarrow{\phi^{-1}(p)\,\phi^{-1}(q)}) =$

$= \overrightarrow{\phi(\phi^{-1}(p))\,\phi(\phi^{-1}(q))} = \overrightarrow{id_{A_2}(p)\; id_{A_2}(q)} = \vec{pq}$

$\Longrightarrow \phi$ afín y $\overrightarrow{\phi^{-1}} = \vec{\phi}^{-1}$ #

Definición

Sean A_1, A_2 espacios afines. $A_1 \simeq A_2$ (isomorfos) si $\exists$

$\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ afín biyectiva.

Proposición

Sean (A_1, V_1, φ_1), (A_2, V_2, φ_2) espacios afines, $\dim A_1 = n_1$

$\dim A_2 = n_2$, son equivalentes

i) $A_1 \simeq A_2$

ii) $V_1 \simeq V_2$

iii) $u_1 = u_2$

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii)

$\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ isomorfismo afín $\Rightarrow \vec{\phi} : V_1 \longrightarrow V_2$ lineal biyectivo

$\Rightarrow V_1 \simeq V_2$

ii) $\Rightarrow$ i) $h : V_1 \simeq V_2$ isomorfismo lineal $\Rightarrow \phi : A_1 \longrightarrow A_2$ isomorfismo afín, ϕ único tal que $\begin{cases} \phi(p_1) = q_1 \\ \vec{\phi} = h \end{cases}$ $p \in A_1$, $q \in A_2$

$\Rightarrow \phi$ afín biyectiva.

Proposición

La $\dim A = n \Rightarrow A \simeq k^n$

Definición.

Sea V un espacio vectorial sobre $k \Rightarrow GL(V) = \{\phi : V \longrightarrow V \mid \phi$ es lineal y biyectiva$\}$

$(GL(V), \circ)$ grupo isomorfo $(\underset{\uparrow}{\simeq})$ $(Mat_n(k), \cdot) = GL_n(k)$

$\dim_K V = n$

A, V espacio afín $\Rightarrow GA(A) = \{\phi : A \longrightarrow A \mid \phi$ es $\underbrace{\text{afín biyectiva}}_{\text{afinidad}}\}$

$GA(A)$ es el grupo afín del espacio afín

$(GA(A), \circ)$ grupo invariante del espacio

3/3/2015

Proposición

Sea $A_1 \simeq A_2 \Longrightarrow GA(A_1) \simeq GA(A_2)$

Demostración

$\tau : GA(A_1) \Longrightarrow GA(A_2)$

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\phi"] & A_1 \arrow[r, "h"] & A_2 \end{tikzcd}$$

$\tau(\phi) = h \circ \phi \circ h^{-1} \in GA(A_2)$

$\tau(\psi \circ \phi) = \tau(\psi) \circ \tau(\phi)$

Proposición

Sea
$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\phi"] & A_2 \arrow[r, "\psi"] & A_3 \\ R_1 & R_2 & R_3 \end{tikzcd}$$
, se verifica que $M_{\psi \circ \phi}(R_1, R_3) =$

$= M_\psi(R_1, R_3) = M_\psi(R_2, R_3)\, M_\phi(R_1 R_2)$

Caso particular

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "\phi"] & A_2 \arrow[r, "\phi^{-1}"] & A_1 \\ R_1 & R_2 & R_1 \end{tikzcd}$$
ϕ biyectiva

$M_{\phi^{-1}}(R_2 R_1) = M_\phi(R_1 R_2)^{-1}$

matriz de paso

Sea
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "id"] & A \\ R_1 & R_2 \end{tikzcd}$$
. $M_{id}(R_1, R_2) = M(R_1, R_2)$

$M\,id(R_2, R_1) = M(R_1, R_2)^{-1}$

Caso particular

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "id"] & A_1 \arrow[r, "\phi"] & A_2 \arrow[r, "id"] & A_2 \\ R'_1 & R_1 & R_2 & R'_2 \end{tikzcd}$$

$M_\phi(R'_1, R'_2) = M(R_2, R'_2)\, M_\phi(R_1 R_2)\, M(R'_1, R_1)$

Ejemplo . hoja 7 ejc 1

$$M_\phi(R,S) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad R',\ S'$$

$$M_\phi(R',S') = ¿\, M(R',R)\ ,\ M(S,S')\ ?$$

$$R = \{p;\ \{u_1,u_2,u_3\}\}$$

$$R' = \{\underset{\substack{\shortparallel \\ p'}}{p+u_1+2u_3};\ \{\underset{\substack{\shortparallel \\ u'_1}}{u_3},\ \underset{\substack{\shortparallel \\ u'_2}}{u_1+u_2},\ \underset{\substack{\shortparallel \\ u'_3}}{u_2+u_3}\}\}$$

$$M(R',R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad M(S,S') =$$

$$M(S,R') = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \\ M(S',S)^{-1} \end{array} \right.$$

$$u_1 + 2u_3 = p\overrightarrow{p+u_1+2u_3} = \overrightarrow{pp'} = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3$$

Proposición

Sea $\phi: A_1 \longrightarrow A_2$ afín se verifica:

i) $\phi(p+W) = \phi(p) + \vec{\phi}(W)$

ii) $\mathrm{Im}(\phi)$ es variedad

iii) ϕ conserva el paralelismo ($x \parallel y$; $\overrightarrow{\phi(x)} = \vec{\phi}(\vec{x})$)

iv) ϕ conserva la alineacón

3/3/2015

Demostración

i) "$\subseteq$" $\phi(p+u) = \phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(W)$

"$\supseteq$" $$\underbrace{\phi(p) + \vec{\phi}(u)}_{\phi(p+u)} \in \underbrace{\phi(p) + \vec{\phi}(W)}_{\phi(p+W)}$$

$\phi(p+u) \in \phi(p+W)$

✱

5/3/2015

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ la aplicación afín, con $\dim A = 1$, siendo V el espacio vectorial asociado $R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \lambda = M_{\vec{\phi}}(B)$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \phi$ constante, $\phi \equiv (b)_R$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{\phi} = \lambda id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín

$A_\phi = \{p\} \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

Demostración

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

✱ $A_\phi = 1 \Longleftrightarrow$ el sistema $\begin{cases} b_1 + (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{cases}$

tiene solución única $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-1 & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\vec{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

#

Clasificación (aplicaciones afines)

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ afín, $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1, u_2\}\}$.

$(x, y)_R \xmapsto{\phi} (x', y')_R$

I Caso en el que el valor propio es 1

$1 \in \sigma(\bar{\phi})$

	$\sigma(\bar{\phi})$ autovalores	$\dim_K V_{\bar{\phi},1}$	A_ϕ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
i	$\{1\}$	2	$\neq \emptyset$	id_A	$x' = x \quad y' = y$
ii	$\{1\}$	2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
iii	$\{1\}$	1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_ϕ	$x' = x$, $y' = x + y$
iv	$\{1\}$	1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
v ϕ no biyectiva	$\{1, 0\}$	1	$\neq \emptyset$	Proyección de base A_ϕ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ $\lambda =$ razón $\langle u_2 \rangle$ ↓ dirección eje $A_\phi = p + \langle u \rangle$
vi	$\{1, 0\}$	1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
vii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\phi = p + \langle u_1 \rangle$
viii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

5/3/2015

i) $M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $(p \in A_\phi)$

ii) $M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $(b_1, b_2) \neq (0,0)$

$B = \{p \,;\, \{u_1, u_2\}\}$

$\phi = \tau_{u_1}$ u_1 = vector de la traslación

iii) $M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$

iv) $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M_\phi(R)$

v) $M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $u_1 \in V_{\bar\phi, 1}$

$u_2 \in V_{\bar\phi, 0}$

vi) $M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{array}\right)$

vii) $p + au_2 \longmapsto p + a\lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

5/3/2015

(II) Caso $1 \notin \sigma(\bar{\phi}) \iff A_\phi = \{p\}$

	$\sigma(\bar{\phi})$	$\dim_k V_{\bar{\phi},\lambda}$	Ecuaciones
i	$\{\lambda_1, \lambda_2\}$	—	$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y$
ii	$\{\lambda\}$	2	$\phi \equiv cte, \ \lambda = 0$ Homotecia centro p y razón λ $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda \cdot y$
iii	$\{\lambda\}$	1	$x' = \lambda x, \quad y' = x + \lambda y$
iv	$\emptyset$ P_ϕ irreducible $k[x]$		$x' = -a_0 y, \quad y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists$ P_ϕ

iii)

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

iv) P_ϕ irreducible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\phi}) = \emptyset$

Ejemplo. caso iv) $P_\phi = x^2 + a_1 x + a_0$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right) \qquad R = \{p; \{u_1, \bar{\phi}(u_1)\}\} \ \exists\, u_1 \in V$$

6/3/2015

Definición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín, $X \subset A$ la variedad.

X es ϕ - invariante si $\phi(X) \subset X$, es decir, $\phi_{|X} : X \longrightarrow X$ afín

Proposición

Sea $X = p + W$, X es ϕ - invariante $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{p\phi(p)} \in W$ y $\vec{\phi}(W) \subseteq W$

Demostración

Sea $p + w$ ϕ - invariante $\Leftrightarrow \phi(p+w) \subseteq p + w \Leftrightarrow \phi(p) + \vec{\phi}(w) \subset p + w \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \phi(p) \in p + W \\ \vec{\phi}(W) \subset W \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{p\phi(p)} \in W \\ \vec{\phi}(W) \subset W \end{cases}$$

9/3/2015

FORMAS BILINEALES Y CUADRÁTICAS

1. Aplicaciones bilineales

Definición

Las formas bilineales, vamos a tomar que trabajamos en $\chi(k) \neq 2$

Sea $f: V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V$ k-multilineal si

$$f(u_1, \dots, u_{i-1}, a u_i + a' u_i', u'_{i+1}, \dots, u_m) = a f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) +$$

$$+ a' f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1}, \dots, u_m)$$

Observación

$\forall\ i \leq m \ ; a, a' \in k \quad u_i, u_i' \in V_i$

$m = 2$,, f es bilineal ; $V = k$ f es Forma

Proposición

Sea f bilineal y lineal $f: V \times V \longrightarrow k$, $\forall u, v \in V$

$$* \ f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v)$$

$$\shortparallel$$

$$f((u,u)+(v,v)) = f(u,u) + f(v,v)$$

$$\Longrightarrow f(u,v) + f(v,u) = 0 \Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$$

Ejemplo I

$f: k^2 \times k^2 \longmapsto k$

$$f(\underset{u}{\underset{\shortparallel}{(x_1, y_1)}}, \underset{v}{\underset{\shortparallel}{(x_2, y_2)}}) = a_{11} x_1 y_1 + a_{12} x_1 y_2 + a_{21} x_2 y_1 + a_{22} x_1 y_2$$

$a_{ij} \in k$. f bilineal ya que tiene distributividad en el cuerpo k

Ejemplo II

$f : V \times V \longrightarrow k$ bilineal $\dim_k V = 2$

$B = \{u_1, u_2\}$ base de V

Sea $u, v \in V \Longrightarrow f(u,v) = f(\underbrace{x_1u_1 + x_2u_2}_{u}, \underbrace{y_1u_1 + y_2u_2}_{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ bilineal}}}{=}$

$$= x_1y_1 f(u_1,u_1) + x_1y_2 f(u_1,u_2) + x_2y_1 f(u_2,u_1) + x_2y_2 f(u_2,u_2)$$

$$= x_1y_1a_{11} + x_1y_1a_{12} + x_2y_1a_{21} + x_2y_2a_{22} . \qquad a_{ij} = f(u_1, u_j)$$

Ejemplo III

$f : V \times V \longrightarrow K$ $\dim_K V = n$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base de V bilineal

Sea $u, v \in V$; como en el caso anterior nos sale una suma tal que

$$\begin{cases} u = x_1u_1 + \dots + x_nu_n \\ v = y_1u_1 + \dots + y_nu_n \end{cases}$$

$$f(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$$

$a_{ij} = f(u_i, u_j)$ $M_f(B) = (a_{ij}) \in Mat_n(K) = A$

$$f(u,v) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} n=2 \\ (x_1, x_2) \underset{\substack{\| \\ f(u,v)}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

$M(B', B) = P$ $A' = M_f(B')$, $A = M_f(B)$

9/3/2015

Matriz ap. bilineal.

Sea $f : V \times V \longrightarrow k$ bilineal tal que $f(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_j$

$M_f(B)$ = matriz bilineal = $f(u_i, v_j) \in Mat_n(k) = A$

$M(B', B) = P$, $A' = M_f(B')$ y $A = M_f(B)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}$$

$$f(u,v) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \dots x_n') \underbrace{P^t A P}_{\overset{\|}{A'}} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$P^{-1} \neq P^t$

* $A' = A$ si $A' = P^t A P$ $\quad P \in GL_n(k)$

$P^{-1} A' (P^t)^{-1} = A \quad \Longrightarrow (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$

Observación

El determinante es una forma multilineal

Proposición (Bilineal)

* f simétrica si $f(u,v) = f(v,u)$

* f antisémetrica si $f(u,v) = -f(v,u)$

Definición

Sea $Bil_k(V) = \{ f : V \times V \longrightarrow k \mid f$ forma k-bilineal $\}$ y

$(Bil_k(V), +, \cdot)$ k-espacio vectorial

* $(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v)$

* $(af)(u,v) = af(u,v)$

Proposición

$$\begin{array}{ccc} \text{Sea } Bil_K(V) & \xrightarrow[\cong]{} & Mat_n(K) \quad \text{(Biyección)} \\ f & \longmapsto & M_f(B) \end{array}$$

$$\dim_n Bil_K(V) = n^2$$

Observación

* $S_K(V) = \{ f \in Bil_K(V) : f \text{ simétrica} \}$

* $A_K(V) = \{ f \in Bil_K(V) : f \text{ antisimétrica} \}$

$S_K(V), A_K(V) < Bil_K(V)$

Prop. Bil

* $(f+g)(u,v) = f(u,v) + g(u,v) = f(u,u) + g(v,u) = (f+g)(v,u)$
* $(af)(u,v) = af(u,v) = af(v,u) = af(v,u)$

Consecuencia

Partiendo de estar trabajando $\chi(K) \neq 2$ (sino no se puede)

→ $Bil_K(V) = S_K(V) \oplus A_K(V)$

Demostración

$$f \in Bil_K(V) \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(u,v) = \dfrac{f(u,v) + f(v,u)}{2} \quad \text{(simétrica)} \\ \\ f_a(u,v) = \dfrac{f(u,v) - f(v,u)}{2} = \dfrac{-f(v,u) - (-f(u,v))}{2} \end{array} \right.$$

$$= -f_a(v,u) \quad \text{(antisimétrica)}$$

$S_K(V) \cap A_K(V) = \{0\}$

$f \in S_K(V) \cap A_K(V)$

$$f(u,v) = \left\{ \begin{array}{l} f(v,u) \\ -f(v,u) \end{array} \right. \Longrightarrow f(v,u) = -f(v,u) \Longrightarrow 2f(v,u) = 0$$

$$\overset{\chi(K) \neq 2}{\Longrightarrow} f(v,u) = 0$$

Continuación Demostración

9/3/2015

$$\Longrightarrow \boxed{f = f_s + f_a}$$

*

Proposición

$$M_f(B) = (f(u_i, u_j)) = f(u_j, u_i)$$

$$f \text{ simétrica} \Longleftrightarrow M_f(B) \text{ simétrica}$$

- $\dim_K S_K(V) = \dim_K \{A \in Mat_n(K) : A = A^t\} = n + \frac{n^2-n}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

- $\dim_K A_K(V) = \frac{n^2-n}{2}$

Ejemplo

- Simétrica $n = 3$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Antisimétrica $\chi(K) \neq 2$

$$a_{ij} = -a_{ij} \Longrightarrow a_{ij} = 0$$

$$i \neq j \quad , a_{ij} = -a_{ij} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^t = A^t$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

10/3/2015

Proposición Rango

Sea $f \in Bil_K(V)$, B, B' bases de f $\left.\begin{matrix} \\ A' = M_f(B') \; ; \; A = M_f(B) \end{matrix}\right\} \Rightarrow A' = P^t A P$, $P \in GL_n(k)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \det A' = (\det P)^2 \det A & (\det A' \neq \det A) \\ rg\, A' = rg\, A \end{cases}$$

Definición Rango

i) $rg(f) = rg(A)$, donde $A = M_f(B)$

ii) f no degenerado si $rg\, f = \dim_K V$

Ejemplo I

$f : K^n \times K^n \longrightarrow K$ $(k \leq n)$ $(h \leq n)$

a) $f(u,v) = \sum_{i=1}^{k} x_i$

no es lineal en la variable "v" $\Longrightarrow$ no es bilineal

Contraejemplo

$$\begin{matrix} f(u, v+v') & \neq & f(u,v) + f(u,v') \\ \shortparallel & & \shortparallel \\ \sum_{i=1}^{k} x_i & \neq & 2\sum_{i=1}^{k} x_i \end{matrix}$$

pero si es lineal en u.

b) $f(u,v) = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} y_i$

No es bilineal. Contraejemplo

$$f(u, v+v') = \sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} (y_i + y_i')$$

$$\nparallel$$

$$f(u,v) + f(u,v') = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{k} y_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{k} x_i + \sum_{i=1}^{h} y_i \right)$$

$f : k^{2n} \longrightarrow k$ lineal 10/3/2015

Ejemplo I

c) $f(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{h} y_i\right) = \sum_{\substack{1\le i\le k\\ 1\le j\le h}}^{k,h} x_i y_j$ es bilineal por definición

$$M_f(B_c) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{\begin{array}{ccc}1&\cdots&1\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 1&\cdots&1\end{array}}^{h}\Big|\,k & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$

como $\underbrace{x_{\boxed{i}}\ y_{\boxed{j}}}_{\text{distinta variable.}}$ matriz de $1 \ldots 1$

$rg(f) = 1$, f es degenerada

d) $f(u,v) = \sum_{i=1}^{k} x_i y_i$ es bilineal por definición.

$$M_f(B_c) = \left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)$$

$rg(f) = k \le n$

$f(u,v) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ no es degenerado

Este f es el producto escalar y M_f es la matriz del producto escalar $M_f(B_2) = I_n$

e) $f(u,v) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{h} y^2\right)$ no es bilineal

Contraejemplo

$f(\lambda u, v) \underset{\uparrow}{=} \lambda f(u,v) \quad \forall \lambda$

no se cumple.

Ejemplo II

Sea $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

a) $f(u,v) = \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i|$ No es bilineal

Contraejemplo $\lambda = -1$

$$f(\lambda u, v) = \sum_{i=1}^{k} |(-1) \cdot x_i y_i|$$
$$\lambda f(u,v) = (-1) \cdot \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \quad \#$$

b) $f(u,v) = \left| \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right|$ No es bilineal

Contraejemplo $\lambda = -1$

$$f(\lambda u, v) = \left| \sum_{i=1}^{k} (-1) \cdot x_i y_i \right|$$
$$\lambda f(u,v) = (-1) \left| \sum_{i=1}^{k} x_i y_i \right| \quad \#$$

c) $f(u,v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$ No es bilineal

Contraejemplo $\lambda = 4$

$$f(\lambda u, v) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 4 \cdot x_i y_i} = 2 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i}$$
$$\lambda f(u,v) = 4 \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}$$

$\#$

10/3/2015

Ejemplo III:

Sea $\mathbb{R}_3[x] \times \mathbb{R}_3[x] \longrightarrow \mathbb{R}$

a) $f(p,q) = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

La primitiva es lineal por definición de integrales

$$\int (p+p')q\,dx = \int (pq + p'q)\,dx$$

$$\int (\lambda p)q\,dx = \lambda \int pq\,dx$$

Es bilineal y simétrica.

$$M_f(B) = \begin{array}{ccc} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{array} \right) & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(1,\ ) & f(x,\ ) & f(x^2,\ ) \end{array} & \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1,1) = \int_0^1 dx = 1 \\ f(1,x) = \int_0^1 x\,dx = 1/2 \\ f(1,x^2) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \text{1ª columna}$$

$rg\ f = 3$

f no degenera

Ejemplo IV

Sea $f: Mat_n(K) \times Mat_n(K) \longrightarrow K$

a) $f(A,C) = \text{traza } A \cdot tr\, C$

$$f(A+A',C) = tr(A+A') \cdot tr\,C = (tr\,A + tr\,A') \cdot tr\,C =$$

$$= tr\,A\,tr\,C + tr\,A'\,tr\,C = f(A,C) + f(A',C)$$

$$f(\lambda A, C) = tr(\lambda A) \cdot tr\,C = \lambda tr\,A \cdot tr\,C = \lambda f(A,C)$$

Es Simétrica bilineal. ; $\dim Mat_n(K) = n^2$

para $n=2$

$f(A,C) = tr\,A\;tr\,C$

hacer matriz y ver rango

$B = \{\underset{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}}}{E_{11}},\ \underset{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}}}{E_{12}},\ \underset{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}}}{E_{21}},\ \underset{\overset{\shortparallel}{\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}}}{E_{22}}\}$

$$M_f(B) = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) & \begin{array}{c} E_{11} \\ E_{12} \\ E_{21} \\ E_{22} \end{array} \\ \begin{array}{cccc} \underbrace{\ }_{f(E_{11})} & \underbrace{\ }_{f(E_{12})} & \underbrace{\ }_{f(E_{21})} & \underbrace{\ }_{f(E_{22})} \end{array} & \end{array}$$

Rango $= 1$

b) $f(A,C) = tr\,(A \cdot C)$

traza $A \cdot C$ = traza $C \cdot A$

para $n=2$ $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$

$A = a_{ij}$ $\quad CA = (p_{ij})$

hacer matriz y rango.

$C = c_{ij}$ $\quad CA = q_{ij}$

Es bilineal y simétrica.

c) $f(A,C) = tr\,(A^t \cdot C)$ * Importante

$tr\,(A^t C) \overset{?}{=} tr\,(C^t \cdot A) \Longleftrightarrow (A^t C)^t = C^t A^{tt} = C^t A$

Entonces f es bilineal y simétrica.

para $n=2$ $B = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ hacer matriz y calcular rango.

10/3/2015

Ejemplo IV (continuación)

d) $f(A, C) = \det A \cdot \det C$

No es bilineal. Contraejemplo

$$f(A, C+C') = \det A \cdot \det(C+C') \neq (\det C + \det C') \det A$$

e) $f(A, C) = \det(A \cdot C)$

No es bilineal. Contraejemplo.

$$f(A, C+C') = \det(A \cdot (C+C')) = \det(AC + AC') \neq \det AC + \det AC'$$

Proposición

Sea $rg(f) = rg\, M_f(B)$, $f : V \times V \longrightarrow K$ bilineal B base de V

$$f_i : V \longrightarrow \overset{\text{dual}}{\boxed{V^*}} = \{ w : V \longrightarrow k \mid w \text{ lineal} \}$$

$$u \longmapsto f_i(u)(v) = f(u, v).$$

f Bilineal $\Longleftrightarrow$ f_i es lineal

$M_f(B) = A = (f(u_i, u_j)) \Rightarrow M_{f_i}(B, B^*) = A^t$

Demostración

¿$\forall u \in V$ $f_i(u)$ lineal?

$$f_i(u)(v+v') = f(u, v+v') = f(u,v) + f(u,v') = f_i(u)(v) + f_i(u)(v')$$

$$f_i(u)(\lambda v) = \lambda f_i(u)(v).$$

$\forall u, u' \in V \Rightarrow f_i(u+u') \overset{?}{=} f_i(u) + f_i(u')$

$$\forall v \in V \quad \underset{f(u+u', v)}{\underset{\shortparallel}{f_i(u+u')(v)}} = f_i(u)(v) + f_i(u')(v) = f(u,v) + f(u',v)$$

$$M_f(B) = A = \Big(\underset{a_{ij}}{\underset{\shortparallel}{f(u_i, u_j)}} \Big) \Rightarrow M_{f_i}(B, B^*) = A^t$$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$

$$M_{f_i}(B, B^*) = c_{ij}$$

$$\begin{array}{c} f_i(u_i) \in V^* \\ \shortparallel \\ c_{i1}u_1^* + \dots + c_{in}u_n^* \end{array} \Longrightarrow f_i(u_i)(u_j) = \begin{array}{c} (c_{i1}u_1^* + \dots + c_{in}u_n^*)(u_i) \\ \shortparallel \\ c_{ij}u_j^*(u_j) \\ \shortparallel \\ c_{ij} \end{array}$$

Proposición

Sea $f : V \times V \longrightarrow K$ bilineal y B base de V

se define $f_d : V \longrightarrow V^* = \{ W : V \longrightarrow K \mid W \text{ lineal} \}$

$$u \longmapsto f_d(u)(v) = f(v,u)$$

f bilineal $\Longleftrightarrow$ f_d es lineal

$M_f(B) = A = f(u_i u_j) \Longrightarrow M_{f_d}(B, B^*) = A$

- * $f_i \neq f_d$
- * $f_i = f_d$ si A es simétrica, es decir, si f es simétrica.

12/3/2015

Observación

Sea f no degenerada $\Longleftrightarrow$ $f_i, f_d : V \longrightarrow V^*$ son isomorfismos

* f degenerada $\Longleftrightarrow$ $rg < 2$

Definición

Sea $f \in Bil_K(V)$, $u \in V$ es isotropo si $f(u,u) = 0$

Matriz. Ejemplo.

$M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$f(u,v) = x_1 y_2 + x_2 y_1$

$\left.\begin{array}{l} u_1 = (1,0)_B \\ u_2 = (0,1)_B \end{array}\right\}$ isótropos

f no degenerada

12/3/2015

Observación

Si $f(u,u) \neq 0 \Rightarrow$ no es isótropo = antisotropos

Propiedades

i) f degenerada $\Rightarrow \exists\, u \in V ,\ u \neq 0$

Demostración

$$f_i : \underset{n}{V} \longrightarrow \underset{n}{V^*} \text{ , n-isomorfismo} \Rightarrow \exists\, u \neq 0 \in V \text{ tal que } f_i(u) = 0 \in V^*$$

$$\Rightarrow \forall\, v \in V \text{ tal que } f_i(u)(v) = 0 \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ f(u,u)}}{f_i(u)(u)} = 0 .$$

#

ii) f antisimétrica $\Leftrightarrow \forall\, u \in V$, u es isótropo

Demostración

"$\Rightarrow$"

$$f(u,u) = -f(u,u) \quad \forall\, u \in V \Rightarrow 2f(u,u) = 0 \xRightarrow{\chi(K) \neq 2} f(u,u) = 0$$

"$\Leftarrow$"

$$\forall\, u,v \in V \Rightarrow \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f(u+v,u+v)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f(u,u)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f(v,v)} + f(u,u) + f(v,u)$$

$$\Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$$

#

iii) f no antisimétrico $\Rightarrow \exists\, u$ y este no es isótropo

Demostración

$$\exists\, u,v \in V : f(u,v) + f(v,u) \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\nparallel \\ 0}}{f(u+v,u+v)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f(u,v)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{f(v,v)} + f(u,v) + f(v,u)$$

$$\Rightarrow f(u;v) + f(v,u) \neq 0 \Rightarrow u \text{ ó } v \text{ ó } u+v \text{ no son isótropo}$$

#

Definición

Sea $q : V \longrightarrow k$ siendo $q(u) = f(u,u)$, es forma cuadrática

$$\begin{tikzcd} Bil_k(V) \arrow[r] & Q_k(V) \\ f \arrow[r, mapsto] & q_f \end{tikzcd}$$

$$q(u+v) = q(u) + q(v) + f(u,v) + f(v,u) \overset{\substack{f\,simétrica\\ \downarrow}}{=} q(u) + q(v) + 2f(u,v)$$

$$\Longrightarrow f(u,v) = \frac{1}{2}\Big(q(u+v) - q(u) - q(v)\Big)$$

Proposición

Sea $\chi(k) \neq 2$, $f = \underset{simétrica}{f_s} + \overset{antisimétrica}{f_a} \Longrightarrow \underset{\substack{forma\\ cuadrática\\ de\ f}}{q_f}(u) = f(u,u) = f_s(u,u) + f_a(u,u) =$

$$\boxed{f_a(u,u) \overset{\shortparallel}{=} -f_a(u,u) = 0}$$

$$= \underbrace{f_s}_{\substack{simétrica\\ Bil}}(u,u) = q_{f_s}(u)$$

Definición

Sea $M_q(B)$ la matriz cuadrática, cuadrada.

$$M_q(B) = M_f(B) = A = (a_{ij})$$

$$f(u,v) = \sum a_{ij} x_i y_j$$

$$q(u) = f(u,u) = \sum a_{ij} x_i x_j$$

Ejemplo

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_3^2$$

$$f((x_1, x_2, x_3),(u_1, u_2, u_3)) = x_1y_1 + \frac{3}{2}x_1y_2 + \frac{3}{2}x_2y_1 + 5x_3y_3$$

$$M_f(B) = M_q(B) = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

12/3/2015

Sea f simetrica ó antisimétrica

Definición ortogonal de V

Sea $W < V$, $f \in Bil_K(V)$ „ $W^{\boxed{\perp_f}} = \{u \in V : f(u,v)=0 {}^{*}, \forall v \in W\}$

ortogonal respecto de f

$* \; f(u,v)=0 = f_i(u)(v) = \pm f(v,u) = f_d(u)(v)$

Propiedades

i) $W^{\perp} < V$

ii) $\dim W^{\perp} \geqslant n - \dim W$

iii) $W_1 \subset W_2 \implies W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$

iv) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

v) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} \supset W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

vi) $W^{\perp\perp} > W$

vii) Si f no es degenerada $\implies$ las propiedades **ii, v, vi** son igualdades

Demostraciones (ideas)

$f(u_1,v) = f(u_2,v) = 0 \implies f(\underbrace{u_1+u_2}_{W_1+W_2}, v) = 0$ „ $u \in W_1$, $u_2 \in W_2$

prop vi) $u \in W$, $v \in W^{\perp} \implies f(v,u) = f(u,v) = 0$

~~Teorema Silvester~~ Intro. Definicón

Recuerdo

Sea $f = f_s + f_a$, $Bil_K(V) = S_K(V) \oplus A_K(V) \implies S_K(V) \cap A_K(V) = \{0\}$

Sea $f \neq 0$, $f \in S_K(V) \implies f$ no antisimétrica $\implies \exists\ u$ no isótropo $(u \neq 0)$

y se cumplen lo siguente

- $\dim \langle u \rangle^{\perp} = n-1$
- $V = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp}$

Demostración

i) Sea $B=\{u_1,\dots,u_n\}$ base de V

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} \overset{\neq 0}{a_{11}} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\langle u\rangle^{\perp} = \{ v\in V : f(v,u)=0 \}$$

$$0 = f(v,u_1) = f((x_1,\dots x_n)_B, (1,0\dots0)_B) = (x_1,\dots,x_n)\, A \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} =$$

$$= \overset{\neq 0}{a_{11}} x_1 + \dots + a_{n1} x_n \Rightarrow \dim\langle u_1\rangle^{\perp} = n-1$$

ii) $v\in\langle u\rangle\cap\langle u\rangle^{\perp} \Rightarrow v=\lambda u,\ f(u,\lambda u)=0 \Rightarrow \lambda f(u,u)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \Rightarrow v=0 \\ f(u,u)=0 \quad \boxed{\text{NO}} \end{cases} \qquad \langle u\rangle\cap\langle u\rangle^{\perp}$$

13/3/2015

Teorema

Sea $f\in Bil_K(V)$ se verifica:

1) Si $f\in S_K(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ es diagonal, para alguna base B de V (base ortogonal respecto f)

2) Si $f\in A_K(V) \Longleftrightarrow M_f(B)=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r}$, para alguna base B de V, siendo $r=rg(f)$

Demostración

1) "$\Leftarrow$" $M_f(B)=\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = A$; A simétrica $\Rightarrow f\in S_K(V)$

$\Rightarrow$ $f=0 \Rightarrow M_f(B)=0$, diagonal

$f\neq 0 \Rightarrow V=\langle u_1\rangle \oplus \langle u_1\rangle^{\perp}$ $(u_1\neq 0)$

$\{v_2,\dots,v_n\}$ base de $\langle u_1\rangle^{\perp}$

$\{u_1,v_2,\dots,v_n\}$ base de V

13/3/2015

Continuación demostración

$$M_f(\{u_1, v_2, \dots, v_n\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & M_{f|\langle u_1\rangle^\perp}(\{v_2, \dots, v_n\}) & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

$f(u_1, v_i) = 0$ $\quad i = 2, \dots, n \quad$ $f(v_i, v_i)$

- $n = 1 \Rightarrow$ trivial
- $n > 1 \Rightarrow$ Hipótesis inducción

$\exists \{u_2, \dots, u_n\}$ base de $\langle u_1\rangle^\perp$ tal que $M_{f|\langle u_1\rangle^\perp}(\{u_2, \dots, u_n\})$ diagonal

Sea $A \in Mat_n(K)$, A simétrica $\Leftrightarrow \exists P \in GL_n(K) : \underbrace{P^t}_{\hookrightarrow \text{ por congruencia}} AP$ diagonal

2)
"$\Leftarrow$"

$$M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r} = A \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{t(r/2)} \oplus O_{n-r}^t =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{(r/2)} \oplus O_{n-r} = \left[- \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right]^{r/2} \oplus O_{n-r} = -A$$

Entonces es antisimétrica.

"$\Rightarrow$"

$n = 1 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow M_f(B) = 0 = O_n$

$$f \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} f(u,u) = 0 \quad \forall u \in V \ (f(u,u) = -f(u,u) \Rightarrow 2f(u,u) = 0 \Rightarrow f(u,u) = 0) \\ n \geq 2 \quad \exists u, v \in V : f(u,v) \neq 0 \end{cases}$$

Sea $u_1, u_2 \in V : f(u_1, u_2) \neq 0$

i) $\{u_1, u_2\}$ linealmente independiente, suponemos $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = f(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2, u_1) = \lambda_2 \boxed{f(u_2, u_1) \neq 0} \Rightarrow \lambda_2 = 0 \\ 0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_2) = \lambda_1 \boxed{f(u_1, u_2) \neq 0} \Rightarrow \lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\dim_K \langle u_1, u_2 \rangle = 2$

ii) $\dim_K \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} = n-2 \quad , \quad V \in \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$

Demostración

Sea $v = (x_1\, x_2\, x_3 \dots x_n)_B \in \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \iff \begin{cases} 0 = f(u_1, v) \\ 0 = f(u_2, v) \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 0 = f(u_1 . v) = f(u_1, v_1)x_1 + f(u_1, v_2)x_2 + \dots + f(u_1, v_n)x_n = f(u_1, u_2)x_2 + \dots \\ 0 = f(u_2, v) = f(u_2, v_1)\lambda_1 + f(u_2, V_2)X_2 + \dots + f(u_2, V_n)X_n = \boxed{\overset{\displaystyle f(u_2, u_1)}{\underset{\displaystyle -f(u_1, u_2) \neq 0}{\parallel}}} x_1 + \dots \end{cases}$$

$\implies$ linealmente independiente

iii) $V = \langle u_1, u_2\rangle + \langle u_1 u_2\rangle^{\perp}$

Demostración

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in \langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \iff \begin{cases} 0 = f(\lambda u_1 + \lambda_2 u_2, u_1) = \lambda_2 \, f(u_2, u_1) \\ 0 = f(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, u_2) = \lambda_1 \, f(u_1, u_2) \end{cases} \neq 0$$

$\{v_3, \dots, v_n\}$ base $\langle u_1, u_2\rangle^{\perp} \implies M_f(\{u_1, u_2, V_3, \dots, V_n\}) =$

$$= \left(\begin{array}{c|c} M_{f\,|\langle u_1, u_2\rangle}^{(\{u_1, u_2\})} & 0 \\ \hline 0 & M_{f\,|\langle u_1, u_2\rangle^{\perp}}^{(\{V_3, \dots, V_n\})} \end{array}\right)$$

$$M_{f\,|\langle u_1, u_2\rangle}^{(\{u_1, u_2\})} = \begin{pmatrix} 0 & f(u_1, u_2) \\ -f(u_1, u_2) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\boxed{f(u_1 u_2)^{-1}}}_{= u'_1 \in K} u_1 \qquad f(f(u_1, u_2)^{-1} u_1, u_2) = f(u_1 u_2)^{-1} f(u_1, u_2)$$

$$M_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & -1 & 0 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & -1 & 0 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad m \text{ cajas}$$

$$\underset{\overset{\parallel}{r}}{rg(M_f)} = 2 \cdot m \qquad m = r/2$$

13/3/2015

Ejemplo 2

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix} = \boxed{\left(\begin{array}{cc|c}0&1&0\\-1&0&0\\\hline 0&0&0\end{array}\right)} = A$$

Antisimétrica

$P^t \cdot$ Matriz Antisimetrica $\cdot P = A$

$rg = 2$

Ejemplo 3

$$n = 3 \Longrightarrow \begin{cases}\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} & \text{Caso 1}\\ 0 & \text{Caso 2}\end{cases}$$

Proposición ley inercia

$$f \in S_K(V) \Longrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix}\lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & O & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & O & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\mu_1^{-1}\\ \vdots \\ \mu_r^{-1} \\ 1 \\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} M_f(B') =$$

$\lambda_1 \dots \lambda_r \neq 0$

$K = \mathbb{C}$ $\quad B = \{u_1, \dots, u_n\}$

$$= \begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix} = I_r \oplus O_{n-r}$$

$\lambda_i = \mu_i^2 \quad \mu_i \in \mathbb{C}$

$\lambda^2 - \lambda_i$

$B' = \{\mu^{-1}, u_1, \dots, \mu_r u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

Caso $K = \mathbb{R}$ (1ª parte tma Sylvester)

$$f \in S_K(V) \Rightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix}\underbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_s}_{0<} & & O \\ & \underbrace{\lambda_{s+1} \ \ddots \ \lambda_r}_{0>} & \\ & & 0 \ \ddots \ 0\end{pmatrix}$$

$\lambda_i = \mu^2 \quad 1 \leq i \leq s$

$B = \{u_i\}$

$-\lambda_i = \mu_i^2 \quad s+1 \leq i \leq r \qquad B' = \{\mu^{-1} . u_1, \dots, \mu_r^{-1} u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$$M_f(B') = \begin{pmatrix}\overbrace{1 \ \ddots \ 1}^{s} & & O \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{r-s=t} & \\ O & & 0 \ \ddots \ 0\end{pmatrix} = I_s \oplus -(I_t) \oplus O_{n-r}$$

signatura $= \mathcal{E}(f) = (s, t) \qquad s + t = r.$

16/3/2015

Teorema de Sylvester (ley de inercia de Sylvester) $k = \mathbb{R}$

| El teorema de Sylvester se da en el cuerpo $k = \mathbb{R}$ |

$*_1$ Sea $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ simétrica $\in Bil_{\mathbb{R}}(V) \Rightarrow \exists$ B base de V tal que

$$M_f(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$$

$*_2$ Además si $B' \subset V$ es base tal que $M_f(B') = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus O_{n-r}$ entonces $s = s'$, $t = t'$; siendo s y t únicas.

Demostración 1

Sea $k = \mathbb{R}$

$$f \in S_{\mathbb{R}}(V) \Longrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix} \underbrace{\lambda_1 \cdots \lambda_s}_{>0} & & & & & O \\ & \underbrace{\lambda_{s+1} \cdots \lambda_r}_{<0} & & & & \\ & & & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda_i = \mu^2, \quad 1 \leq i \leq s \qquad B = \{u_i\}$

$-\lambda_i = \mu_i^2 \quad s+1 \leq i \leq r \qquad B' = \{\mu_1^{-1} u_1, \dots, \mu_r^{-1} u_r, u_{r+1}, \dots, u_n\}$

$$M_f(B') = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{s} & & & O \\ & \underbrace{-1 \cdots -1}_{r-s=t} & & \\ O & & 0 & \cdots 0 \end{pmatrix} = I_s \oplus -(I_t) \oplus O_{n-r}$$

Demostración 2 ¿$s = s'$, $t = t'$?

$B = \{u_1, \dots, u_n\} \qquad B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$f(u_i, u_j) = f(u'_i, u'_j) = 0 \quad \forall \quad 1 \leq i \neq j \leq n$

$f(u_i, u_j) = 1$ si $1 \leq i \leq s$

$f(u'_i, u'_j) \leq 0$ si $s' \leq i \leq n$

$W = \langle u_1, \dots, u_s \rangle$ subespacio de $V \qquad W' = \langle u'_{s+1}, \dots, u'_n \rangle$ subespacio de V

$W \cap W' = \{0\}$

16/3/2015

Continuación demostración

$u \in W \cap W' \Rightarrow u = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_s u_s \Rightarrow f(u,u) = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \lambda_j f(u_i, u_j) =$

$= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \lambda_i = \sum_{i=1}^{s} \lambda^2_i \geq 0$

$\Rightarrow u = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' u_i' \Rightarrow f(u,u) = \sum_{i=s'+1}^{n} \lambda_i' \lambda_i' = f(u'_i u'_j) =$

$= \sum_{i=s+1}^{n} \lambda_i' \lambda_i' \; f(u_i', u'_i) = \sum_{s+1}^{t'} (\lambda_i')^2 (-1) + \sum_{t'+1}^{n} (\lambda'_i)^2 \cdot 0 =$

$= - \sum_{s+1}^{t'} (\lambda_i')^2 \leq 0$

$u \in W \cap W' \Rightarrow f(u,u) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_s = 0 \Rightarrow u = 0$

$$n \geq \dim (W + W') = \dim W + \underset{\boxed{s' \geq s}}{\underset{\Downarrow}{\dim W'}} = s + n - s'$$

Caso análogo $s \geq s'$

Entonces como $s + t = r = s' + t'$, queda demostrado $s = s'$ y $t = t'$

#

Proposición I

$f \in S_k(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ diagonal $(B \subset V$ base$)$

q cuadrática $\Longleftrightarrow M_q(B)$ diagonal $(B \subset V$ base$)$

$A \in Mat_n(k)$ simétrica $\Longleftrightarrow \exists\, P \in GL_n(k)$ tq $P^t A P$ = matriz diagonal

Caso $k = \mathbb{C}$

$M_f(B) = I_r \oplus O_{n-r}$

Caso $k = \mathbb{R}$

$M_f(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$

Proposición

Sea f antisimétrica $\Rightarrow f(u_i, u_i) = 0$,, $f(u_j\, u_i) = -f(u_i, u_j)$

$$f(u,v) = \sum a_{ij}\, x_i y_j \qquad a_{ij} = f(u_i, u_j)$$

$$q(u) = f(u,u) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = \sum_{i \neq j} a_{ij}\, x_i x_j$$

$$a_{ij}\, x_i x_j + a_{ji}\, x_j x_i = a_{ij}\, x_i x_j - a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

$$\Rightarrow q(u) = \sum_{i \neq j} a_{ij}\, x_i x_j = 0$$

17/3/2015

Proposición.

Suponemos $q : V \longrightarrow k$ Cuadrática

$u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$$q(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 \underset{\substack{\downarrow \\ R(x_3, \dots, x_n) \\ \text{Lineal}}}{R} + x_2 \underset{\substack{\searrow \\ S(x_3 \dots x_n) \\ \text{Lineal}}}{S} + \overset{\substack{T(x_3, \dots, x_n) \text{ cuadrática} \\ \uparrow}}{T} =$$

$a \neq 0$

$$\underbrace{a\left(x_1 + \frac{S}{a}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a}\right)}_{\substack{\shortparallel \\ \frac{a}{4}\left(x_1'^2 - x_2'^2\right)}} - \underbrace{\frac{RS}{a} + T}_{q'(x_3 \dots x_n)}$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + \frac{S}{a} + \frac{R}{a}$$

$$x_2' = x_1 - x_2 + \frac{S}{a} - \frac{R}{a}$$

Obtener forma diagonal de una cuadrática

Ejemplo I: $q(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{x_1 x_2}_{a x_1 x_2} + \underbrace{x_2 x_3}_{x_2 \cdot S} + \underbrace{x_3 x_1}_{x_1 R}$ Bilineal simétrica

$R = x_3$

$a = 1$

$S = x_3$

$T = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

no hay cuadrados.

17/3/2015

$$= \frac{1}{4}\left[(x_3+x_2+x_1)^2 - (x_1-x_2)^2 \right] - x_3^2$$

$$= \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2'^2 - x_3'^2 \qquad x_3' = x_3 \qquad x_2 =$$

$$Mq(B) = D = \begin{pmatrix} 1/4 & & 0 \\ & -1/4 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$$

Observación

$$(FAF^t)^t = F^t A^t F^{tt} = F A^t F^t \underset{\text{si A es simétrica}}{=} FAF^t$$

* Cuando aparece un cero en la primera posición

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots \\ a_{12} & a_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \qquad i = 2$$

hacer los mismos operaciones por filas y columnas para que sea distinto de 0 es igual a hacer

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \\ 1 & 1 & \dots \end{pmatrix} = T_{12} A T_{12}^t$$

* Toda la diagonal con ceros

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & & \\ a_{12} & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \neq 0$$

$$a_{12} \neq 0$$

$$c_1 + c_2 \neq 0$$

$$T_{12}(1)A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & & \end{pmatrix}$$

24/3/2015

TEMA: El Espacio vectorial Euclídeo

1. Espacio (vectorial) Euclídeo

Definición

Sea $n=\dim_{\mathbb{R}} V$ y $f\in S_{\mathbb{R}}(V)$, se dice que f es un producto escalar si es definida positiva ($f(u,u)=q(u)>0 \quad \forall u\neq 0$)

Observación

Sea $f\in S_{\mathbb{R}}(V)$, entonces, por el Teorema de Sylvester, $\mathcal{E}(f)=(s,t)$, siendo $r=s+t$, entonces, como f es producto escalar, $\mathcal{E}(f)=(n,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f\equiv x_1y_1+\dots+x_ny_n \\ q\equiv x_1^2+\dots+x_n^2 \\ M_f(B)=I_n \end{cases}$$

$M_f(B)=I_n \Rightarrow f$ es producto escalar

$B=\{u_1,\dots,u_n\}$; $f(u_i,u_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$

$u\neq 0$, $u=x_1u_1+\dots+x_nu_n \Rightarrow f(u,u)=q(u)=x_1^2+\dots+x_n^2 \underset{\text{en } \mathbb{R}\,*}{\neq 0}$

*En $\mathbb{C}$ no sucede $1^2+i^2=0$

B es base ortonormal (ortogonales unitarios normalizados)

Definición

Si f es producto escalar, la matriz es simétrica tal que B es base ortonormal $M_f(B)=(f(u_i,u_j))=I_n$

Observación

Todos los productos escalares se interpretan $f\equiv x_1y_1+\dots+x_ny_n$

Definición

Sea f producto escalar sobre V, $\|\ \|: V\longrightarrow\mathbb{R}$ tal que

$\|u\|=\sqrt{f(u,u)}=\sqrt{q(u)}\geq 0$

Cuando $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ $f((x_1,\dots,x_n)(y_1\dots y_n)) \underset{\uparrow\ \text{prod. escalar}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$

$\Rightarrow \|(x_1\dots x_n)\|=\sqrt{x_1^2+\dots+x_n^2}$

* Cuando $f(u,u)=1 \iff \|u\| = \sqrt{f(u,u)} = 1$

Los vectores unitarios tienen norma 1.

Ejemplos

1) Producto escalar usual $x_1y_1 + \dots + x_ny_n = f$

$x_1^2 + \dots + x_n^2 = q$

2)

$V = \mathbb{R}_{n-1}[x] = \{a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} : a_i \in \mathbb{R}\}$

$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ $f(p,q) = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$ es una forma bilineal y como $f \cdot g = g \cdot f \Rightarrow$ es simétrica.

$q(p) = \int_0^1 p(x)^2\,dx > 0$, si $p \neq 0$, es producto escalar

3) $V = Mat_2(\mathbb{R})$, Suponemos que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ entonces definimos

$f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(X,Y) = tr\, X^tAY$, siendo $X, Y \in Mat_2$

Es producto escalar (1° Bilineal.)

* $f(X+X',Y) = tr((X+X')^tAY) = tr(X^tAY + X'^tAY) =$

$= tr(X^tAY) + tr(X'^tAY) = f(X,Y) + f(X',Y)$

* $f(\lambda X, Y) = \lambda f(X,Y)$

* $f(Y,X) = tr(Y^tAX) = tr(Y^tAX)^t = tr(X^tA^tY^{tt}) =$

$= tr(X^tAY) = f(X,Y)$

como A es simétrica $A = A^t$

Si $q(x)$ es positivo se cumple que es producto escalar

24/3/2015

Continuación 3)

$$q(x) = f(x,x) = tr(X^t A X) = tr\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_2 & x_4 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= tr\left[\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_3+x_4 \\ x_1+2x_2 & x_3+2x_4 \end{pmatrix}\right] \underset{\uparrow}{=} tr\begin{bmatrix} x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2 & \sim \\ \sim & x_3^2+2x_3x_4+x_4^2 \end{bmatrix} =$$

calcula solo la diagonal porque solo le interesa eso

$$= x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_3x_4 + 2x_4^2 = (x_1+x_2)^2 + x_2^2 + (x_3+x_4)^2 + x_4^2 > 0$$

para que se anule $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

* Otra forma de ver todo esto formando matriz $\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$

Definición

Un espacio vectorial euclídeo se le llama a un espacio vectorial V que tiene un producto escalar Φ. V tiene dimensión finita .. En el siempre existe una base ortonormal de E.

Proposición

Supongamos $dim_{\mathbb{R}} V = n$, $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ y B es base de V siendo $A = M_f(B) = (a_{ij})$. Entonces son equivalentes:

i) f es producto escalar

ii) el determinante $\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall i \leq n$

Demostración

i) ⇒ ii) $V = \langle u_1 \dots u_n \rangle \quad B = \{u_1, \dots u_n\}$

$V_i = \langle u_1 \dots u_i \rangle$

$f_i : V_i \times V_i \longrightarrow \mathbb{R} \qquad f_i = f_{|V_i \times V_i}$

$f_i \in S_{\mathbb{R}}(V_i)$ f es producto escalar en V_i

f induce sobre cada uno de estos subespacios V_i desde u_1 hasta u_n otro producto escalar denominado f_i. Su matriz es

$$M_{f_i}(\underset{\substack{\| \\ V_i}}{\{u_1,\dots,u_i\}}) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} \overset{f(u_1,u_1)}{\boxed{a_{11}}} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} f(\ ,u_1) \\ \\ f(\ ,u_i) \end{array} \\ \begin{array}{cc} \underbrace{\qquad}_{f(u_1,\ )} & \underbrace{\qquad}_{f(u_j,\ )} \end{array} & \end{array}$$

Si f_i es producto escalar $\Rightarrow$ es congruente con la forma diagonal de rango máximo, entonces

$$M_{f_i}(V_i) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{ij} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = I_i = M_{f_i}(B'_i) = \text{ortonormal}$$

Si es congruente entonces

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} \end{pmatrix} = P_i^t \, I_i \, P_i$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} = |P^t| \cdot 1 |P| = |P|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ |P|^2 = \text{real al cuadrado}}}{>} 0$$

26/3/2015

Continuación Demostración

ii) $\Longrightarrow$ i) (Método Gram - Schmidt)

ii: Sea $V = \{u_1,\dots,u_n\} = \{v_1,\dots,v_n\}$ donde $\{v_1 \dots v_n\}$ es base ortonormal (relativa a f y $\{u_1,\dots,u_i\} = \{v_1 \dots v_i\}\ \forall\ i \leq n$

$\Rightarrow$ i)

$$v_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{u_1}{\sqrt{a_{11}}} \qquad (a_{11} > 0)$$

Y por hipótesis de la 2ª, todos los menores son positivos

$$\|u_1\| = \sqrt{f(u_1,u_1)} = \sqrt{a_{ij}}$$

26/3/2015

$\langle u_1 \rangle = \langle v_1 \rangle$

$\langle u_1, \dots, u_i \rangle = \{ v_1 \dots v_i \rangle$, siendo $\{v_1 \dots v_i\}$ un conjunto ortonormal relativo a f

$\langle u_1 \dots u_{i+1} \rangle \overset{?}{=} \langle v_1 \dots, v_{i+1} \rangle$ siendo $\{v_1 \dots v_{i+1}\}$ ortonormal

$u'_{i+1} (\langle v_1, \dots, v_i \rangle)^{\perp} = (u_1, \dots, u_i \rangle$

$\shortparallel$

$x_1 v_1 + \dots + x_i v_i + v_{i+1}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 = f(v_i, u'_{i+1}) = x_1 + f(v_1, u_{i+1}) \\ 0 = f(v_i, u'_{i+1}) = x_i + f(v_i, u_{i+1}) \end{cases} \quad \exists\, x_1 \dots x_i \in \mathbb{R}$$

$\qquad\qquad \overset{\shortparallel}{-f(v_1, u_{i+1})}$

$$v_{i+1} = \frac{u'_{i+1}}{\| u_{i+1} \|}$$

¿ $f(u'_{i+1}, u'_{i+1}) > 0$?

$V_{i+1} = \langle u_1, \dots, u_{i+1} \rangle = \langle v_1, \dots, v_{ij}\ u'_{i+1} \rangle$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \langle u_1 \dots u_i, u'_{i+1} \rangle$

$f(u'_{i+1}, u'_{j+1}) > 0$

$f_{i+1} = f|_{V_{i+1} \times V_{i+1}} : V_{i+1} \times V_{i+1} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$M_{f_{i+1}}(\{u_1 \dots u_{i+1}\}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i+1} \\ \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix}$$

$$M_{f_{i+1}}(\{u_1, \dots, u_i, u'_{i+1}) = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & \dots\, a_{ij} & \\ \vdots & \vdots & 0 \\ a_{i1} & \dots\, a_{ij} & \\ \hline & 0 & f(u'_{i+1} + u'_{i+1} \end{array}\right)$$

$$P^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots \\ \dots & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} P$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{ij} \\ \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix} f(u'_{i+1}, u'_{j+1}) = |P|^2 \begin{vmatrix} a_{11} & \dots \\ \vdots & a_{i+1,i+1} \end{vmatrix}$$

f es producto escalar $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1i} \\ a_{i1} & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall i \leq n \Longleftrightarrow$ tiene base toda base $\{u_1, \dots u_n\}$ de V se puede ortonormalizar por Gram Schmidt

Ejemplo.

i) $\mathbb{R}^3$ $\quad u \cdot v = \{10 x_1 y_1 + 3(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 2 x_2 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + x y_3\}$

$$M(B_c) = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$10 > 0$

$$\begin{vmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} > 0 \qquad | \quad | = 1 > 0$$

Como es producto escalar ya hay bases ortonormales

$$\{e_1, e_2, e_3\} \xRightarrow{(G.\ Schmidt)} \{e'_1, e'_2, e'_3\}$$

$$e'_1 = \frac{e_1}{\sqrt{10}}$$

$$\{e_3, e_2, e_1\} \xRightarrow{\text{Grand Schmidt}} \{e'_3, e'_2, e'_1\}$$

$$e'_3 = \frac{e_3}{\|e_3\|} = e_3$$

7 / 4 / 2015

Ejemplo

Sea $M_f(B_c) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

i) La matriz anterior define un producto escalar sobre $\mathbb{R}^3$

ii) Obtener una base ortonormal (relativamente a f) por Gram - Schmidt

$\{e_1, e_2, e_3\} \xrightarrow[G.S]{} \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormal.

7/4/2015

i) $\underset{\ddot{3}}{|3|}$, $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $|A| = 1 \quad > 0$

Por lo tanto f es definida positiva

$f(e_1, e_1) = 3 \Rightarrow \|e_1\| = \sqrt{f(e_1, e_1)} = \sqrt{3}$

$f(e_1, e_2) = -1 \Rightarrow e_1, e_2$ no son ortogonal.

$f \neq \langle \, , \, \rangle \qquad 3x_1^2 - 2x_1x_2 \dots \neq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$

ii) $\exists\, B = \{v_1, v_2, v_3\}$ ortonormal relativo a f

$M_f(B) = I_3 = M_{\langle , \rangle}(B_c)$

$* \quad v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, 0\right)$

$* \quad v_2 = \lambda_1 v_1 + \underbrace{e_2}_{\text{ortonormal a } v_1} \Rightarrow 0 = f(\lambda_1 v_1 + e_2, v_1) = \lambda_1 + f(e_2, v_1) =$

$= \lambda_1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$(0,1,0) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0,1,0) \begin{pmatrix} 3/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} = -1/\sqrt{3}$

$\Rightarrow v_2 = \frac{(1/3, 1, 0)}{\underbrace{\|(1/3, 1, 0)\|}_{\to (\frac{1}{3}, 1, 0)\, A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{3}{\sqrt{6}}, 0\right)$

$* \, v_3 \Rightarrow 0 = f\left(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3, v_1\right) = f\left(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + e_3 ; v_2\right)$

$\Rightarrow v_3 = \left(-1/\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$

Proposición

Sea f un producto escalar sobre V, ó $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, entonces

$\| u \| = \text{norma} = \sqrt{q(u)} = \sqrt{f(u,u)} \geq 0$

Propiedades

La norma verifica:

i) $\| u \| \geq 0$ y $\| u \| = 0 \iff u = 0 \quad \forall u \in V$

ii) $\| \lambda u \| = |\lambda| \, \| u \| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall u \in V$

iii) (Pitágoras) $\forall u, v \in V \quad \| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 \iff f(u,v) = 0$

$\Rightarrow u \perp v$

iv) (Desigualdad Schwarz) $\forall u, v \in V \quad | f(u,v) | \leq \| u \| \, \| v \|$

(si u, v son linealmente dependiente $\iff | f(u,v) | = \| u \| \, \| v \|$)

v) (Desigualdad triangular) $\forall u, v \in V \quad \| u + v \| \leq \| u \| + \| v \|$

Con las propiedades i, ii, v ya se verificaría que es norma.

Demostración propiedades.

i) $\| u \| = \sqrt{q(u)} \quad q(u) \geq 0 \quad q(u) = 0 \iff u = 0$ $\#$

ii) $\| \lambda u \| = \sqrt{q(\lambda u)} = \sqrt{f(\lambda u, \lambda u)} = \sqrt{\lambda^2 f(u,u)} = \sqrt{\lambda^2} \sqrt{q(u)} =$

$= |\lambda| \cdot \| u \|$ $\#$

iii) $\| u + v \|^2 = \| u \|^2 + \| v \|^2 \iff f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(v,v)$

$\iff f(u,u) + f(v,v) + 2 f(u,v) = f(u,u) + f(v,v) \iff f(u,v) = 0.$ $\#$

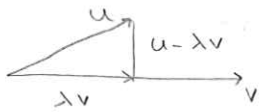
iv) u, v linealmente dependiente $\Rightarrow u = \lambda v$

$$\left.\begin{array}{l} f(u,v) = \lambda f(v,v) = \lambda \| v \|^2 \\ \| u \| \, \| v \| = \| \lambda v \| \, \| v \| = |\lambda| \, \| v \|^2 \end{array}\right)\!\!\Big)$$

Demostración (continuación) 7/4/2015

iv)

Si u, v es linealmente independiente, es decir,



$$0 = f(\lambda v,\ u-\lambda v) = \lambda f(v,u) - \lambda^2 f(v,v) \Longrightarrow \lambda = \frac{f(v,u)}{\|v\|^2}$$

entonces se verifica $\|u\|^2 = \|\lambda v\|^2 + \|u-\lambda v\|^2 \underset{\uparrow}{>} \|\lambda v\|^2 \Longrightarrow$

$\|u-\lambda v\|^2 \neq 0$ ya que u, v son lin. indep.

$$\Longrightarrow \|u\|^2 > \lambda^2 \|v\|^2 = \frac{f(v,u)^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 =$$

$$= \frac{f(v,u)^2}{\|v\|^2}$$

$$\|u\|^2 \|v\|^2 > f(v,u)^2$$

$$\|u\| \|v\| > |f(v,u)|$$ ✳

v) $\|u+v\|^2 = f(u+v,\ u+v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2f(u,v) \leq$

$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\|\|v\| = (\|u\| + \|v\|)^2 \Longrightarrow \|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

✳

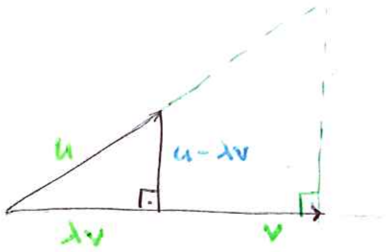
Observación (Schwarz) 9/4/2015

Sea $u, v \in V$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, y f un producto escalar sobre V

$|f(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$

$\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda v,\ u-\lambda v) = 0$

$\lambda = \dfrac{f(u,v)}{\|v\|^2}$, $\lambda > 0$



$$\cos(u,v) = \frac{\|\lambda v\|}{\|u\|} = \frac{|\lambda|\ \|v\|}{\|u\|} =$$

$$= \frac{f(u,v) \cdot \|v\|}{\|v\|^2 \cdot \|u\|} = \frac{f(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$f(u,v) = \cos(u,v)\ \|u\|\ \|v\|$, $\|u\|,\ \|v\| \neq 0$

$\Longrightarrow f(u,v) = 0 \Rightarrow \cos(u,v) = 0$

Definición $\cos(u,v) \doteq \dfrac{f(u,v)}{\|u\|\,\|v\|}$

Proposición Sea $W \subset V$, se verifica

i) $\dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} W \quad (= n - \dim_{\mathbb{R}} W)$, siendo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$

ii) $W^{\perp\perp} = W$

iii) $V = W \oplus W^{\perp}$

Demostración

i) $W = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \quad m = \dim_{\mathbb{R}} W$

$$V = \langle u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n \} \xRightarrow{G.S} V = \langle v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n \}$$

siendo $\{v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n\}$ una base ortonormal

$\forall i \quad \langle u_1 \dots u_i \rangle = \langle v_1, \dots, v_i \rangle$

$W = \langle u_1, \dots, u_m \rangle = \{ v_1, \dots, v_m \rangle$

$W^{\perp} = \langle v_{m+1}, \dots, v_n \rangle$

$f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, v_i) = 0 \qquad \forall i = 1, \dots, n \implies$

$\implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$

$\dim W^{\perp} = n - m$

ii) $\left.\begin{array}{l} W \subset W^{\perp\perp} \\ \dim W = \dim W^{\perp\perp} \end{array}\right\} \implies W = W^{\perp\perp}$

iii) $V \subset W + W^{\perp}$

$W \cap W^{\perp} = \{0\}$

Si $u \neq 0$ y $u \in W \cap W^{\perp} \implies f(u,u) = 0$ llegando a una contradicción

9/4/2015

Definición

Sea $\pi_W : \underset{\underset{\boxed{W \oplus W^{\perp}}}{\shortparallel}}{V} \longrightarrow V$ la proyección ortogonal de V con base W

$$\pi_W(u) = \pi_W\underbrace{(w + w')}_{\text{único.}} = w$$

La proyección no es biyectiva, no conserva ni la ortogonalidad ni el producto escalar.

Demostración

Sea $v \in W^{\perp}$, $v \neq 0$, $\lambda_1 v \neq \lambda_2 v$

$$f(\lambda v, \lambda_2 v) = \lambda_1 \lambda_2 f(v, v) = \lambda_1 \lambda_2 \|v\|^2 \neq 0$$

$$f(\pi_W(\lambda_1 v), \pi_W(\lambda_2 v)) = f(0, 0) = \|0\|^2 = 0$$

La proyección no conserva el producto escalar excepto con la identidad

Definición

Sea $\sigma_W : V \longrightarrow V$ la simetría ortogonal de V con base W

$$\sigma_W(u) = w - w'$$

La simetría es una biyección, la cual conserva el producto escalar

Demostración

Sea $u_1 = w_1 + w'_1$ y $u_2 = w_2 + w'_2$, $u_1, u_2 \in V$

$$f(u_1, u_2) \overset{?}{=} f(\sigma_W(u_1), \sigma_W(u_2))$$

$$f(u_1, u_2) = f(w_1 + w'_1, w_2 + w'_2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por} \\ \text{bilinealidad}}}{=} f(w_1, w_2) + f(w'_1, w'_2)$$

$\shortparallel$ $\Rightarrow$ conserva prod. escalar

$$f(\sigma_W(u_1), \sigma_W(u_2)) = f(w_1 - w'_1, w_2 - w'_2) = f(w_1, w_2) - (-f(w'_1, w'_2))$$

Como la forma bilineal no es degenerada, f_i es un isomorfismo.

Definición

Se define una aplicación

$$\underset{\text{omega}}{\omega_{u,v}}: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (\text{vector } w \text{ se asocia un determinante})$$

$$w \longmapsto \det_B \underbrace{(u,v,w)}_{\text{vectores fijos}} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Longrightarrow u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

En u, v fijamos B, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (relativo a f)

$\Longrightarrow$ base canónica es la ortonormal.

Proposición

En $\omega_{u,v} \in \mathbb{R}^3$ tenemos esta forma lineal, $\forall\, w \in \mathbb{R}^3$

- $\det_B(u, v, w+w') = \det_B(u,v,w) + \det_B(u,v,w')$
- $\det_B(u, v, \underset{\text{multiplica toda la columna}}{\boxed{\lambda}} w) = \lambda \det_B(u,v,w) \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

Proposición

Como f_i es un isomorfismo, entonces, existe un único $\alpha \in \mathbb{R}^3$ tal que $f_i(\alpha) = \omega_{u,v}$, siendo $f_i(\alpha): \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces

$\exists!\, \alpha \in \mathbb{R}^3 : \forall\, w \in \mathbb{R}^3 \quad f_i(\alpha)(w) = \omega_{u,v}(w) = f(\alpha, w) = \det_B(u,v,$

Ese único elemento es $\alpha = u \wedge v$ (producto vectorial)

Propiedades (producto vectorial)

Sea $\wedge: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una forma bilineal simétrica alternada.

i) $f(u \wedge v, u) = f(u \wedge v, v) = 0$, es decir, el producto vectorial es ortogonal con esos vectores

Demostración

$$f(u \wedge v, u) = \det_\beta(u,v,u) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & x_1 \\ x_2 & y_2 & x_2 \\ x_3 & y_3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

Y de forma análoga si $f(u \wedge v, v) = \det_B(u,u,v)$

10/4/2015

Propiedades (continuación)

ii) $u \wedge v = -(v \wedge u)$ (Antisimetría)

Demostración

Sea $f(u \wedge v, w) = det_B(u, v, w)$ y $f(v \wedge u, w) = det_B(v, u, w)$ $\forall\ w \in \mathbb{R}^3$

Por las propiedades de los determinantes, si cambiamos una columna de sitio

$$f(u \wedge v, w) = det(u, v, w) \underset{\overset{\uparrow}{\text{por definición}}}{=} -det(v, u, w) = -f(v \wedge u, w)$$

Entonces ya queda demostrado que $f(u \wedge v, w) = -f(v \wedge u, w)$ y por lo tanto que $u \wedge v = -(v \wedge u)$

iii) $(u + u') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$

Demostración

Por las propiedades de los determinantes

Sea $f((u+u') \wedge v) = det((u+u'), v) = det(u, v) + det(u', v)$

$= f(u \wedge v) + f(u' \wedge v)$, $\Rightarrow (u+u') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$

iv) $(\lambda u) \wedge v = \lambda(u \wedge v)$

$u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$

Demostración

Por las propiedades de los determinantes y porque $\wedge$ es una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal alternada de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$

v) $u \wedge v = 0 \iff \{u, v\}$ linealmente dependiente

Demostración

$u \wedge v = 0 \iff det_B(u, v, w) = 0 \quad \forall\ w \in \mathbb{R}^3$

Si $\{u, v\}$ linealmente dependiente $\Rightarrow det(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & \lambda x_1 & z_1 \\ x_2 & \lambda x_2 & z_2 \\ x_3 & \lambda x_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

$$\text{Si } \det_B(u,v,w)=0 \quad \forall\ w\in\mathbb{R}^3 \Rightarrow 0 = \begin{cases} \det_B(u,v,u_1) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \\ \det_B(u,v,u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} \\ \det_B(u,v,u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \end{cases}$$

Esos menores son nulos

$B=\{u_1,u_2,u_3\} \Rightarrow (x_1,x_2,x_3)$ y (y_1,y_2,y_3) son linealmente dependientes.

Ahora veamos que las coordenadas del producto vectorial son los det de los menores anteriores.

Suponemos $u\wedge v = (z_1, z_2, z_3)_B$

$u\wedge v = z_1u_1+z_2u_2+z_3u_3$

$$f(u\wedge v, u_1) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = x_2y_3 - x_3y_2 = z_1$$

$$f(u\wedge v, u_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 0 \end{vmatrix} = -(x_1y_3 - x_3y_1) = z_2$$

$$f(u\wedge v, u_3) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 0 \\ x_2 & y_2 & 0 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = (x_1y_2 - y_1x_2) = z_3$$

Entonces $u\wedge v = (x_2y_3 - x_3y_2\ ,\ x_3y_1 - x_1y_3\ ,\ x_1y_2 - x_2y_1)_B$

Ejemplo. ortonormal

$B=\{u_1,u_2,u_3\}$ $\qquad u_1\wedge u_2 = u_3$

$$f(u_1\wedge u_2, w) = \det_B(u_1,u_2,\underset{u_3}{\overset{\shortparallel}{w}}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$f(u_3,u_3) = 1$$
$$\shortparallel$$
$$\|u_3\|^2 = 1$$

prox día: módulo prod. vectorial

13/4/2015

Apicaciones ortogonales (Isomorfismo euclideo / ortogonal)

Definición Sea V es espacio vectorial euclideo con el producto escalar $f: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. Se dice que $\phi : V \to V$ es una aplicación ortogonal si:

i) ϕ es un endomorfismo

ii) $f(\phi(u), \phi(v)) = f(u,v) \quad \forall\, u,v \in V$

Ejemplo.

$$W < V \Longrightarrow \begin{cases} \sigma_W : V \longrightarrow V & \text{aplicación ortogonal} \\ \pi_W : V \longrightarrow V & \text{no es ortogonal (solo si } W = V) \end{cases}$$

Proposición

Sea $\phi : V \longrightarrow V$ es ortogonal. Se verifica:

i) ϕ conserva $\| \ \|$ (norma)

ii) ϕ conserva la ortogonalidad

iii) ϕ es biyectiva

iv) $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\}$

v) $W < V$, W ϕ-invariante $\Longrightarrow W^{\perp}$ ϕ-invariante.

Demostración

i) $\| \phi(u) \| = \sqrt{f(\phi(u), \phi(u))} = \sqrt{f(u,u)} = \|u\|$

ii) $f(u,v) = 0 \Longrightarrow f(\phi(u), \phi(v)) = f(u,v) = 0$

iii) Sea $u \in \ker \phi$, $f(u,v) = f(u,v) = f(\phi(u), \phi(v)) = f(0, \phi(v)) = 0$

$\forall\, v \in V \Longrightarrow u \in \ker f_i \underset{\text{f. prod. escalar.}}{\Longrightarrow} u = 0$

iv) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma(\phi)$, $\exists\, u \neq 0$ tal que $\phi(u) = \lambda u$

$$\lambda^2 \|u\|^2 = f(\phi(u), \phi(u)) = f(u,u) = \|u\|^2 \neq 0$$

$$\Big\Downarrow u \neq 0$$

$$\lambda^2 = 1 \Longrightarrow \lambda = \pm 1$$

Ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M_\phi (B_c)$$

$$\parallel$$

$M_{\sigma_{\langle e_1, e_2 \rangle}}(B_c)$ (e_3 ortogonal de e_1 y e_2)

Proposición

Sea $\phi : V \longrightarrow V$ es un isomorfismo y sea B una base ortonormal de V, son equivalentes:

i) ϕ es ortogonal

ii) $\phi(B)$ es base ortonormal

iii) $M_\phi(B)$ es ortogonal (es decir $A^t = A^{-1}$)

iv) $M(\phi(B), B)$, es ortogonal

$$M_\phi(B) = M(\phi(B), B).$$

Demostración

i $\Rightarrow$ ii) Sea $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ $\phi(B) = \{\phi(u_1), \dots, \phi(u_n)\}$

$$f(\phi(u_i), \phi(u_j)) = f(u_i, u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

ii) $\Rightarrow$ i) Sea $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} \mu_j u_j$

Queremos ver que $f(\phi(u), \phi(v)) \overset{?}{=} f(u, v)$

$$f(\phi(u), \phi(v)) = f\left(\sum \lambda_i \phi(u_i), \sum \mu_j \phi(u_j) \right) =$$

$$\sum \lambda_i \mu_j \underbrace{f(\phi(u_i), \phi(u_j))}_{\overset{\text{ortogonal}}{\parallel} \atop \delta_{ij}} = \sum_{ij} \lambda_i \mu_j \delta_{ij} =$$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i \mu_j f(u_i, u_j) = \dots = f(u, v)$$

i $\Rightarrow$ iii) nosotros.

Demostración

14/4/2015

$i) \iff iii)$

Sea $M_f(B) = I_n$, $M_f(\phi(B)) = I_n$

Si $A' = P^t A P$ siendo $P = M(B', B)$

$M_f(\phi(B)) = M(\phi(B), B)^t \, M_f(B) \, M(\phi(B, B))$

Entonces

$M_f(\phi(B)) = I_n \iff M(\phi(B), B)^t = M(\phi(B), B)^{-1} \iff M(\phi(B), B) = M_\phi(B)$

siendo $\phi(u_i) \rightarrow u_i$. ϕ - es ortogonal

Ejemplo.

Ejercicio 10 hoja 9

Dada la base $B = \{(1,1,0), (1,0,1), (1,2,0)\}$ del espacio vectorial euclídeo usual, estudia si cada una de las siguientes matrices es la expresión en la base B de una aplicación ortogonal

a) $\mathbb{R}^3$ espacio vectorial usual

$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$B = \{\underset{\overset{\shortparallel}{u_1}}{(1, 1, 0)}, \underset{\overset{\shortparallel}{u_2}}{(1, 0, 1)}, \underset{\overset{\shortparallel}{u_3}}{(1, 2, 0)}\}$

B no es ortonormal $\|u_1\| = \sqrt{2} \neq 1$!!

$B_c = \{e_1, e_2, e_3\}$ ortonormal

$$M_\phi(B_c) = M(B, B_c) \cdot M_\phi(B) \, M(B_c, B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ϕ ortogonal $\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ortogonal

Prueba ortogonalidad $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = I_3$

Proposición

Sea ϕ ortogonal $\Rightarrow \det(\phi) = \pm 1$, entonces

$M\phi(B)$ es ortogonal, B es ortonormal

$M\phi(B)\, M\phi(B)^t = I_n$

$\det M\phi(B) \det M\phi(B)^t = 1$

$(\det M\phi(B))^2 = 1$, $\det \phi(B) \in \mathbb{R}$

Ejemplo

$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad M\phi(B_c) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \neq I$$

Observación en el plano.

Sea $O(V)$, siendo $V = \mathbb{R}^n$, es una estructura usual

$O(\mathbb{R}^n) = O(n)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\eta"] & \mathbb{R}^n \\ V \arrow[u, "\phi"] & \mathbb{R}^n \arrow[l, "\eta^{-1}"] \arrow[u, "\eta \circ \phi \circ \eta^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

$O(V) \simeq O(n)$

Ejemplos Estudiar para los valores de n

$n = 1.$ $\quad O(1) \qquad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

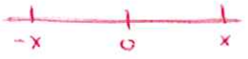
$R_c = \{1\}$

$M\phi(B_c) = (a_{11}) = \begin{cases} (1) \\ (-1) \end{cases}$

$(a_{11})(a_{11}) = 1$

En $O(1)$ hay dos elementos

$O(1) = \{ \underset{O^{+}(1)}{\underset{\cap}{id_{\mathbb{R}}}} , \underset{O^{-1}(1)}{\underset{\cap}{-id_{\mathbb{R}}}} \}$



simetría central

14/4/2015

Caso $n = 2$

$O(2) \simeq O(V)$

$\phi : V \longrightarrow V$ ortogonal $\quad \dim_{\mathbb{R}} V = 2$

$\mathcal{B} = \{u_1, u_2\}$ ortonormal

$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ortogonal

$\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\}$

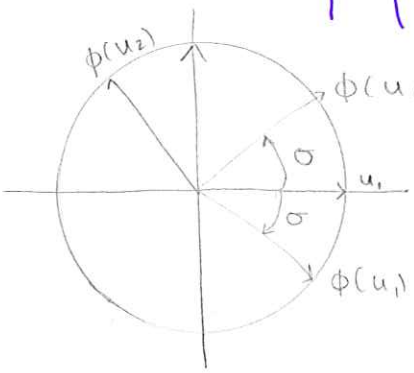
$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ c^2 + d^2 = 1 \Rightarrow \lambda^2(b^2 + a^2) = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \\ ac + bd = 0 \underset{a, b \neq 0}{\Rightarrow} \dfrac{c}{b} = \dfrac{-d}{a} = \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$c = b\lambda, \ d = -a\lambda$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix} \Rightarrow \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 \longmapsto \cos\sigma \, u_1 + \operatorname{sen}\sigma \, u_2 \\ u_2 \longmapsto -\operatorname{sen}\sigma \, u_1 + \cos\sigma \, u_2 \end{cases}$$

Rotación del plano, amplitud σ

$\underset{\overset{\parallel}{\sigma\langle u_1 \rangle}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$ y $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ no son giros. El det $= -1$.

simetría del
espacio generado
por u_1

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \end{cases} \quad P_\phi = x^2 - 1 = (x-1)(x+1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ matriz diagonal

* $a = 0 \Longrightarrow d = 0 \Longrightarrow$ no es una aplicación biyectiva $\Rightarrow$ no es ortogonal

$\Longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ $b, c = \pm 1$

Ejemplo.

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x^2 - 1 \Rightarrow$ diagonalizable

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ por lo de los cosenos

* $b = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a, d = \pm 1$. Son diagonalizables entonces son ortogonales

Ejemplo

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Son ortogonales el grupo de rotaciones:

$O^+(V) = \{\phi_\sigma : 0 \leq \sigma < 2\pi\}$

$M_{\phi_\sigma}(B) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\text{sen}\,\sigma \\ \text{sen}\,\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$

$\phi \in O^-(V) \Longleftrightarrow \exists$ B ortonormal con $M_\phi(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Definición Grupo en el espacio. 16/4/2015

Sea $\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ $O_3(V) \ni \phi$, grupo $P_\phi = 3$.

$P_\phi \in \mathbb{R}[x]$, $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\} \Rightarrow \sigma(\phi) \neq \emptyset$

$1 \in \sigma(\phi)$ ó $-1 \in \sigma(\phi)$ (ortogonales) $\Longrightarrow \exists\, u \neq 0$, $u \in V$, $\phi(u) = \lambda u$,

$\lambda = \pm 1$

$u_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|}$, $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1 \rangle^\perp = 3 - 1 = 2$, elegimos

$\langle u_1 \rangle^\perp = \langle u_2, u_3 \rangle$, $\{u_2, u_3\}$ base ortonormal de $\langle u_1 \rangle^\perp$

16/4/2015

Consideramos $B = \{u_1, u_2, u_3\}$

$\mathbb{R}^3 = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^\perp$, $\langle u_1 \rangle$ ϕ - invariante „ $\langle u_1 \rangle^\perp$ ϕ - invariante $\Rightarrow$

$$\Rightarrow M_\phi(B) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ \hline & M_{\phi|_{\langle u_2, u_3 \rangle}}(\{u_2, u_3\}) \end{array}\right) \Rightarrow$$

positivas = rotaciones

negativas = métricas se pueden permutar.

Caso 1 (Ejemplo)

* $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)$ $\sigma(\phi) = 1$. „ $\det \phi = 1$ $\phi \in O_3^+(V)$ es rotación

* $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $\det \phi = 1$ $\phi \in O_3^+(V)$. Es una rotación de eje $\langle u_3 \rangle$ y ángulo π.

Caso 2 (Ejemplo)

* $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \equiv \sigma \langle u_1, u_2 \rangle$ = Simetría ortogonal respecto un plano

$\det \phi = -1$, $\phi \in O_3^-(V)$

* $\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right) \equiv \sigma_{\langle u_1 \rangle^\perp} \circ \rho_{\langle u_1 \rangle, \theta}$. La matriz se puede ver como producto de matrices

$\det \phi = -1$, $\phi \in O_3^-(V)$

Simetría ortogonal compuesto de una rotación

$$\underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\text{simetría negativa}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{array}\right)}_{\text{giro de amplitud 1 ángulo } \theta}$$

Teorema Toda rotación del espacio euclídeo que es dimensional que conserve el producto escalar se puede obtener como una rotación, una simetría respecto de un plano o la composición de estas.

Observación En un giro hay que calcular el eje y la amplitud, el ángulo del ángulo. El eje, cogiendo la matriz en cualquier base, restando 1 en la diagonal, se calcula la recta de vectores fijos

Luego el vector hay que hacerlo ortonormal.

Para hallar el ángulo θ, comprimido $0 < \theta <$ tal que

$1 + 2\cos\theta = tr\ A = tr\ A' = tr\ \phi$. Y es necesario calcularlo también por el seno ya que la rotación no se halla solo con el coseno.

Nota Para hallar el $\cos\theta$ es fácil

$$\boxed{1 + 2\cos\theta = tr\ A = tr\ A' = tr\ \phi}$$

17/4/2015

Teorema Para cada $\phi \in O(V)$ existe una base ortonormal B tal que

$M_\phi(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus M_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus M_{\theta_k}$ donde:

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} M_\phi(B) = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} -1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{matrix} \end{pmatrix} \\ \underbrace{\qquad\qquad}_{u_1 \cdots u_s} \underbrace{\qquad\qquad}_{u_{s+1} \cdots u_{s+t}} \underbrace{\qquad\qquad}_{u_{s+t+1} \quad u_{s+t+2}.} \end{array}$$

$\langle u_1, \dots, u_s \rangle$ ϕ-invariante

$\langle u_{s+1}, \dots, u_{s+t} \rangle$ ϕ-invariante

$\langle u_{s+t+1}, u_{s+t+2} \rangle$

Demostración (Inducción sobre $n = \dim_{\mathbb{R}} V$)

$n=1$ $\quad B_1 = \{u_1\}$ $0 \neq u \in V$, $\|u_1\| = 1$

$$M_\phi(B_1) = \lambda = \begin{cases} I_1 \\ -I_1 \end{cases} \qquad \lambda = \pm 1$$

hipótesis inducción teorema cierto para dimensión $< n$

$\boxed{\text{caso 1}}$ $\quad 1 \in \sigma(\phi) \Rightarrow \exists u_1 \in V_{\phi,1}$, $u \neq 0$, $\|u_1\| = 1 \Rightarrow \langle u_1 \rangle$ ϕ-invariante

$$(\phi(u_1) = u_1) \xRightarrow{\phi\text{-ortogonal}} \begin{cases} \langle u_1 \rangle^\perp \ \phi\text{-invariante y } V = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^\perp, \ \dim \langle u_1 \rangle^\perp = n-1 < n \\ \\ \phi|_{\langle u_1 \rangle^\perp} \in O(\langle u_1 \rangle^\perp) \Rightarrow \exists \{u_2, \dots, u_n\} \text{ base ortonormal} \end{cases}$$

de $\phi|_{\langle u_1 \rangle^\perp}$ con $M_{\phi|_{\langle u_1 \rangle^\perp}}(\{u_2, \dots, u_n\}) = I_{s'} \oplus (-I_t) \oplus M_{\theta_1} \oplus \cdots \oplus M_{\theta_k}$

17/4/2015

$$\Longrightarrow M_\phi(\{u_1,\dots,u_n\}) = I_{s'+1} \oplus (-I_t) \oplus M_{\theta_1} \oplus \dots \oplus M_{\theta_k}$$

Caso 2 $-1 \in \sigma(\phi) \Longrightarrow \exists\, u_1 \in V_{\phi,-1},\ u \neq 0,\ \|u_1\| = 1 \Rightarrow \langle u_1 \rangle$ ϕ-invariante

$$(\phi(u_1) = u_1) \xRightarrow{\phi\text{-ortogonal}} \begin{cases} \langle u_1\rangle^\perp\ \phi\text{-invariante y } V = \langle u_1\rangle \oplus \langle u_1\rangle^\perp,\ \dim \langle u_1\rangle^\perp = n-1 < n \\ \phi_{|\langle u_1\rangle^\perp} \in \mathcal{O}(\langle u_1\rangle^\perp) \Longrightarrow \exists\, \{u_2,\dots,u_n\} \text{ base ortonormal de } \phi_{|\langle u_1\rangle^\perp} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow M_\phi(\{u_2,\dots,u_s,u_1,u_{s+1},\dots u_{s+t'},u_{s+t'},u_{s+t'+1},\dots,u_n\}) =$$

$$= I_s \oplus (-I_{t'+1}) \oplus M_{\theta_1} \oplus \dots \oplus M_{\theta_k}$$

Caso 3 $\sigma(\phi) = \emptyset \Longrightarrow q_\phi \in \mathbb{R}[x]$ sin raíces reales de grado 2 $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow q_\phi = f_1^{a_1} \circ \dots \circ f_m^{a_m}$, $f_i \in \mathbb{R}[x]$ irreducibles distintos 2 a 2 de grado 2, $a_1 \dots a_m > 0$

$\Longrightarrow V = \ker f_1(\phi)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker f_m(\phi)^{a_m}$, $\ker f_i(\phi)^{a_i}$ ϕ-invariantes

$\Longrightarrow \phi_{|\ker f_i(\phi)^{a_i}} \in \mathcal{O}(\ker f_i(\phi)^{a_i})$

Afirmación 1: $\ker f_i(\phi) \neq 0 \quad \forall\, i = 1,\dots m$

demostración

Supongamos que $\ker f_i(\phi) = 0$, algún $i \Rightarrow \ker f_i(\phi)^{a_i} = 0$

$u \in \ker f_i(\phi)^{a_i} \Longrightarrow 0 = f_i(\phi)^{a_i}(u) = f_i(\phi)\left(f_i(\phi)^{a_i-1}(u)\right)$

$\Longrightarrow f_i(\phi)^{a_i-1}(u) = 0 \Longrightarrow 0 = f_i(\phi)^{a_i-1}(u) = f_i(\phi)\left(f_i(\phi)^{a_i-2}(u)\right) =$

$\dots \Longrightarrow f_i(u) = 0 \Longrightarrow u = 0$

Si $\ker f_i(\phi)^{a_i} = 0 \Longrightarrow f_1^{a_1} \dots f_{i-1}^{a_{i-1}} f_{i+1}^{a_{i+1}} \dots f_m^{a_m}(\phi) = 0$

y esto es una contradicción

Entonces $\ker f_i(\phi)$ es ϕ-invariante.

Afirmación 2 : $\exists \langle u_1, u_2 \rangle$ ϕ-invariante $\dim(u_1, u_2) = 2$

$f_1 = x^2 + ax + b \in \mathbb{R}[x]$

$\ker f_1(\phi) \neq \{0\} \Longrightarrow \exists \underset{0}{\overset{\neq}{u}} \in V$ tal que $f_1(\phi)(u) = 0$, $f_1(\phi) = (\phi^2 + a\phi + b\,id)(u)$

Quiere decir que $\phi^2(u) + a\phi(u) + bu = 0$

$u_1 = u$, $u_2 = \phi(u)$

$\langle u_1, u_2 \rangle$ ϕ - invariante

$\phi(u_1) = u_2 \in \langle u_1, u_2 \rangle$

$\phi(u_2) = \phi(\phi(u_1)) = \phi^2(u) = -a\phi(u) - bu_1 = -a u_2 - bu_1 \in \langle u_1, u_2 \rangle$

$\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1, u_2 \rangle = 2$, ya que $\sigma(\phi) = \emptyset$

$\sigma(\phi) = \phi \Longrightarrow \exists \langle u_1, u_2 \rangle \subset V$ ϕ - invariante , $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1, u_2 \rangle = 2$

$\Longrightarrow V = \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{\text{ortonormal}} \oplus \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$ como ϕ es ortogonal $\Longrightarrow \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$ es

ϕ - invariante.

$$M_{\phi|\langle u_1, u_2 \rangle}(\{v_1, v_2\}) \underset{\sigma(\phi) = \emptyset}{=} \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\sigma & \cos\theta \end{pmatrix} ."$$

$$M_{\phi|\langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}}(\{v_3, \dots, v_n\}) \underset{HI}{=} M_{\sigma_1} \oplus \dots \oplus M_{\theta_{k-1}}$$

21/4/2015

Espacio vectorial autoadjunto

Definición Sea V un espacio vectorial euclídeo, con $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, es autoadjunto si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v))$ $\forall\, u, v \in V$

Obs. Ejemplo Sea ϕ ortogonal y autoadjunto $\Longleftrightarrow \phi^2(v) = v$, ϕ^2 id_V $\Longleftrightarrow$ ϕ es simetría ortogonal $\forall\, u, v \in \mathbb{R}$

$$f(u,v) = f(\phi(u), \phi(v)) = f(u, \phi^2(v))$$

$$f(u, v - \phi^2(v)) = 0 \quad \forall\, u, v \in V$$

$$v - \phi^2(v) \in \ker f_i = \{0\} \quad (f_i \text{ producto escalar})$$

Proposición Sea B una base ortonormal de V, $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo

Son equivalentes:

i) ϕ es autoadjunta

ii) $M_\phi(B)$ es simétrica $(A = A^t)$

Demostración

$i \Rightarrow ii$ Sea $B = \{u_1, \dots u_n\}$ $M_\phi(B) = (a_{ij})$

$$f(\phi(u_i), (u_j)) = f\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} u_k u_j\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} f(u_k, u_j) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \delta_{kj} = a_{ji}$$

$f(u_i, \phi(u_j)) = a_{ij}$ (mediante el mismo procedimiento)

#

Teorema espectral Exam.

Si ϕ es autoadjunto entonces existe B base ortonormal de V formado por vectores propios de ϕ.

lo que quiere decir, $P^t A P = P^{-1} A P = D = \text{diagonal} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

siendo $P^{-1} = P^t$, $A = M\phi(B_0)$, $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = \sigma(\phi)$

Demostración

i) Sea $g_0 \in \mathbb{R}[x] \Longrightarrow (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t} f_1^{b_1} \dots f_s^{b_s}$

$f_i \in \mathbb{R}[x]$ irreducible grado 2

$V = \ker(\phi - \lambda_1 id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)^{a_t} \oplus \underbrace{\ker f_1(\phi)^{b_1}}_{\overset{\shortparallel}{0}} \oplus \dots \oplus \ker f_s(\psi)^{b_s}$

$\ker f_1(\phi) \dots \ker f_s(\phi) \neq \{0\}$

* Si $\ker f_1(\phi) = \{0\} \Longrightarrow \ker f_1(\phi)^{b_1} = \{0\} \Rightarrow \frac{g_\phi}{f_1^{b_1}}(\phi) = 0$

Sea $u \neq 0 \in \ker f_1(\phi)$, $f_1 = x^2 + a_1 x + a_0 \quad \forall a_0, a_1 \in \mathbb{R}$

$\dim_{\mathbb{R}} \langle u, \phi(u) \rangle = 2$

$0 = \lambda u + \mu \phi(u) \Longrightarrow \phi(u) = (\mu^{-1} \lambda) u$

si $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ si $\mu^{-1}, \lambda \in \sigma(\phi)_{\langle u, v \rangle} = \{\emptyset\}$

vacío

$\Pi : \langle u, \phi(u) \rangle$ es ϕ invariante

$\phi(u) \in \langle u, \phi(u) \rangle$

$\phi(\phi(u)) = \phi^2(u) + a_1 \phi(u_1) + a_0(u) = 0$

$\Rightarrow \phi(\phi(u)) = -a_0 u - a_1 \phi(u) \in \langle u, \phi(u) \rangle$

$\phi_{|\Pi} : \Pi \longrightarrow \Pi$ autoadjunto.

Sea $\{u_1, u_2\}$ base ortonormal de Π

$M\phi_{|\Pi}(\{u_1, u_2\}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$

21/4/2015

Continuación demostración

$$M_{\phi|_\Pi}(\{u_1, \phi(u)\}) = \begin{pmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

$a + c = -a_1$

$a \cdot c = \underbrace{ac - b^2}_{\det(\phi|_\Pi)} + b^2 = a_0 + b^2$

$a . c$ raíces de $x^2 + a_1 x + a_0 + b^2$

$\delta = a_1^2 - 4a_0 - 4b^2 = \underbrace{(a_1^2 - 4a_2)}_{\geq 0} - \underbrace{4b^2}_{\geq 0}$

q_ϕ descompone completamente en $\mathbb{R}[x] \Longrightarrow q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1=2} \dots (x-\lambda_t)^{a_t=1}$ siendo $a_i > 0$.

2° $V = \ker(\phi - \lambda_1 id_V)^{a_1} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)^{a_t} =$

$= \ker(\phi - \lambda_i id_V) \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)$

$\Longrightarrow \ker(\phi - \lambda_i id_V) \underline{=} \ker(\phi - \lambda_i id_V) \quad \forall \lambda = \lambda_1, \dots \lambda_t$

"$\supseteq$" Sea $u \in \ker(\phi - \lambda_i id_V)^2 \xrightarrow{?} u \in \ker(\phi - \lambda id_V)$

¿$(\phi - \lambda id_V)(u) = 0$? ¿$\|\phi - \lambda id_V(u)\| = 0$?

$f((\phi - \lambda id_V)(u), (\phi - \lambda id_V)(u)) \overset{\uparrow}{=} f(u, (\phi - \lambda id_V)^2(u)) =$

ϕ autoadjunto $\Rightarrow \phi - \lambda id_V$ autoadjunto

$= f(u, 0) \overset{\uparrow}{=} 0$

Como f es bilineal

Entonces $V = \ker(\phi - \lambda_1 id_V) \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t id_V)$ existe una base de V formada por vectores propios de ϕ (queda por ver que esa base puede ser ortonormal)

23/4/2015

Continuación demostración

Repaso demostrado

1º) q_ϕ descompone completamente en $\mathbb{R}[x]$, $q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1}\ldots(x-\lambda t)^{a_t}$

$\forall\ a_i > 0$ y $\lambda_i \in \mathbb{R}$.

2º) Sea $a_1 = \cdots = a_t = 1$,, $q_\phi = (x-\lambda_1)\cdots(x-\lambda_t)$ $\lambda_i \neq \lambda_j$

$$V = \underset{\substack{\shortparallel \\ V_{\phi,\lambda_1}}}{\ker(\phi-\lambda_i\, id_V)} \oplus \cdots \oplus \underset{\substack{\shortparallel \\ V_{\phi,\lambda_t}}}{\ker(\phi-\lambda_i\, id_V)}$$

Entonces $\exists$ base de V formada por vectores propios de ϕ

$\dim_{\mathbb{R}} V_{\phi,\lambda_i} = e_i$ $\quad B = \underset{\substack{\shortparallel \\ B_1}}{\{v_{11},\ldots,v_{1e_1}\}} \cup \ldots \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ B_t}}{\{v_t,\ldots,v_{te_t}\}}$

Demostración

3º) Base ortonormal

Tomamos $\{u_{i1},\ldots,u_{ie_i}\}$ base ortonormal de V_{ϕ,λ_i}

¿ $u \in V_{\phi,\lambda}$, $v \in V_{\phi,\mu}$, $\lambda \neq \mu \Longrightarrow f(u,v) = 0$?

Suponemos que tenemos $u \in V_{\phi,\lambda}$, $v \in V_{\phi,\mu}$, $\lambda \neq \mu \Longrightarrow f(u,v) = 0$

$$\lambda f(u,v) = f(\lambda u, v) = f(\phi(u), v) \underset{\substack{\uparrow \\ \phi \text{ autoadjunta}}}{=} f(u,\phi(v)) = f(u,\mu v) = \mu f(u,v$$

$\Longrightarrow$ como $\lambda \neq \mu \Longrightarrow f(u,v) = 0$

⋕

Corolario (Consecuencia Teorema)

Sea A una matriz real simétrica $\Longrightarrow \exists\ P$ ortogonal tal que $P^t A P = P^{-1} A P =$

$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, $\{\lambda_1 \ldots \lambda_n\} = \sigma(A)$

$A = M_\phi(B_c)$ $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \Longrightarrow \phi$ autoadjunto $\Longrightarrow$ ya se puede aplicar teorema espectral

27/4/2015

Justificación autoadjuntas:

Supongamos f es un producto escalar sobre V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $\phi \in End_{\mathbb{R}} V$

$\Rightarrow \exists! \ \psi \in End_{\mathbb{R}} V$ (endomorfismo adjunto) tal que $f(\phi(u), v) = f(u, \psi(v))$

ϕ es autoadjunta si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v)) \ \forall u, v \in V \iff \phi$ es simétrica

Demostración

Sea B, base ortonormal, $M = M_f(B) = Id_n$, llamamos $A = M_\phi(B)$;

¿ $C = M_\psi(B)$?

Escribimos $u = (x_1, \dots x_n)_B$ $v = (y_1, \dots, y_n)_B$

$$\left[A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right]^t I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \, I_n \cdot C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$(x_1 \dots x_n) A^t \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1 \dots x_n) \, C \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = C$$

#

$$A^t = \underbrace{M_{B^*}(\phi^*)}_{\text{matriz base dual.}} \qquad \phi: \underset{B_1}{V_1} \xrightarrow[A]{} \underset{B_2}{V_2} \Rightarrow \phi^*: \underset{B_2^*}{V_2^*} \xrightarrow[A^t]{} \underset{B_1^*}{V_1^*}$$

#

$\phi : V \longrightarrow V$ tq $M_\psi(B) = A^t$

Nota: En base ortonormal, ϕ si es autoadjunta $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow$ simétrica

27/4/2015

ESPACIO AFÍN EUCLÍDEO.

Definición

Un espacio afín euclídeo es un espacio afín A real, tal que el espacio vectorial asociado V es euclídeo.

Sea. A, V, f producto escalar sobre V y el cuerpo es sobre reales,

($\dim_{\mathbb{R}} V = \dim A = n$)

Ejemplo

$A = V = \mathbb{R}^n$, f producto escalar usual.

Definición (fundamental)

Se define la distancia de los puntos como $d(p,q) = \| \vec{pq} \| \; \forall p,q \in A$

Observ.

$R = \{p ; B\}$ sistema de referencia $\begin{cases} \text{afín euclídeo} \\ \text{cartesiano} \\ \text{ortonormal} \end{cases}$ si B es base ortonormal

distancia 2 ptos.

Sea $p = (a_1 \dots a_n)_R$ y $q = (b_1 \dots b_n)_R$ sistema de referencia ortonormal de f

$\Rightarrow d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2}$

Propiedades (Proposición)

Sea espacio afín euclídeo, $\forall p,q,r$, se cumple:

$$\left.\begin{array}{l} \text{i) } d(p,q) \geq 0 \text{ y } d(p,q) = 0 \iff p = q \\ \text{ii) } d(p,q) = d(q,p) \\ \text{iii) } d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) \end{array}\right\} \text{Espacio métrico}$$

iv) $d(p,q) \geq |d(p,r) - d(r,q)|$

v) $d(p,q) = d(p,r) + d(r,q) \iff \vec{pr} = \lambda \vec{pq}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

Demostración

i, ii, iii son demostraciones triviales con las propiedades ya vistas.

Continuación demostración

iv)

3ª multiplicada por (-1)

$$-d(p,q) \leq d(p,r) - d(r,q) \leq d(p,q$$

Consecuencia de iii, ii

28/4/2015

v) ① $\vec{pr}$, $\vec{pq}$ linealmente dependiente $\Longrightarrow \vec{pr} = \lambda \vec{pq}$,, $\lambda \in \mathbb{R}$

$0 \leq \lambda \leq 1 \Longrightarrow d(p,r) + d(r,q) = \| \vec{pr} \| + \| \vec{rq} \| = \| \lambda \vec{pq} \| + \| (1-\lambda) \vec{pq} \| =$

$= |\lambda| \, \| \vec{pq} \| + |1-\lambda| \, \| \vec{pq} \| \underset{\substack{\uparrow \\ 0 \leq \lambda \leq 1}}{=} (\lambda + 1 - \lambda) \| \vec{pq} \| = \| \vec{pq} \| = d(p,q)$

$\vec{rq} = \vec{pq} - \vec{rp} = \vec{pq} - \lambda \vec{pq} = (1-\lambda) \vec{pq}$

$\lambda > 1 \Longrightarrow d(p,r) = \| \vec{pr} \| = |\lambda| \, \| \vec{pq} \| > \| \vec{pq} \| = d(p,q) \Longrightarrow$

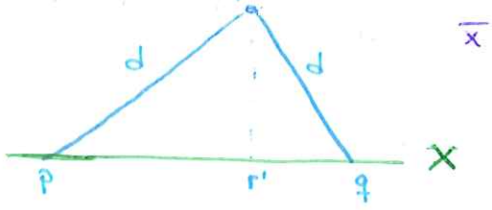
$\Longrightarrow d(p,r) + d(r,q) > d(p,q)$.

$\lambda < 0 \Longrightarrow d(r,q) = |1-\lambda| \, \| \vec{pq} \| > \| \vec{pq} \| = d(p,q) \Longrightarrow d(p,r) + d(r,q) >$

$> d(p,q)$

② $\vec{pr}$, $\vec{pq}$ linealmente independiente $\Longrightarrow d(p,r) + d(r,q) > d(p,q)$

$r \notin A(p,q) = X$



$\vec{X} \oplus \vec{X}^{\perp}$

$\vec{pr'} \in \vec{X}$, $\vec{r'r} \in \vec{X}^{\perp}$ ortogonal

$d(p,r) + d(r,q) > d(p,r') + d(r',q) \geq d(p,q)$

$X = a + \vec{X}$ $\quad \vec{X} = \{ \vec{pq} \ ; \ p,q \in X \}$

28/4/2015

Definición

$$d(p,x) = \inf \{ d(p,q) : q \in x \}$$

Proposición

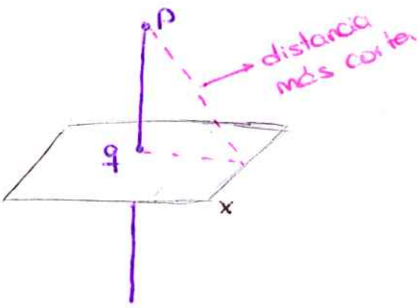
Existe un único $q \in X$ tal que $d(p,x) = d(p,q)$

Corolario.

$$d(p,x) = 0 \iff p \in x$$

Demostración

$$q = \pi_x(p) \in X$$



$$a \in x \Rightarrow \vec{qa} \in \bar{x}, \quad \vec{pq} \in \vec{x}^{\perp} \Longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{th Piteig}} d(p,q) > d(p,q) \Rightarrow \inf \{ d(p,a) : a \in x \} \geq$$

$$\geq d(p,q) \geq d(p,x) \Rightarrow d(p,x) = d(p,q)$$

Ejemplo Supongamos que x es un hiperplano:

$$x : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0$$

$$(x_1 \dots x_n)_R = q \in x$$

$$p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_R$$

$$\bar{x} : a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

$$\bar{x}^{\perp} : \langle (a_1, \dots, a_n)_B \rangle$$

$$\frac{|a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n + b|}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} \rightsquigarrow d(p,x)$$

$$(x_1, \dots, x_n)_B \in \bar{x}$$

$$f((a_1, \dots, a_n)_B (x_1 \dots x_n)_B) = f\left(\Sigma a_i u_j, \Sigma x_i u_j \right) = \sum_{ij} a_i x_j \cdot \underset{\delta_{ij}}{\overset{}{f(u_i, u_j)}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0 \quad \text{valor de } \bar{x}$$

$$\underset{(\alpha_1 + \lambda_1, \dots, \alpha_n + \lambda_n)}{q} = \pi x(p) = p + \lambda (a_1 \dots a_n) \qquad d(p,q) = \| \vec{pq} \| = \| \lambda (a_1, \dots, a_n) \|$$

Teorema $\exists\, p \in X,\ q \in Y$ tal que $d(p,q) = d(X,Y)$

Demostración

$X \cap Y = \emptyset$

¿$\exists\, p \in X,\ q \in X$ tal que $\vec{pq} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$?

$X = a + \bar{X}$

$Y = b + \bar{Y}$

y definimos $Z \doteq b + \bar{X} + \bar{Y}$ y $a' \doteq \pi_Z(a) \in Z \cap (a + \bar{Z}^{\perp}) \Rightarrow$

$\Rightarrow \vec{aa'} \in \bar{Z}^{\perp} = (\bar{X} + \bar{Y})^{\perp} = \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

$X \doteq a' + \bar{X}$

$\begin{cases} X' = a + \bar{X} \\ Y = b + \bar{Y} \end{cases}$ Se cortan ($\vec{a'b} \in \bar{Z} = \bar{X} + \bar{Y}$)

Se cortan $\iff X \cap Y \neq \emptyset \iff \vec{ab} \in \bar{X} + \bar{Y}$, $a \in X$
$b \in Y$

$q \,\dot{\in}\, X' \cap Y$,, $p \doteq q + \vec{a'a}$

i) $\vec{pq} = \vec{aa'} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

ii) $q \in Y$

iii) ¿$p \in X$? [$\vec{pq} = \vec{aa'} \Rightarrow \vec{pa} = \vec{qa'} \in \vec{X'} = \vec{X} \Rightarrow p \in a + \bar{X} = X$]

Caso especial

$\dim_{\mathbb{R}} \bar{V} = 3$

$\left.\begin{array}{l} r_1 = a_1 + \langle u_1 \rangle \\ r_2 = a_2 + \langle u_2 \rangle \end{array}\right\}$ Se cruzan

$$d(r_1, r_2) = \frac{|\det(u_1, u_2, \vec{a_1a_2})|}{\| u_1 \wedge u_2 \|}$$

4/5/2015

Continuación caso especial

$d(r_1, r_2) = d(p_1, p_2)$, siendo $p_1 \in r_1$, $p_2 \in r_2$ y $\overrightarrow{p_1p_2} \in \vec{r_1}^{\perp} \cap \vec{r_2}^{\perp} = \langle u_1\rangle^{\perp} \cap \langle u_2\rangle^{\perp}$

$\overrightarrow{p_1p_2} = \lambda(u_1 \wedge u_2) \Rightarrow d(r_1, r_2) = \|\overrightarrow{p_1p_2}\| = \|\lambda(u_1 \wedge u_2)\| = |\lambda|\,\|u_1 \wedge u_2\|$

Ahora vamos a ver el valor de λ

$$f(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1 \wedge u_2) = f(\lambda(u_1 \wedge u_2), u_1 \wedge u_2) = \lambda \|u_1 \wedge u_2\|^2$$

$$\lambda = \frac{f(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1 \wedge u_2)}{\|u_1 \wedge u_2\|^2}$$

Entonces $d(r_1, r_2) = |\lambda|\,\|u_1 \wedge u_2\| = \dfrac{|f(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1 \wedge u_2)|}{\|u_1 \wedge u_2\|} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{definición} \\ \text{de } \text{"}\wedge\text{"}}}{=}$

$$= \frac{|\det(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1, u_2)|}{\|u_1 \wedge u_2\|}$$

Por lo que ya casi tendríamos demostrada la distancias entre dos rectas

Falta por ver que es válido tanto para $\overrightarrow{p_1p_2}$ como para $\overrightarrow{a_1a_2}$

$$\overrightarrow{a_1a_2} = \underset{\in \vec{r_1}}{\overrightarrow{a_1p_1}} + \overrightarrow{p_1p_2} + \underset{\in \vec{r_2}}{\overrightarrow{p_2a_2}} = \mu_1 u_1 + \overrightarrow{p_1p_2} + \mu_2 u_2 \quad \text{siendo } \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$$

Entonces vamos como afecta al determinante partiendo de $\overrightarrow{a_1a_2}$ en vez de $\overrightarrow{p_1p_2}$.

$$\det(\overrightarrow{a_1a_2}, u_1, u_2) = \underbrace{\det(\mu_1 \bigcirc\!\!\!\!\!u_1, \bigcirc\!\!\!\!\!u_1, u_2)}_{0} + \det(\overrightarrow{p_1p_2}, u_1, u_2) +$$

$$+ \underbrace{\det(\mu_2 \bigcirc\!\!\!\!\!u_2, u_1, \bigcirc\!\!\!\!\!u_2)}_{0}$$; entonces queda demostrado

Definición

Sea A_1, V_1, f_1 $\quad n_1 = \dim_{\mathbb{R}} V_1$ $\quad$ y $d_1(p_1 q_1) = \sqrt{f_1(\overrightarrow{p_1q_1}, \overrightarrow{p_1q_1})} = \|\overrightarrow{p_1q_1}\|_1$

y A_2, V_2, f_2 $\quad n_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$

Se define a $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ como $\vec{\phi}(\overrightarrow{pq}) \overset{def}{=} \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}$

Proposición

Son equivalentes:

i) ϕ conservan distancias $\left(d_2(\phi(p)\phi(q)) = d_1(p,q) \ \forall p,q \in A_1 \right)$

ii) $\vec{\phi}$ conserva el producto escalar

$\left(f_2(\vec{\phi}(u), \vec{\phi}(v)) = f_1(u,v) \ \forall u,v \in V_1 \right)$

iii) ϕ es afín y $\vec{\phi}$ conserva el producto escalar

(ϕ es biyectiva)

Demostración

ii) $\Rightarrow$ iii) Trivial

iii) $\Rightarrow$ i)

$$d_1(p,q)^2 = \|\overrightarrow{pq}\|_1^2 = f_1(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) = f_2(\vec{\phi}(\overrightarrow{pq}), \vec{\phi}(\overrightarrow{pq})) =$$

$$= f_2(\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}, \overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}) = \|\overrightarrow{\phi(p)\phi(q)}\|_1^2 =$$

$$= d_2(\phi(p), \phi(q))$$

i) $\Rightarrow$ ii) $d_1(p,q)^2 = f_1(\overrightarrow{pq}, \overrightarrow{pq}) = f_1(\overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}, \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rq}) =$

$$= d(p,r)^2 + d_1(r,q)^2 + 2 f_1(\overrightarrow{rq}, \overrightarrow{pr})$$

$$d_1(p,q)^2 \overset{i)}{=\!=} d_2(\phi(p), \phi(q))^2 = \dots =$$

$$= d_2(\phi(p), \phi(r))^2 + d_2(\phi(r), \phi(q))^2 + 2 f_2(\overrightarrow{\phi(r)\phi(q)}, \overrightarrow{\phi(p)\phi(r)})$$

$\forall p, q, r \in A_1$

$$f_1(\underset{\substack{\| \\ u}}{\overrightarrow{rq}}, \underset{\substack{\| \\ v}}{\overrightarrow{pr}}) = f_2(\vec{\phi}(\overrightarrow{rq}), \vec{\phi}(\overrightarrow{pr}))$$

4/5/2015

Definición

Sea A, V, f el espacio afín euclideo, con $n = \dim A$

La aplicación $\phi : A \longrightarrow A$ es un movimiento (rígido) o desplazamiento o isometría si conserva distancia

Observación

Los movimientos de A, forma un grupo con la $\circ$. Siendo un grupo infinito.

Proposición

Sea ϕ un movimiento $\Longleftrightarrow \vec{\phi} \in O(V)$

$$q = p + u \Rightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \vec{\phi}(u)$$

$R = \{p ; B\}$ B es ortonormal.

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline u_1 & & & \\ \vdots & & M\vec{\phi}(B) & \\ u_n & & & \end{array}\right) \qquad \phi(p) = (b_1, \dots, b_n)_R$$

Definición (Mov. rígidos planos)

$\dim A = 1$

$R = \{p ; \{u_1\}\}$

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \pm 1 \end{array}\right) = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) & \phi = id_A \quad (A\phi = A) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) & (a \neq 0)\text{, } \phi = \tau_{au_1} \, (A\phi = \emptyset) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & -1 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)}_{\text{Simetría central respecto } A\phi = q} = M\phi(q ; B) & \end{cases}$$

$a - 2x = 0$

Simetra central respecto $A\phi = q$

$\{q\} = A\phi \neq \emptyset$

Observación

Sea $n = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\phi : V \longrightarrow V$ la aplicación lineal biyectiva

$$M\phi(B) = M(\phi(B, B))$$

Definición

Sea B, B' bases de V, tienen la misma orientación si $\det \underbrace{M(B,B')}_{\text{matriz paso}} > 0$

Proposición

$O^+(V) \Rightarrow \det \phi > 0 = \det M_\phi(B) = \det M(\phi(B), B)$

5/5/2015

Movimientos del plano afín euclídeo

Sea $\dim A = 2 = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\phi : A \longrightarrow A$ movimiento $\Leftrightarrow$ $\vec{\Phi} : V \longrightarrow V$ ortogonal

1) Si $\vec{\Phi} \in O^+(V)$, $\det \phi = 1$ (>0)

$* \; M_{\vec{\phi}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Entonces ϕ es una traslación de vector $b_1 u_1 + b_2 u_2$

$* \; M_{\vec{\phi}}(B) = \begin{pmatrix} \cos \sigma & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \sigma & \cos \sigma \end{pmatrix}$, $0 < \sigma < 2\pi \Rightarrow A_\phi = \{p\} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_\phi(\{p, B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{array}\right)$

Entonces ϕ es un giro de centro p y ángulo σ.

Si $\sigma = \pi$, ϕ simetría central respecto de p.

2) Si $\vec{\Phi} \in O^-(V)$, $\det \phi = -1$ $(<0) \Rightarrow \sigma(\vec{\Phi}) = \{1, -1\}$

siendo $u_1 \in V_{\vec{\Phi}, 1}$, y $u_2 \in V_{\vec{\Phi}, -1}$ y $B = \{u_1, u_2\}$ entonces:

$* \; A_\phi \neq \emptyset \Rightarrow p \in A_\phi = p + V_{\vec{\Phi}, 1} \Rightarrow$

$M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ ϕ simetría de eje A_ϕ

$* \; A_\phi = \emptyset \Rightarrow M_\phi(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \phi = \tau \circ \psi$

Siendo ψ = la simetría axial $A_\psi = \langle u_1 \rangle$ y $\tau = \tau_{b_1 u_1}$ = traslació

5/5/2015

Ejemplo. Calcula la simetría de $\mathbb{R}^2$ respecto de su recta $x+y-1=0$

$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

ϕ simetría de eje $x+y-1=0$

$A\phi \quad x+y-1=0$

$A\vec{\phi} = V\vec{\phi},1 \quad : x+y=0$

$u_1 = (1,-1) \qquad p = (1,0)$

$u_2 = (1,1) \in V\vec{\phi},1 \qquad R = \{p ; B\}$

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$M\phi(Rc) = M(R,Rc)\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) M(Rc,R)$$

$$M(R,Rc) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \qquad M(Rc,R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

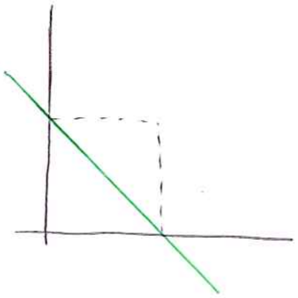
$\overrightarrow{p(0,0)} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$

$\overrightarrow{p(0,0)} = -e_1 = (-1,0).$

$(0,0) \xmapsto{\phi} (1,1)$

$e_1 \xmapsto{\vec{\phi}} \cdot e_2$

$e_2 \longmapsto -e_1$



Ejemplo II. Calcula la ecuación generada de un giro de ángulo $\pi/2$ y centro en $x+y=1$. Utiliza eso para hallar el lugar geométrico del punto $(1,1)$

$\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ giro de ángulo $\pi/2$ y centro en $x+y=1$

$S = \{\phi : \ldots\}$

$X = \{\phi(1,1) : \phi \in S\} = \{\phi_a(1,1) \quad a \in \mathbb{R}\} = \{(-1,1)\}$

$(a, 1-a) \qquad R_a = \{(a,1-a) ; Bc\}$

$$M\phi_a(R_a) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$M_{\phi_a}(R_c) = \begin{pmatrix}1&0&0\\a&1&0\\1-a&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-a&1&0\\a-1&0&1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&0&-1\\0&1&0\end{array}\right)$$

Ejemplo III. Consideremos el plano afín usual cuyas ecuaciones son:

$x' = cy + a \quad , \quad y' = x + b$ con R (ortonormal)

a) Calcula $a, b, c \in \mathbb{R}$ ϕ es un movimiento

b) Clasifica sus movimientos

a)

$$M_\phi(R) = \begin{pmatrix}1&0&0\\a&0&c\\b&1&0\end{pmatrix}$$

ϕ movimiento $\Longleftrightarrow \vec{\phi} \in O_2 \underset{B=\text{ortonormal}}{\Longleftrightarrow} \begin{pmatrix}1&c\\1&0\end{pmatrix}$ ortogonal

$\Longleftrightarrow c = \pm 1$

b) $c = 1$; $M_\phi(R) = \begin{pmatrix}1&0&0\\a&0&1\\b&1&0\end{pmatrix} \Longrightarrow \det \vec{\phi} = -1$ ..

$$A_\phi = \begin{cases} a - x + y = 0 \\ b + x - y = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = -a \Longrightarrow A_\phi : a - x + y = 0 \text{ (simetria)} \\ b \neq -a \Longrightarrow A_\phi = \emptyset \Longrightarrow \phi \text{ simetría con desplazamiento.} \end{cases}$$

$c = -1$

$$M_\phi(R) = \begin{pmatrix}1&0&0\\a&0&-1\\b&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0&0\\a&\cos\pi/2&-\operatorname{sen}\pi/2\\b&\operatorname{sen}\pi/2&\cos\pi/2\end{pmatrix} \Longrightarrow \phi \text{ giro de ángulo } \pi/2$$

$$A_\phi : \begin{cases} a - y - x = 0 \\ b + x - y = 0 \end{cases} \qquad \left.\begin{aligned} y &= \frac{a+b}{2} \\ x &= \frac{a-b}{2} \end{aligned}\right\} \text{ y centro } \left(\frac{a-b}{2}, \frac{a+b}{2}\right).$$

7/5/2015

Movimientos del espacio afín euclídeo (tridimensional)

Sea A, V, f, $\phi : A \longrightarrow A$ movimiento, $\vec{\phi} : V \longrightarrow V$ $\vec{\phi} \in O(V)$,

det ϕ, A_ϕ

Caso 1 : Si $1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

$$1 \notin \sigma(\vec{\phi}) \iff A_\phi = \{p\} \Longrightarrow \phi = \begin{cases} -id_A & 1. \\ \sigma \circ \rho \end{cases} \quad \text{con } R = \{p; B\}$$

1. $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = -id_A$$

2. $\sigma \circ \rho$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{= \sigma_{\langle u_1 \rangle^\perp}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)}_{= \rho_{p + \langle u_1 \rangle, \sigma}} \quad \vec{\phi} \in O^-(V)$$

Caso 2 : Si $1 \in \sigma(\vec{\phi})$:

I. Si $\vec{\phi} \in O^{+}(V)$ entonces:

a) $A\phi \neq \emptyset \implies \phi = \begin{cases} id_A \\ \rho_p + \langle u_1 \rangle, \sigma \end{cases}$ con $R = \{p ; B\}$ siendo $p \in A\phi$

$p \in A\phi$

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right)$$

b) $A\phi = \emptyset \implies \phi = \begin{cases} \tau_u \\ \tau_u \rho \ , \ u \in \overrightarrow{A_p} = \langle u_1 \rangle \end{cases}$ $\boxed{\text{Movimiento helicoidad}}$

con $R = \{p ; B\}$

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) \qquad A_p : \begin{cases} 0 = 0 \\ b_2 + (c-1)y - sz = 0 \\ b_3 + sy + (c-1)z \ 0 \end{cases}$$

$\|$

$\tau_{b_1 u_1}$

$\|$

$M_{\tau_u}(R)$

$u = b_1 u_1$

$\|$

$M_\rho(R)$

ρ giro ángulo σ

y eje $q + \langle u_1 \rangle$

7/5/2015

b) Resultado final

$$M_\phi(\{q;B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$$

II. Si $\vec{\phi} \in O^-(V)$ entonces:

a) $p \in A\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi = \sigma_{p+\langle u_1,u_2\rangle = A\phi}$ $\boxed{\text{Simetría}}$

con $R = \{p;B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simetría respecto del plano $\langle u_1, u_2\rangle$

b) $A\phi = \emptyset \Longrightarrow \phi = T_u \circ \sigma, \quad u \in \vec{A\sigma}$ $\boxed{\text{Simetría con desplazamiento (o con traslación)}}$

con $R = \{p;B\}$

$$M_\phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{traslación}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Simetría.}}$$

$$A\sigma : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b_3 - 2z = 0 \end{cases}$$

σ ; $A\phi : z = b_3/2$

$A\vec{\phi} = \langle u_1, u_2\rangle$

Observación Para conseguir los movimientos del espacio basta con las simetrías y su composición

Resumen Apuntes

para

Exámenes

2° Semestre

* GA = grupo afín biyectivo

Popurrí

* ϕ es ortogonal $\Leftrightarrow$ B ortonormal $\Rightarrow$ $\phi(B_0)$ es ortonorma

* $$M_\phi(B_c) = M_\phi(B, B_c) \cdot M_\phi(B) M_\phi(B_c, B)$$

$$\underset{\phi(u_1)\,\phi\ldots}{\left(\quad '' \quad \right)}\begin{matrix} e_1 \\ \vdots \end{matrix} \qquad \overset{''}{M_\phi(B, B_c)^{-1}} \overset{\text{si es ortonormal}}{\overset{\downarrow}{=}} M_\phi(B, B_c)^t$$

* la traza no depende de la base $\Rightarrow$ $tr\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 2\cos\theta = tr\,A = x$

* ϕ es mov $\Leftrightarrow \bar{\Phi} \in O_n \Leftrightarrow \bar{\Phi}$ es ortogonal

* Si $A_\phi = \emptyset \Rightarrow \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0\,0\,0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M_{\bar{\Phi}}(B) \\ \vdots & \end{array}\right)$

* a, b? ϕ es semejanza $\Rightarrow \bar{\Phi}$ conserva ortogonalidad

* Homotecia: Producto homotecias es otra homotecia

- mismo centro $\Rightarrow$ c es centro
- distinto centro $\begin{cases} c \cdot c' \neq 1 \Rightarrow \text{nuevo centro} \\ c \cdot c' = 1 \Rightarrow \text{traslación} \end{cases}$

* def posit $\Rightarrow$ rotación $V_{\phi,1} = A_\phi$

* def neg $\Rightarrow$ simetría $V_{\phi,1} = A_\phi$

* det = 0 $\Rightarrow$ proyección $V_{\phi,1}$, $V_{\phi,0}$

* Matriz regular = inversible

* q_A nº nucleos. Si diagonaliza mínimo exponente

* $\dim \operatorname{Hom}_K(\underbrace{H, L}_{\text{subespacios propios}}) = \dim H \cdot \dim L$

* hiperplanos son ϕ-inv. si la Imagen = hiperplano

* Jordan $N_1 \subset N_2 \subset N_{③} \Longrightarrow q(x) = (x-\lambda)^{③}$

$$\underset{\text{cajas}}{3}\left[\begin{array}{l} \circ \quad \circ \quad \circ\ ]\ \text{caja } 3\times 3 \\ \circ \quad \circ\ ]\ \text{caja } 2\times 2 \\ \circ\ ]\ \text{caja } 1\times 1 \end{array}\right.$$

* $A = PDP^{-1}$
$D = P^{-1}AP$

* Vector isótropo forma cuadrática $f(u, u) = 0$

* Sylvester coge vector, aplica formula y sale otro, repetir proceso para el 3º

* 1 pto fijo único ϕ-inv. $\Rightarrow P_\phi$ irreducible

* Subespacios ortogonales si $u \in W$, $v \in W'$ $\Rightarrow$ $f(v_1, u_1) = 0$
$f(v_2, u_2) = 0$
$\vdots$

→ Proyección ortogonal u sobre H

$u = (\quad) \qquad H = \langle (\;), (\;), (\;) \rangle$

$\Pi_H(u) = h \qquad u = h + h' \qquad u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + h'$

$$\left.\begin{array}{l} 0 = f(u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2, v_1) \\ 0 = f(\underbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}_{h'}, v_2) \end{array}\right\} \lambda_1 \text{ y } \lambda_2 ?$$

$$H^\perp : 0 = f(x,y)\underset{\in H}{(\quad)} = (x,y)\, A \underset{\in H}{(\quad)} = \text{Resultado} \in H^\perp$$

Popurrí

- Hemisimétricas $H_n(k) = \{A \in Mat_n(k) : A = -A^t\}$
- ϕ monomorfismo $\iff \exists \; \psi : W \longrightarrow V$ k-lineal : $\psi \circ \phi = id_V$
- ϕ epimorfismo $\iff \exists \; \psi : W \longrightarrow V$ k-lineal : $\phi \circ \psi = id_V$
- ϕ proyección $\iff V = W_1 \oplus W_2$ $\quad \pi(u) = u_1$
- ϕ simetría $\iff V = W_1 \oplus W_2$ $\quad \sigma(u) = u_1 - u_2$ $\quad u = \underset{\in W_1}{u_1} + \underset{\in W_2}{u_2}$

- Simetría

  Base $= \ker(id - \phi) = W_1$

  Dirección $= \ker(id + \phi) = W_2$ $\qquad$ diagonaliza si $W_1 \oplus W_2 = k^n$

- Simetría $\phi^2 = id \quad \phi \circ \phi = id$
- Proyección $\phi^2 = \phi \quad \phi \circ \phi = \phi$ $\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Base} = W_1 = Im\,\phi \\ \text{Dirección} = W_2 = \ker \phi \end{array} \right.$

- Diagonaliza si son autovectores los vectores de los subespacios

  $\Rightarrow \underbrace{\phi(v) = \overset{\text{autovalor}}{\lambda} v}_{\text{autovector}} \qquad M \cdot v_1 = \lambda v_1$

- $P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} t(\phi) x^{n-1} + \dots + det(\phi)$
- Matriz regular $\Rightarrow$ matriz inversible
- Imágenes iguales $\Rightarrow$ Hiperplanos invariantes
- Índice nilpotencia = exponente $q(\phi)$ = nº núcleos para el autovalor
  - el índice marca cuantos autovalores hay en la caja

    nº vectores x núcleo en la línea son el orden de la caja

- Ap. biyectiva $M_\phi \iff det\, M_\phi \neq 0$

* Matriz companera

$P[x] = P\phi$
$\qquad \shortparallel$
$a x^n + bx^{n-1} \dots + k$

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & k \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \square \\ 0 & 1 & 0 & \cdot\cdot & 0 & \square \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 & \square \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ - x \\ - x^2 \\ \\ - x^{n-1} \end{array}$$

* Potencia Jordan

$$J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

* no coplanarias $\Rightarrow$ no mismo plano $\Rightarrow |A| \neq 0$

* coplanarias $\Rightarrow$ mismo plano $\Rightarrow |A| = 0$

* Biyectiva $\geq$ endomorfismo

* $q(v) = a x_1 x_2 + x_1 R + x_2 S + T$

* Cónica / Cuadrica

1. Clasificar afin

2. Autov. $A_0 \Rightarrow P_0$ $\qquad D = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_0^t \end{array} \right) A \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P_0 \end{array} \right)$

$D = C'$ conica afinmente euclidea $\Rightarrow \phi$ mov 1 autov. $= \pm 1$

3. $\phi_1 : A \to A : \ \phi_1(C) = C'$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline & P^t \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$$C' = \dots \overset{\text{aplicamos}}{\Downarrow} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

$= \lambda \sqcup + \lambda_{\sqcup} + \dots$

1380

Popurri. Espacio afín euclídeo.

* ϕ es movimiento $\Leftrightarrow$ $\bar{\phi}$ es ortogonal

* Ortogonal $\Leftrightarrow$ $A \cdot A^t = I$

* Simetría $\Leftrightarrow$ $A^2 = I$ * Simetría axial $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\perp = -1$ $\in$ plano $= 1$

* Proyección $\Leftrightarrow$ $A^2 = A$

* Traslación en canónica $\begin{pmatrix} 1 & \\ \underset{u}{\boxed{}} & Id \end{pmatrix} = T_u$

* Congruencia $D = P^t A P$

* Semejanza $D = P^{-1} A P$ * Si es Jordan, no diagonaliza por semejanza

* f prod. escalar $\Leftrightarrow$ 1) $f(u,v) = f(v,u)$ y $f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v) = f(u, \lambda v)$

2) $f(u,u) > 0$ $u \neq 0$ (definida positiva)

si son matrices todos los menores det > 0

* f no degenerada $\Leftrightarrow$ rg $f = \dim$ ($\Leftrightarrow$ $\ker = \emptyset$)

* u, vector isótropo $\Rightarrow f(u,u) = 0$, en matriz $(x, y)\, M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$

* auto_adjunto $\Leftrightarrow$ simétrica. $(f(u,v) = 0)$ $(\langle u, f(v) \rangle = \langle f(u), v \rangle)$

Autoadjunto $\Rightarrow M\phi(Bc) = M\phi(Bc)^t = M\phi(Bc)^{-1} \Rightarrow \phi^2 = Id.$

* Espacio ortogonal $0 = f((x,y,z), \underset{\in W}{u}) = f((x,y,z), w_{\in W})$

* G. Schmidt (sacar base ortogonal - ortonormal)

$$v_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$$

$$\frac{(\lambda_1 v_1 + e_2)}{\|(\quad)\|} = v_2 : \lambda_1 v_1 + e_2 \Rightarrow 0 = f(\lambda v_1 + e_2, v_1) = \lambda_1 + \underset{e_2 \cdot M \cdot v_1}{\underset{\shortparallel}{f(e_2, v_1)}}$$

* Prod. escalar no usual ⇒ para hallar ⊥

$$\left.\begin{aligned} u_1 M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \\ u_2 M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}\right\} (x,y,z) \perp u_1 \text{ y } u_2$$

* Ángulo de una rotación ($\det \phi = 1 \quad \phi \in O^+$)

$$1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} \phi$$

$$\underset{\boxed{A \cdot u_2}}{\overset{}{\phi(u_2)}} \overset{}{=} \cos\theta\, u_2 + \operatorname{sen}\theta\, u_3$$

* Proyección ortogonal $u = \underbrace{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}_{\in H} + \underbrace{h'}_{\in H^\perp}$

$$\begin{cases} f(\underbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2}_{h'},\, v_1) = 0 \\ f(\overbrace{u - \lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2},\, v_2) = 0 \end{cases}$$

* Proy. ortogonal

$\Pi_H(u) = h$

$u = h + h'$

* Simetría ortogonal $\sigma_L(u) = v'_{\in L} - v_{\in L^\perp}$

* $f(u) = A \cdot u$ = Imagen $\qquad f(u) = 0 \Rightarrow \ker f \qquad A \cdot u = 0$

* homotecia centro = c razón = r $\qquad M_\phi(R_c) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right)$

$$c = \left(\frac{b_1}{1-r}, \ldots, \frac{b_n}{1-r} \right) \qquad c = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}$$

homotecia $\bar{h} = \lambda \mathrm{id}$ ⇝ único $A\phi$ = centro

traslación $\bar{\tau} = \mathrm{Id}$

simetría $\phi^2 = \mathrm{Id}$

homología general $\sigma = \{1, \lambda\}$

proyección $\phi^2 = \phi$

1. ESPACIOS AFINES

* Espacio afín terna (A, V, φ) , A es un conjunto, V es k-espacio vectorial y $\varphi : A \times A \longrightarrow V$ es una aplicación tal que

  * $\forall p \in A$ $\varphi_p : A \longrightarrow V$ dado por $\varphi_p(q) = \varphi(p, q)$ es biyectiva
  * $\forall p, q, r \in A \Longrightarrow \varphi(p, q) + \varphi(q, r) = \varphi(p, r)$ Chasles

→ Chasles

$\varphi(p, q) = \overline{pq} = u \in V$

$\dim_k A = \dim_k V = 0 \Longrightarrow V = \{0\} \Longrightarrow A = \{p\}$

$\hat{A} = V$

$$A \times V \longrightarrow A$$

$$(p, u) \longmapsto p + u = p + \overline{pq} = q \quad q \in A$$

Propiedades $\overline{pq}$

- $\overline{pq} = 0 \Longleftrightarrow p = q$
- $\overline{qp} = -\overline{pq}$
- $\overline{pq} = \overline{rs} \Longleftrightarrow \overline{pr} = \overline{qs}$

Referencia afín $R = \{\theta, B\}$, θ (centro) = punto del espacio afín (A)

$B = \{u_1, \dots u_n\}$ base espacio afín

$\{u_i = V_i - \theta\}$

Referencia afín canónica $R = \{\theta = (0, 0 .. 0) ; B_c = \{e_1, \dots, e_n\}$

Sea $p = (x_1 \dots x_n) \in k^n$

$\overrightarrow{\theta p} = p - \theta = (x_1 \dots x_n)_{B_c} \Longrightarrow p = (x_1 \dots x_n)_{R_c}$

Referencias afines. Matiz de paso. $R = \{\theta ; B = \{u_1, \dots u_n\}\}$, $S = \{\theta' ; B = \{v_1 \dots v_n\}\}$
↳ referencia afín

sistema de referencia de A.

$p \in A \Longrightarrow p = (x_1 \dots x_n)_R \Longleftrightarrow \overline{\sigma p} = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$p = (y_1 \dots y_n)_S \Longleftrightarrow \overrightarrow{\sigma' p} = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$

$\sigma\sigma' = \{(b_1 \dots b_n)_B \Longleftrightarrow \sigma\sigma' = b_1 u_1 + \dots + b_n u_n$

$$\overrightarrow{\sigma p} = \overrightarrow{\sigma p} + \overrightarrow{\sigma' p} \Rightarrow x_1u_1 + \dots + x_nu_n = b_1u_1 + \dots + b_nu_n + y_1v_1 + \dots + y_nv_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_1u_1 + \dots + b_nu_n + y_1(\underbrace{\underline{a_{11}}u_1 + \dots + \underline{a_{n1}}u_n}_{v_1}) + \dots + y_n(a_{1n}u_1 + \dots + a_{nn}u_n)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 + a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n \\ &\vdots \\ x_n &= b_n + a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = M(B'B): \text{matriz de paso}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M(B'B) \\ b_n & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Métodos para hallar matriz R_c y $R = \{p(1,0,1);\ B = \{\overset{u_1}{(1,1,1)},\ \overset{u_2}{(1,1,0)}\overset{u_3}{(1,0,0)}\}$

1. $$M(R_c, R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ b_2 & M(B_c, B) \\ b_3 & \end{array}\right)$$

$(b_1, b_2, b_3)_R = 0 = (0,0,0)$ $\qquad$ σ centro canónico $(0,0,0)$

p centro $R = (1,0,1)$

$\overrightarrow{p\sigma} = (-1,0,-1)$

$$M(B_c, B) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad B_c = \{\overset{e_1}{(1,0,0)}, \overset{e_2}{(0,1,0)}, \overset{e_3}{(0,0,1)}\}$$

$(1,0,0) = e_1 = a_{11}(1,1,1) + a_{21}(1,1,0) + a_{31}(1,0,0)$

$a_{11} = 0 \quad a_{21} = 0 \quad a_{31} = 1$

$(0,1,0) = e_2 = a_{12}(1,1,1) + a_{22}(1,1,0) + a_{32}(1,0,0)$

$a_{12} = 0 \quad a_{22} = 1 \quad a_{32} = -1$

$(0,0,1) = e_3 = a_{13}(1,1,1) + a_{23}(1,1,0) + a_{33}(1,0,0)$

$a_{13} = 1 \quad a_{23} = -1 \quad a_{33} = 0$

II

$$M(Bc, B) = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & \boxed{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$(b_1, b_2\ b_3)_R = M(Bc, B) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{f\overline{O}} = (-1, 1, -1)$$

2\.

$$M(Bc, B) = M(B, Bc)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \overset{u_2}{\boxed{1}} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ \underbrace{1}_{u_1} & 0 & \underbrace{0}_{u_3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$\left.\begin{array}{l} \det M(Bc, B) \\ Adj(M^t) \end{array}\right\} \Rightarrow$ y haciendo lo mismo para $b_1 b_2 b_3$

$$M(Rc, R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & \underbrace{1 & -1 & 0} \end{array}\right)$$

$$\text{Matriz} = \frac{Adj(M^t)}{\det M}$$

3\.

$$M(Rc, R) = M(R, Rc)^{-1} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)^{-1}$$

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad Adj(M^t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

✱ Def.

Sea $p \in A$, $W < V$

$X = p + W = \{p + u : u \in W\}$ siendo X una subvariedad afín de A que pasa por P y dimensión W

Subconjunto de A

$X \subset A \Rightarrow \vec{X} = \{\overrightarrow{pq} : p, q \in X\}$

Siendo $X = p + W \Rightarrow \vec{X} = W$; $p \in X \in W$.

Propiedades dimensión

$\dim p + \dim W = \dim_K W$

- $\dim p\ 0 \Rightarrow$ puntos afines
- $\dim p = 1 \Rightarrow$ rectas afines
- $\dim p = 2 \Rightarrow$ planos afines
- $\text{Dim}\ p = n - 1 \Rightarrow$ hiperplanos afines

Ecuaciones Paramétricas y cartesianas de subvariedad afín

$X := p + W$ $p = (b_1, b_n)_R$ $R = \{O, B\}$

✱ Cartesianas

$\dim_K W = m \leq n$ $W : \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{n-m1} x_1 + \cdots + a_{n-mn} x_n = 0 \end{cases}$

$n - m$ = nº ecuaciones

Lema intersección

Sea $X, X' \subset A$, $X = P_0 + W = p + W$; $X' = P_0' + W' = p' + W'$; entonces:

- $X \cap X' = \emptyset$
- P(punto) $\in X \cap X' \Rightarrow X \cap X' = P + W \cap W'$ $W = \vec{X}$, $W' = \vec{X}'$

Fórmula Grassmann

$\dim X \cap X' = \dim \overrightarrow{X \cap X'} = \dim W \cap W' = \dim W + \dim W' - \dim(W + W')$

$= \dim X + \dim X' - \dim(W + W')$

III

Definición Suma

Sea $X = P_0 + W \subset A$ y $X' = P_0' + W' \subset A$

$$X + X' = P_0 + W + W' + < \overrightarrow{P_0 P_0'}$$

Dimensión Suma (Fmla Grassmann)

1. Si $X \cap X' \neq \emptyset$, $P_0 = P_0'$

$$\dim(X + X') = \dim X + \dim X' - \dim X \cap X'$$

2. Si $X \cap X' = \emptyset$ $P_0 \neq P_0'$

$$\dim(X + X') = \dim X + \dim X' - \dim W \cap W' + \underbrace{1}_{P_0 \neq P_0'}$$

Posiciones $X, X' \subset A$

1. $X \cap X' \neq \emptyset$ (secantes)
2. $\overline{X} \subseteq \overline{X'}$ ó $\overline{X}' \subset \overline{X}$ (paralelos)
3. Ni 1 ni 2 $\Rightarrow$ se cruzan

Afinmente independiente

Sea $P_0, P_1 \dots P_m \in A$ $\dim A = \dim_K V = n$ $\overbrace{P_0, P_1 \dots P_m}^{m+1}$ afinmente indep.

si $\overline{P_0P_1}, \dots, \overline{P_0P_m}$ son linealmente independientes en V

Si son afinmente independientes $\Rightarrow$ $R = \{P_0; \{\overline{P_0P_1}, \dots \overline{P_0P_m}\}\}$ es referencia afín; y $< P_0; \{\overline{P_0P_1}, \dots \overline{P_0P_n}\} >$ es referencia cartesiana

Aplicaciones afines

Sean A y A' espacios afines, A, V $\dim A = \dim_K V = n$

A', V' $\dim A' = \dim_K V' = n'$

$\phi : A \longrightarrow A'$ es una aplicación afín si $\exists$ $P_0 \in A$:

$h_0 : V \longrightarrow V'$ dada por

$h_0(\overline{P_0P}) = \overline{\phi(P_0)\phi(P)}$ $\forall P \in A$ es K-lineal.

ϕ afín. $h_0(\overline{P_0P}) = \overline{\phi(P_0)\phi(P)}$ lineal $\Longrightarrow$ $h_1(\overline{P_1P}) = \overrightarrow{\phi(P_1)\phi(P)}$

es lineal y $h_0 = h_1$.

Matriz de la aplicación $M_{\bar\phi}(B,B') \in Mat_{m\times n}(\mathbb{C})$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1' - b_1 \\ \vdots \\ x_m' - b_m \end{pmatrix}}_{\phi(q)} = M_{\bar\phi}(B,B')\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} + M_{\bar\phi}(B,B')\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ \vdots \\ x_m' \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & M_{\bar\phi}(B,B') \\ b_m & \end{array}\right)}_{M_\phi(R,R')}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow Mat_{(n+1)\times(m+1)}(K)$$

Traslación del vector u_0

Las traslación son aplicaciones afines $\phi: A \longrightarrow A$ cuya aplicación lineal asociad

es la identidad

$$\text{Matriz} = M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \dots 0 \\ \hline b_1 & \\ \vdots & I_n \\ b_n & \end{array}\right) \qquad (b_1 \dots b_n)_R = u$$

$T_0 = id_A$.

* Una traslación siempre es biyectiva $\Longrightarrow \phi = T_u \Longrightarrow \exists\, \phi^{-1} = T_{-u}$

solo es u el invariante (pto invariante)

Composición traslaciones

$T_v \circ T_u(p) = (p+u)+v = p+(u+v) = T_{u+v}$

El conjunto traslaciones es un grupo conmutativo $(T(A), \circ) \cong (V,+)$

$T_u \longmapsto u$

IV

Puntos fijos aplicación afín.

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ aplicación afín

$A\phi = \{ p \in A : \phi(p) = p \} \subseteq A$ (ptos fijos de la aplicación afín)

Ao único $\Rightarrow A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}$: $V_{\bar{\phi},1} = 0$

→ $A\phi \neq \emptyset \Rightarrow A\phi = p + V_{\bar{\phi},1}$, siendo $p \in A\phi$

$V_{\bar{\phi},1}$ es la dirección del punto. = subespacio propio para el autovalor 1

Homotecia

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ afín, es homotecia (de razón $r \neq 0, 1$) si $\bar{\phi} = r \cdot id_V$

$$\text{Matriz homotecia} = M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right)$$

matriz correspondiente. no cambia.

+ Punto centro - fijo.

Sea $(x_1, \dots x_n)_R \in A\phi$ (punto fijo) entonces:

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ b_n & 0 & & r \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ \hline x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right) \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1}{1-r} \\ \vdots \\ x_n = \dfrac{b_n}{1-r} \end{cases} \Rightarrow$$

$$C = p + \frac{1}{1-r} \overrightarrow{p\phi(p)}$$

punto R

$$\Rightarrow \exists! \, c \text{ (punto fijo)} \quad c = \left(\frac{b_1}{1-r}, \dots, \frac{b_n}{1-r} \right)_R \in A\phi$$

Es una aplicación biyectiva

$$M\phi(\{c; B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & r & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & r \end{array}\right)$$

porque $\overrightarrow{c\phi(c)}$ está en función de B. $\Rightarrow \overrightarrow{c\phi(c)} = \{0\}$

Id = homotecia

Inversa homotecia = homotecia

Composición homotecias = $\overset{\text{no}}{\boxed{\text{homotecia}}}$ si

$\overrightarrow{p\phi(p)} \in \langle u \rangle$

$c = p + \lambda u \in$ rectas invariantes

$$h_{a,\lambda} \circ h_{a,\mu} = h_{a,\lambda\mu}$$

Proyecciones $\phi^2 = \phi \Longrightarrow \phi \circ \phi = \phi$

La proyección es lineal y vectorial con base $V_{\bar\phi,1}$ y dirección $\ker \bar\phi = V_{\bar\phi,0}$.

$V = V_{\phi,1} \oplus \ker \phi$

ϕ : proyección afín con base $\underbrace{\operatorname{Im}\phi}_{\text{variedad afín}}$ y dirección $\underbrace{\ker\bar\phi}_{\text{subespacio vectorial}}$

se debe a que $A\phi \neq \emptyset \Rightarrow A\phi = p + V_{\phi,1}$ $p \in \operatorname{Im}\phi$

- $\{\phi(q)\} = \operatorname{Im}\phi \cap (q + \ker\bar\phi)$

* No es biyectiva

$p \in A\phi$

$B = \{u \dots u\}$ $\in$ Base $\in$ Dirección.

$$\text{Matriz} = M_\phi(\{p;B\}) = \left(\begin{array}{c|cccccc} 1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ \hline 0 & 1 & & & & & \\ & & \overset{r}{\ddots} & & & & \\ \vdots & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \overset{n-r}{\ddots} & \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}\right)$$

Simetrías

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín en $\chi(K) \neq 2$ es simetría $\iff \phi^2 = id_A$

- $\bar\Phi : V \longrightarrow V$ simetría vectorial base $V_{\bar\phi,1}$ dirección $V_{\bar\phi,-1}$
- $V = V_{\bar\phi,1} \oplus V_{\bar\Phi,-1}$

* $A\phi \neq \emptyset$ $A\phi = p + V_{\bar\Phi,1} = A\phi = \phi - (x,y,z) = M\phi - Id = 0$

ϕ es simetría con base $\operatorname{Im}\phi$ y dirección $V_{\bar\phi,0} = \ker\bar\Phi$

Las simetrías son biyectivas.

- $\{\phi(q)\} = A\phi \cap (q + V_{\phi,-1}) = q + \frac{1}{2}\overrightarrow{q\phi(q)}$

$R = \{p ; B\}$ $B \in A\phi$ $B = \{\underbrace{u_1 \dots u_r}_{V_{\phi,1}}, \underbrace{u_{r+1}, \dots u_n}_{V_{\phi,-1}}\}$

$$\text{Matriz} = M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & \dots 0 \\ \hline 0 & I_r & \\ \vdots & & \\ 0 & & -I_{n-r} \end{array}\right)$$

Proyección asociada

$\psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\psi(x,y,z) \underset{\text{promedio}}{=} \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}, \frac{z+z'}{2} \right)$

Carácter que hay entre una aplicación afín y una lineal Φ aplic. afín $\vec{\Phi} : V_1 \to V_2$

- Φ inyectiva $\Longleftrightarrow \vec{\Phi}$ inyectiva
- Φ suprayectiva $\Longleftrightarrow \vec{\phi}$ suprayectiva
- Φ biyectiva $\Longleftrightarrow \vec{\Phi}$ biyectiva

Composición aplicaciones afines

Sean Φ, Ψ aplicaciones afines: $A_1 \xrightarrow{\Phi} A_2 \xrightarrow{\Psi} A_3$ y $V_1 \xrightarrow{\vec{\Phi}} V_2 \xrightarrow{\vec{\Psi}} V_3$

espacios afines, se verifica que

* $\Psi \circ \Phi$ es afín
* $\overrightarrow{\Psi \circ \Phi} = \vec{\Psi} \circ \vec{\Phi}$

Aplicación biyectiva afín $A_1 \xrightarrow{\Phi} A_2$, $\Longrightarrow \Phi^{-1} : A_2 \longrightarrow A_1$ es afín y $\overrightarrow{\Phi^{-1}} = \vec{\Phi}^{-1}$

Isomorfismos

A_1, A_2 espacios afines $A_1 \simeq A_2$ si $\exists\ \Phi : A_1 \longrightarrow A_2$ afín biyectiva

Sean (A_1, V_1, φ_1), (A_2, V_2, φ_2) espacios afines, $\dim A_1 = n_1$ y $\dim A_2 = n_2$

son equivalentes:

i) $A_1 \simeq A_2$

ii) $V_1 \simeq V_2$

iii) $u_1 = u_2$

Grupo isomorfo.

Sea V un esp. vectorial sobre $K \Longrightarrow GL(V) = \{\Phi : V \longrightarrow V \mid \Phi$ lineal y biyectiva$\}$

$(GL(V), \circ)$ es grupo isomorfo $(\simeq)$ $(Mat_n(K), \cdot) = GL_n(K)$

A, V espacio afín $\Longrightarrow GA(A) = \{\Phi : A \to A \mid \Phi$ afín biyectiva$\}$

$GA(A)$ grupo afín del espacio afín

$(GA(A), \circ)$ grupo invariante del espacio

* $A_1 \simeq A_2 \Longrightarrow GA(A_1) \simeq GA(A_2)$

Matriz composición

Sea $A_1 \xrightarrow{\phi} A_2 \xrightarrow{\varphi} A_3$ se verifica

$R_1 \qquad R_2 \qquad R_3$

$$M_{\varphi \circ \phi}(R_1, , R_3) = M_{\varphi}(R_1, R_3) = M_{\varphi}(R_2, R_3)\, M_{\phi}\, (R_1 R_2$$

Aplicación afín ϕ verifica:

- $\phi(p+w) = \phi(p) + \bar{\phi}(w)$
- $\mathrm{Im}(\phi)$ es variedad
- ϕ conserva el paralelismo ($x \parallel y$; $\overrightarrow{\phi(x)} = \bar{\phi}(\bar{x})$)
- ϕ conserva alineación

Variedad.

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín, $X \subset A$ la variedad X es ϕ-invariante si $\phi(X) \subset X$, es decir, $\phi_{|X} : X \longrightarrow X$ afín

Sea $X = p + W$, X es ϕ-invariante $\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{p\phi(p)} \in W$, $\bar{\phi}(W) \subseteq W$

VI

Clasificación (aplicaciones afines)

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ afín , $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1 , u_2\}\}$.

$$(x, y)_R \xmapsto{\phi} (x', y')_R$$

Ⓘ caso en el que el valor propio es 1

$$1 \in \sigma(\bar{\phi})$$

	$\sigma(\bar{\phi})$ autovalores	$\dim_K V_{\bar{\phi},1}$	A_ϕ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
i	$\{1\}$	2	$\neq \emptyset$	id_A.	$x' = x \quad y' = y$
ii	$\{1\}$	2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
iii	$\{1\}$	1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_ϕ	$x' = x$, $y' = x + y$
iv	$\{1\}$	1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
v	$\{1, 0\}$	1	$\neq \emptyset$	Proyeccion de base A_ϕ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ λ = razón $\langle u_2 \rangle \downarrow$ dirección eje $A_\phi = p + \langle u \rangle$
vi	$\{1, 0\}$	1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
vii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\phi = p + \langle u_1 \rangle$
viii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

3/3/2015

Demostración

i) "$\subseteq$" $\phi(p+u) = \phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(W)$

"$\supseteq$" $$\underbrace{\phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(W)}_{\phi(p+u) \,\in\, \phi(p+W)}$$

*

5/3/2015

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ la aplicación afín, con $\dim A = 1$, siendo V el espacio vectorial asociado $R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \qquad \lambda = M_{\vec{\phi}}(B)$$

$\lambda = 0 \Rightarrow \phi$ constante, $\phi \equiv (b)_R$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{\phi} = \lambda \, id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$$

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín

$A_\phi = \{p\} \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

Demostración

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

$$\# A_\phi = 1 \Longleftrightarrow \text{el sistema} \begin{Bmatrix} b_1 + (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{Bmatrix}$$

$$\text{tiene solución única} \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\vec{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$$

#

VII

5/3/2015

i) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (p \in A_\phi)$$

ii) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (b_1, b_2) \neq (0,0)$$

$B = \{p \, ; \{u_1, u_2\}\}$

$\phi = \tau_{u_1}$ $\qquad u_1 =$ vector de la traslación

iii) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

iv) $$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M_\phi(R)$$

v) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} u_1 \in V_{\bar{\phi},1} \\ u_2 \in V_{\bar{\phi},0} \end{array}$$

vi) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vii) $p + au_2 \longmapsto p + a\lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \\ 0 & & \lambda \end{array}\right)$$

5/3/2015

ⓘⓘ Caso $1 \notin \sigma(\bar{\phi}) \iff A_\phi = \{p\}$

	$\sigma(\bar{\phi})$	$\dim_K V_{\bar{\phi},\lambda}$	Ecuaciones
i	$\{\lambda_1, \lambda_2\}$	—	$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y$
ii	$\{\lambda\}$	2	$\phi \equiv cte, \ \lambda = 0$ Homotecia centro p y razón λ $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda \cdot y$
iii	$\{\lambda\}$	1	$x' = \lambda x, \quad y' = x + \lambda y$
iv	$\emptyset$ P_ϕ irreducible $K[x]$		$x' = -a_0 y, \quad y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists$ P_ϕ

iii)

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

iv) P_ϕ irreducible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\phi}) = \emptyset$

Ejemplo. caso iv) $P_\phi = x^2 + a_1 x + a_0$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right) \qquad R = \{p; \{u_1, \bar{\phi}(u_1)\}\} \ \exists\, u_1 \in V$$

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$(a+b-c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab-2ac-2bc$

I

$f(u+v, w) = f(u,w)+f(v,w)$

$f(u, v+w) = f(u,v)+f(u,w)$

$f(\lambda u, v) = \lambda f(u,v)$

$f(u, \lambda v) = \lambda f(u,v)$

2. Formas Bilineales y Cuadráticas

Forma bilineal. trabajamos en $\chi(K) \neq 2$

Sea $f: V_1 \times \dots \times V_m \longrightarrow V$ K-multilineal si

$f(u_1, \dots, u_{i-1}, a u_i + a' u_i', u_{i+1}, \dots, u_m) = a f(u_1 \dots u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_m) + a' f(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i', u_{i+1} \dots u_m)$

f bilineal y lineal $f: V \times V \longrightarrow K \quad \forall u, v \in V$

$$f(u+v, u+v) = f(u,u) + f(u,v) + f(v,u) + f(v,v) \underset{\uparrow}{=} f(u,u) + f(v,v)$$

$$\shortparallel$$

$$f((u,u)+(v,v)) = f(u,u)+f(v,v)$$

$f(u,v)+f(v,u)=0 \Rightarrow f(v,u) = -f(u,v)$

Matriz ap. bilineal

$f: V \times V \longrightarrow K$ bilineal : $f(u,v) = \sum_{ij} a_{ij} x_i y_i$

$H_f(B) = $ matriz bilineal $= f(u_i, v_j) \in Mat_n(K) = A$

DETERMINANTE ES UNA FORMA MULTILINEAL

$M(B', B) = P \quad , A' = M_f(B') \quad , A = M_f(B)$

$$f(u,v) = (x_1 \dots x_n) \, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = (x_1' \dots x_n') \underbrace{P^t A P}_{A'} \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

$P^{-1} \neq P^t$

* $A' = A$ si $A' = P^t A P \quad P \in GL_n(K)$

$P^{-1} A' (P^t)^{-1} = A \implies (P^t)^{-1} = (P^{-1})^t$

Clasificación formas bilineales

* f simétrica $f(u,v)=f(v,u)$ $S_K(V)=\{f\in Bil_K(V): f \text{ simétrica}\}$

* f antisimétrica $f(u,v)=-f(v,u)$ $A_K(V)=\{f\in Bil_K(V): f \text{ antisimétrica}\}$

Forma bilineal . $Bil_K(V)=\{f:V\times V\longrightarrow K \mid f \text{ forma } K\text{-bilineal}\}$ y

$(Bil_K(V),+,\cdot)$ K-espacio vectorial.

* $(f+g)(u,v)=f(u,v)+g(u,v)$

* $(af)(u,v)=af(u,v)$

Biyectiva $Bil_K(V) \longrightarrow Mat_n(K)$

$f \longmapsto M_f(B)$ $\dim_n Bil_K(V)=n^2$

* **Bilineal** $Bil_K(V)=S_K(V)\oplus A_K(V)$

$M_f(B)=(f(u_i,u_i)) = f(u_j,u_i)$ f simetrica $\Leftrightarrow$ $M_f(B)$ simétrica

- $\dim_K S_K(V)=\dim_K\{A\in Mat_n(K): A=A^t\} = n+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2+n}{2}$

- $\dim A_K(V)=\frac{n^2-n}{2}$

Rango.

$f\in Bil_K(V)$; B, B' bases f

$\left.\begin{matrix} \\ A'=M_f(B') \quad A=M_f(B)\end{matrix}\right\} \Rightarrow A'=P^tAP$, $P\in Gl_n(K)$

$\Rightarrow \begin{cases} \det A' = (\det P)^2 \det A & (\det A' \neq \det A) \\ rg\, A = rg\, A' \end{cases}$

* $rg(f)=rg\, A$, $A=M_f(B)$

* f no degenerado si $rg\, f=\dim_K V$

Bilineal y dual.

Sea $rg(f) = rg\ M_f(B)$; $f : V \times V \longrightarrow k$ bilineal B base de V

$f_i : V \longrightarrow V^* = \{ W : V \longrightarrow k \mid W \text{ lineal} \}$

$u \longmapsto f_i(u)(v) = f(u,v)$

f Bilineal $\Longleftrightarrow$ f_i es lineal

$M_f(B) = A = (f(u_i, u_j)) \Longrightarrow M_{f_i}(B, B^*) = A^t$

$f_d : V \longrightarrow V^* :$

$u \longmapsto f_d(u)(v) = f(v,u)$

f Bilineal $\Longleftrightarrow$ f_d es lineal

$M_f(B) = A = f(u_i u_j) \Rightarrow M_{f_d}(B, B^*) = A$

* $f_i \neq f_d$

* $f_i = f_d$ A simétrica , f es simétrica

No Degenerada – Isomorfismos

Sea f no degenerada $\Longleftrightarrow$ $f_i, f_d : V \longrightarrow V^*$ son isomorfismos

f degenerada $\Longleftrightarrow rg < 2$

Isotropo Sea $f \in Bil_k(V)$, $u \in V$ es isótropo si $f(u,u) = 0$

Si $f(u,u) \neq 0 \Rightarrow$ no isótropo = anisótropos

Propiedades f.

* f degenerada $\Rightarrow \exists\, u \in V,\ u \neq 0$

* f antisimétrica $\Longleftrightarrow \forall\, u \in V$, u es isótropo

* f no antisimétrico $\Rightarrow \exists\, u$, u no es isótropo

Cuadrática $q : V \longrightarrow K$ siendo $q(u) = f(u,u)$

$$\begin{aligned} Bil_K(V) &\longrightarrow Q_K(V) \\ f &\longmapsto q_f \end{aligned}$$

$$q(u+v) = q(u) + q(v) + f(u,v) + f(v,u) = q(u) + q(v) + 2f(u,v)$$

$$\Rightarrow f(u,v) = \frac{1}{2}\left(q(u+v) - q(u) - q(v) \right)$$

* $\chi(K) \neq 2$. $f = f_s + f_a \rightarrow q_f(u) = f(u,u) = f_s(u,u) + \underset{-f_a(u,u)=0}{\underset{\|}{f_a(u,u)}} = f_s(u,u) = q_{f_s}(u)$

Matriz cuadrática $M_q(B) = M_f(B) = A = (a_{ij})$

$$f(u,v) = \sum a_{ij}\, x_i y_j \qquad q(u) = f(u,u) = \sum a_{ij}\, x_i x_j$$

Ortogonal de V

$W < V$, $f \in Bil_K(V)$ „ $W^{\perp f} = \{ u \in V : f(u,v) = 0 \ , \ \forall v \in W \}$

$$f(u,v) = 0 = f_i(u)(v) = \pm f(v,u) = f_d(u)(v)$$

Propiedades

- $W^{\perp} < V$
- $\dim W^{\perp} \geq n - \dim W$
- $W_1 \subset W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subset W_1^{\perp}$
- $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$
- $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$
- $W^{\perp\perp} > W$

* Si f no es degenerada $\Rightarrow$ las propiedades ii, v, vi son igualdades

No antisimétricas

Sea $f \neq 0$, $f \in S_K(V) \Rightarrow f$ no antisimétrica $\Rightarrow \exists\ u$ no isótropo $(u \neq 0)$ cumple:

- $\dim \langle u \rangle^{\perp} = n-1$
- $V = \langle u \rangle \oplus \langle u \rangle^{\perp}$

$f \in Bil_K(V)$

- Si $f \in S_K(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ diagonal, para B de V (base ortogonal respecto f)
- Si $f \in A_K(V) \Longleftrightarrow M_f(B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{r/2} \oplus O_{n-r}$, para B de V siendo $r = rg(f)$

→ 2 matrices congruentes si $\exists\ P$ $B = P^t A P$ Si A es simétrica B también

Congruencia. $A \in Mat_n(K)$ A simétrica $\Longleftrightarrow \exists\, p \in GL_n(K) : \underset{\text{congruencia.}}{\boxed{P^t}} A P$ diagonal

Proposición $u_1, u_2 \in V : f(u_1, u_2) \neq 0$

- * $\{u_1, u_2\}$ Linealmente independiente. $\dim_K \langle u_1, u_2 \rangle = 2$
- * $\dim_K \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp} = n-2$,, $V \in \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$
- * $V = \langle u_1, u_2 \rangle + \langle u_1, u_2 \rangle^{\perp}$

Teorema Sylvester (ley inercia Sylvester) $K = \mathbb{R}$

- * $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ simétrica $\in Bil_{\mathbb{R}}(V) \Longrightarrow \exists\, B$ base de $V : M_f(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus O_{n-r}$
- * $B' \subset V$ base $: M_f(B') = I_{s'} \oplus (-I_{t'}) \oplus O_{n-r} \Longrightarrow s = s', t = t'$ s y t únicos

Matriz diagonal.

- $f \in S_K(V) \Longleftrightarrow M_f(B)$ diagonal
- q cuadrática $\Longrightarrow M_q(B)$ diagonal
- $A \in Mat_n(K)$ simétrica $\Longleftrightarrow \exists\, P \in GL_n(K) : P^t A P$ = mat. diagonal.

Antisimétrica y cuadrática.

f antisimétrica $\Longrightarrow f(u_i, u_i) = 0$,, $f(u_j, u_i) = -f(u_i, u_j)$

$$f(u, v) = \sum a_{ij} x_i y_i \qquad a_{ij} = f(u_i u_j)$$

$$q(u) = f(u, u) = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j \Longrightarrow q(u) = \sum_{i \neq j} a_{ij} x_i x_j = 0$$

Cuadrática $q : V \longrightarrow K \qquad u = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$

$$q(x_1, \dots, x_n) = a x_1 x_2 + x_1 R + x_2 S + T = \underbrace{a\left(x_1 + \frac{S}{a}\right)\left(x_2 + \frac{R}{a}\right)}_{\frac{a}{4}(x_1'^2 - x_2'^2)} - \underbrace{\frac{RS}{a} + T}_{q'(x_3 \dots x_n)}$$

$$x_1' = x_1 + x_2 + \frac{S}{a} + \frac{R}{a}$$

$$x_2' = x_1 - x_2 + \frac{S}{a} - \frac{R}{a}$$

Observación $(FAF^t)^t = F^t A^t F^{tt} = F A^t F^t = F A F^t$ si A es simétrica

- Aparece un cero en 1° posición a_{00} mismas operaciones x fila y columna para que sea distinto de 0 es como

$$\begin{pmatrix} a_{21} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ 1 & 1 & \vdots \\ 1 & 1 & \vdots \end{pmatrix} = T_{12} A T_{12}^t$$

- Toda diagonal con ceros

$$T_{12}(1)\,A = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2a_{12} & a_{12} & \dots \\ a_{12} & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \end{pmatrix} \qquad C_1 + C_2 \neq 0.$$

3. Espacio vect. Euclídeo.

Producto escalar

Sea $n = \dim_{\mathbb{R}} V$ y $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$, f es producto escalar si es definida positiva

($f(u,u) = q(u) > 0 \quad \forall u \neq 0$)

* $f \in S_{\mathbb{R}}(V) \Rightarrow$ Tma Sylvester, $\mathcal{E}(f) = (s,t)$, $r = s+t \Rightarrow$ f prod. escalar $\mathcal{E}(f) = (n,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} f \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \\ q \equiv x_1^2 + \dots + x_n^2 \\ M_f(B) = I_n \end{cases}$$

* Si f prod. escalar, matriz simétrica: B (base ortonormal) $M_f(B) = f(u_i u_j) = I_n$

* Son interpretados $f \equiv x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$

* f prod. escalar sobre V, $\| \ \| : V \longrightarrow \mathbb{R}$: $\|u\| = \sqrt{f(u,u)} = \sqrt{q(u)} \geq 0$

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f((x_1 \dots x_n)(y_1 \dots y_n)) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \Rightarrow \|(x_1 \dots x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

$f(u,u) = 1 \Rightarrow \|u\| = 1$ (vector unitario).

Espacio vectorial euclídeo es un espacio vectorial V que tiene un producto escalar φ V dimensión finita. En el siempre ∃ base ortonormal del Espacio Euclídeo (E)

$\dim_{\mathbb{R}} V = n$ $f \in S_{\mathbb{R}}(V)$ y B base de V, $A = M_f(B) = (a_{ij})$. Son equivalentes

- f prod escalar
- det $\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{vmatrix} > 0 \quad \forall_{i \leq n}$

Propiedades de la norma f prod. escalar sobre V $\dim_{\mathbb{R}} V = n \Longrightarrow \|u\| = \sqrt{q(u)} = \sqrt{f(u,}$

v,
0

La norma verifica

- $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \iff u = 0$ $\forall u \in V$
- $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall u \in V$
- $\forall u, v \in V$ $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \iff f(u,v) = 0 \Rightarrow u \perp v$ Pitágoras
- $\forall u, v \in V$ $|f(u,v)| \leq \|u\| \, \|v\|$ Desigualdad Schwarz

  Si u, v son l. dep. $\iff \|f(u,v)\| = \|u\| \, \|v\|$
- $\forall u, v \in V$ $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Desigualdad triangular.

Schwarz. Sea $u, v \in V$ $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, f prod. escalar sobre V

$$|f(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

$$\lambda \in \mathbb{R} : f(\lambda v, u - \lambda v) = 0 \qquad \lambda = \frac{f(u,v)}{\|v\|^2} \qquad \lambda > 0$$

$$\cos(u,v) = \frac{\|\lambda v\|}{\|u\|} = \frac{|\lambda| \|v\|}{\|u\|} = \frac{f(u,v) \cdot \|v\|}{\|v\|^2 \cdot \|u\|} = \frac{f(u,v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$f(u,v) = \cos(u,v) \|u\| \, \|v\|$; $\|u\|, \|v\| \neq 0$ $\Rightarrow f(u,v) = 0 \Rightarrow \cos(u,v) =$

$$\cos(u,v) \doteq \frac{f(u,v)}{\|u\| \, \|v\|}$$

Proposición Sea $W \subset V$, se verifica

- $\dim_{\mathbb{R}} W^{\perp} = \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} W$ $(= n - \dim_{\mathbb{R}} W)$, siendo $n = \dim_{\mathbb{R}} V$
- $W^{\perp\perp} = W$
- $V = W \oplus W^{\perp}$

Proyección Sea $\Pi_W : \underset{\substack{\shortparallel \\ W \oplus W^{\perp}}}{V} \longrightarrow V$ proyección ortogonal de V con base W

$$\Pi_W(u) = \Pi_W(\underbrace{w + w'}_{\text{único}}) = w$$

Proyección no biyectiva, no conserva ni ortogonalidad ni producto escalar

Simetría Sea $\sigma_W : V \longrightarrow V$ simetría ortogonal de V con base W

$\sigma_W(u) = w - w'$

La simetría es una biyección, la cual conserva el producto escalar

Ángulo.

- rectas : $\text{ang}(\langle u_1 \rangle, \langle u_2 \rangle) \overset{\circ}{=} \text{ang}(u_1, u_2)$
- hipérbolas: $\text{ang}(W_1, W_2) \overset{\circ}{=} \text{ang}(W_1^{\perp}, W_2^{\perp})$

$\dim W_1 = \dim W_2 = n-1$

Ortogonalidad Sean W_1, W_2, ortogonales respecto de f si $W_1 \subset W_2^{\perp}$ ó $W_2 \subset W_1^{\perp}$.

Producto vectorial

Sea $u, v \in \mathbb{R}^3 \Longrightarrow u \wedge v \in \mathbb{R}^3$ prod. escalar con $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

con B. base ortonormal relativo a f de $\mathbb{R}^3$

Siendo $t_i = f_d$. $t_i : \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^{3*}$ y $t_i(\alpha) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$\alpha \longmapsto f_i(\alpha)$ $\quad$ $\beta \longmapsto f_i(\alpha)(\beta) = f(\alpha, \beta)$

Si f es prod. escalar $\Rightarrow$ f no degenerada $\Rightarrow$ $\text{rg}\, t_i = \text{rg}\, f_d = \text{rg}\, f$.

f no degenerado $\Rightarrow$ t_i es isomorfismo

Aplicación.

$\omega_{u,v} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$w \longmapsto \det_B(u, v, w) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \Longrightarrow u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3$$

En u, v fijamos B, base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ (relativo a f) $\Rightarrow$ base canónica es ortonormal,

En $\omega_{u,v} \in \mathbb{R}^3$ tenemos forma lineal

- $\det_B(u, v, w + w') = \det_B(u, v, w) + \det_B(u, v, w')$
- $\det_B(u, v, \lambda w) = \lambda \det_B(u, v, w) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

α único.

f_i isomorfismo $\Rightarrow \exists!\, \alpha \in \mathbb{R}^3 : f_i(\alpha) = \omega_{u,v}$, siendo $f_i(\alpha) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

es decir

$\exists! \alpha \in \mathbb{R}^3 : \forall w \in \mathbb{R}^3 \quad f_i(\alpha)(w) = \omega_{u,v}(w) = f(\alpha, w) = \det_B(u, v, w)$

$\alpha = u \wedge v$ (prod. vectorial),

Propiedades (prod. escalar) Sea $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ forma bilineal simétrica alternada

- $f(u \wedge v, u) = f(u \wedge v, v) = 0$, prod. vectorial es ortogonal con esos vectores
- $u \wedge v = -(v \wedge u)$ Antisimétrica.
- $(u + u') \wedge v = (u \wedge v) + (u' \wedge v)$
- $(\lambda u) \wedge v = \lambda (u \wedge v)$; $u \wedge (\lambda v) = \lambda (u \wedge v)$
- $u \wedge v = 0 \iff \{u, v\}$ linealmente dependiente

Aplicación ortogonal.

Sea V espacio vectorial euclídeo $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$. $\phi : V \to V$ es aplicación ortogonal si

- ϕ endomorfismo
- $f(\phi(u), \phi(v)) = f(u, v) \quad \forall u, v \in V$

Si es ortogonal verifica:

* ϕ conserva la $\| \ \|$ (norma) * $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\}$

* ϕ conserva la ortogonalidad * $W < V$, W ϕ-invariante $\Rightarrow W^{\perp}$ ϕ-invariante

* ϕ es biyectiva

$\Rightarrow$ conserva prod. escalar.

ϕ aplicación son equivalentes

- * ϕ conserva f
- * ϕ ortogonal

ϕ endomorfismo, son equivalentes:

- * ϕ conserva norma
- * ϕ es ortogonal
- * ϕ como ortogonalidad
- * $\phi = \lambda \psi$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ψ ortogonal

$O(V) = \{\phi : \phi$ ortogonal$\}$

$\phi \in O(V)$ y $A = M_\phi(B)$, $A' = M_\phi(B)$ $\Rightarrow$ $A' = P'AP$ $\quad P = M(B', B)$

entonces, $\det A = \det A' = \det \phi$ $\Rightarrow$ ϕ ortogonal $\Rightarrow$ A es inversible $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \det \phi \begin{cases} < 0 \\ > 0 \end{cases}$$

Si $O^+(V) < O^-(V) \Rightarrow O(V) = \{\phi : \phi$ es ortogonal$\} = O^+(V) \dot\cup O^-(V)$

- $O^+(V)$ conservan orientación. Es subgrupo, conserva ortogonalidad
- $O^-(V)$ invierte la orientación. No es subgrupo no conserva ortogonalidad

Isomorfismo ϕ, B base ortonormal de V, son equivalentes

- * ϕ ortogonal
- * $\phi(B)$ base ortonormal
- * $M_\phi(B)$ ortogonal $(A^t = A^{-1})$
- * $M(\phi(B), B)$ es ortogonal $\quad M_\phi(B) = M(\phi(B), B)$

Ortogonal. $\phi \Rightarrow \det \phi = \pm 1$, entonces $M_\phi(B)$ es ortogonal, B ortonormal

$M_\phi(B) \cdot M_\phi(B)^t = I_n$

$\det M_\phi(B) \cdot \det M_\phi(B)^t = 1$, $(\det M_\phi(B))^2 = 1$.

Observación

$O(V)$, $V = \mathbb{R}^n$, es estructura usual

$O(\mathbb{R}^n) = O(n)$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\sim", "\eta"'] & \mathbb{R}^n \\ V \arrow[u, "\phi"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "\eta \circ \phi \circ \eta^{-1}"'] \arrow[l, "\eta^{-1}"] \end{tikzcd}$$

$O(V) \simeq O(n)$

Grupo en el espacio

$\dim_{\mathbb{R}} V = 3$ $O_3(V) \ni \phi$ grupo $p_\phi = 3$

$p_\phi \in \mathbb{R}[x]$, $\sigma(\phi) \subseteq \{1, -1\} \Rightarrow \sigma(\phi) \neq \phi$

$$\left.\begin{array}{c} 1 \in \sigma(\phi) \\ \text{ó} \\ -1 \in \sigma(\phi) \end{array}\right\} \text{ ortogonales } \Rightarrow \exists\, u \neq 0,\ u \in V,\ \phi(u) = \lambda u$$

$\lambda = \pm 1$

$u_1 = \dfrac{u_1}{\|u_1\|}$, $\dim_{\mathbb{R}} \langle u_1 \rangle^{\perp} = 2$, elegimos

$\langle u_1 \rangle^{\perp} = \langle u_2, u_3 \rangle$, $\{u_2, u_3\}$ base ortonormal de $\langle u_1 \rangle^{\perp}$

Consideramos $B = \{u_1, u_2, u_3\}$

$\mathbb{R}^3 = \langle u_1 \rangle \oplus \langle u_1 \rangle^{\perp}$ $\langle u_1 \rangle^{\perp}, \langle u_1 \rangle$ ϕ-invariante $\Leftrightarrow$

$$M_\phi(B) = \left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & \\ \hline & M_{\phi|\langle u_2, u_3 \rangle}(\{u_2, u_3\}) \end{array} \right) \Rightarrow$$

posit. = rotaciones

neg = matrices que se pueden permutar.

Rotaciones.

Toda rotación del espacio euclídeo dimensional que conserva el prod. escalar se puede obtener como una rotación, una simetría respecto de un plano o composición de rectas

Observación en un giro hay que calcular el ángulo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ 0 & \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$1 + 2\cos\theta = \operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A' = \operatorname{tr} \phi$

$\phi(u_2) = \cos\theta\, u_2 + \operatorname{sen}\theta\, u_3$

IV

Teorema.

Para cada $\phi \in O(V)$ $\exists$ B ortonormal :

$M_\phi(B) = I_s \oplus (-I_t) \oplus M_{\sigma_1} \oplus \dots \oplus M_{\sigma_k}$ donde

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$$

$$M_\phi(B) = \left(\begin{array}{ccc} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} & & 0 \\ & \begin{matrix} -1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -1 \end{matrix} & \\ 0 & & \begin{matrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$\underbrace{\quad}_{u_1 \dots u_s} \quad \underbrace{\quad}_{u_{s+1} \dots u_{s+t}} \quad \underbrace{\quad}_{u_{s+t+1} \quad u_{s+t+2}}$$

Espacio vectorial euclídeo autoadjunto

Sea V esp. vectorial euclídeo, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$ y $\phi : V \longrightarrow V$ un endomorfismo

Es autoadjunto si $f(\phi(u), v) = f(u, \phi(v))$ $\forall u, v \in V$

Endomorfismo

B base ortonormal de V, $\phi : V \longrightarrow V$ endomorfismo. Son equivalentes

i) ϕ autoadjunta

$\Downarrow$

ii) $M_\phi(B)$ es simétrica $(A = A^t)$

Tma Espectral

Si ϕ es autoadjunto $\Rightarrow$ $\exists$ B base ortonormal de V formada por vectores propios de ϕ. , es decir

$P^t A P = P^{-1} A P = D =$ diagonal $= \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$ siendo $P^{-1} = P^t$

$A = M_\phi(B_0)$, $\{\lambda_1 \dots \lambda_n\} = \sigma(\phi)$

Consecuencia Tma Espectral

Sea $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ simétrica $\Rightarrow \exists\, P$ ortogonal : $P^t A P = P^{-1} A P = D$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \quad , \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\} = \sigma(A)$$

$A = M_\phi(B_c)$ $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \Rightarrow \phi$ autoadjunto $\Rightarrow$ ya se puede aplicar el teorema espectral.

Justificación autoadjuntos

f es prod. escalar sobre V, $\dim_{\mathbb{R}} V = n$, $\phi \in End_{\mathbb{R}} V \Rightarrow \exists!\, \psi \in$ $\in End_{\mathbb{R}} V$ (endomorfismo adjunto) : $f(\phi(u), v) = f(u, \psi(v))$

ϕ autoadjunta si $f(\phi(v), v) = f(u, \phi(v))$ $\forall\, u, v \in V \Leftrightarrow \phi$ simétrica

Nota : En base ortonormal ϕ si es autoadjunto $\Rightarrow A = A^t \Rightarrow$ simétrica

4. Espacio Afín Euclídeo

Espacio afín euclídeo es un espacio afín A real, tal que el espacio vectorial asociado V es euclídeo.

Sea A, V, f producto escalar sobre V y el cuerpo es sobre reales.

$\dim_{\mathbb{R}} V = \dim A = n$.

Distancia Se define la distancia de los puntos como $d(p,q) = \|\overline{pq}\|$ $\forall\, p,q \in A$

Sea $R = \{p ; B\}$ sistema de referencia si B es bar ortonormal

Sea $p = (a_1 \dots a_n)_R$ y $q = (b_1 \dots b_n)_R$ sist. referencia $\Longrightarrow$

$$\Rightarrow d(p,q) = \sqrt{(a_1-b_1)^2 + \dots + (a_n-b_n)^2}$$

Espacio afín euclídeo, cumple

i) $d(p,q) \geq 0$ y $d(p,q) = 0 \iff p = q$

ii) $d(p,q) = d(,q,p)$

iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

iv) $d(p,q) \geq |d(p,r) - d(r,q)|$

v) $d(p,q) = d(p,r) + d(r,q) \iff \overline{pr} = \lambda\overline{pq}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$

Definición $d(p,x) = \inf\{d(p,q) : q \in x\}$

Teorema

$\exists!\, q \in X : d(p,X) = d(p,q)$

* $d(p,X) = 0 \iff p \in X$

Definición $d(X,Y) = \inf\{d(p,q) : p \in X, q \in Y\} \geq 0$

$X \cap Y \neq 0 \iff d(X,Y) = 0$

- $d(p, X) = d(p, \Pi_X(p)) = d(p,q)$

Teorema

$p \in X \quad q \in Y$

$d(p,q) = d(X,Y) \iff \overline{pq} \in \bar{X}^{\perp} \cap \bar{Y}^{\perp}$

Teorema II

$\exists\, p \in X, q \in Y : d(p,q) = d(X,Y)$

Aplicación afín euclídeo

Sea A_1, V_1, f_1 $n_1 = \dim_{\mathbb{R}} V$, $d_1(p_1 q_1) = \sqrt{f_1(\overline{p_1 q_1}, \overline{p_1 q_1})} = \| \overline{p_1 q_1} \|_1$

y A_2, V_2, f_2 $n_2 = \dim_{\mathbb{R}} V_2$

Se define a $\phi : A_1 \longrightarrow A_2$ como $\phi(\overline{pq}) \doteq \overline{\phi(p)\, \phi(q)}$

Proposición ϕ

Son equivalentes:

i) ϕ conservan distancias

$$d_2(\phi(p)\,\phi(q)) = d_1(p,q) \quad \forall\, p,q \in A_1$$

ii) $\bar{\phi}$ conserva el producto escalar

$$f_2(\bar{\phi}(u), \bar{\phi}(v)) = f_1(u,v) \quad \forall\, u,v \in V_1$$

iii) es afín y $\bar{\phi}$ conserva el producto escalar

ϕ es biyectiva

Movimiento rígido / desplazamiento / isometría

Sea A, V, f el espacio afín euclídeo, $n = \dim A$

La aplicación $\phi : A \longrightarrow A$ si conserva la distancia es mov. (rígido), o desplazamiento

o isometría

* Los movimientos de A, forman un grupo con la O. Siendo un grupo infinito

Matriz de un movimiento

Sea ϕ un movimiento $\Longleftrightarrow \bar{\Phi} \in O(V)$

$q = p + u \Rightarrow \phi(q) = \phi(p_0) + \bar{\phi}(u)$

$R = \{p ; B\}$ B es ortonormal.

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline u_1 & & & \\ \vdots & & M_{\bar{\phi}}(B) & \\ u_n & & & \end{array}\right)$$

$\phi(p) = (b_1, \ldots, b_n)_R$

Matriz movimientos rígidos planos

$\dim A = 1$, $R = \{p ; \{u_1\}\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & \pm 1 \end{array}\right) = \begin{cases} \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) & \phi = id_A \quad (A_\phi = A) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) & (a \neq 0) \text{,, } \phi = \tau_{au_1} \; (A_\phi = \emptyset) \\ \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right) \sim \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \end{array}\right)}_{} = M_\phi(q ; B) & \end{cases}$$

Simetría central respecto

$A_\phi = q \quad \{q\} = A_\phi \neq \emptyset$

Observación

$n = \dim_{\mathbb{R}} V$, $\phi : V \longrightarrow V$ aplicación lineal biyectiva

$M_\phi(B) = M(\phi(B, B))$

orientación

Sea B, B' bases de V , tienen la misma orientación si $\det M(B, B') > 0$

Proposición $O^+(V) \Rightarrow \det \phi > 0 = \det M_\phi(B) = \det M(\phi(B), B)$

Movimientos del plano afín euclídeo $\dim A = 2 = \dim_{\mathbb{R}} V$

$\phi : A \longrightarrow A$ movimiento $\Leftrightarrow$ $\bar{\phi} : V \longrightarrow V$ ortogonal

1. $\bar{\phi} \in O^{+}(V)$, $\det \phi = 1 \, (>0)$

* $M_{\bar{\phi}}(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{\phi}(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right)$

ϕ es traslación de vector $b_1 u_1 + b_2 u_2$

* $M_{\bar{\phi}}(B) = \begin{pmatrix} \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{pmatrix}$ $0 < \sigma < 2\pi \Rightarrow A_{\phi} = \{p\}$

$\Rightarrow M_{\phi}(\{p, B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{array}\right)$

ϕ giro de centro p y ángulo σ Si $\sigma = \pi$, simetría central resp. de p.

$A_{\phi} \Rightarrow (x, y) = c$

2. $\bar{\phi} \in O^{-}(V)$, $\det \phi = -1 \, (<0) \Rightarrow \sigma(\bar{\phi}) = \{1, -1\}$

$u_1 \in V_{\bar{\phi}, 1}$ $u_2 \in V_{\bar{\phi}, -1}$ $B = \{u_1, u_2\}$ entonces:

* $A_{\phi} \neq \emptyset \Rightarrow p \in A_{\phi} = p + V_{\bar{\phi}, 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow M_{\phi}(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \phi$ simetría de eje A_{ϕ}

* $A_{\phi} = \emptyset \Rightarrow M_{\phi}(\{p; B\}) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow \phi = \tau \circ \psi$ simetría con desplazamiento

Siendo $\psi \equiv$ Simetría axial $A_{\psi} = \langle u_1 \rangle$ $\tau \equiv \tau_{b_1 u_1} =$ traslació

homotecia $\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & b \end{array}\right)$ $b =$ razón

centro p.

Clasificación (aplicaciones afines)

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ afín, $\dim A = 2$, $R = \{p ; B = \{u_1, u_2\}\}$.

$(x, y)_R \xmapsto{\phi} (x', y')_R$

(I) Caso en el que el valor propio es 1

$1 \in \sigma(\bar{\phi})$

	$\sigma(\bar{\phi})$ autovalores	$\dim_K V_{\bar{\phi},1}$	A_ϕ punto fijos	Nombre	Ecuaciones
i	$\{1\}$	2	$\neq \emptyset$	id_A.	$x' = x$ $y' = y$
ii	$\{1\}$	2	$= \emptyset$	traslación	$x' = 1 + x$, $y' = y$
iii	$\{1\}$	1	$\neq \emptyset$	homología especial de eje A_ϕ	$x' = x$, $y' = x + y$
iv	$\{1\}$	1	$= \emptyset$	Homología eje seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + x + y$
v	$\{1, 0\}$	1	$\neq \emptyset$	Proyección de base A_ϕ y dirección u_2	$x' = x$, $y' = 0$ $\lambda =$ razón $\langle u_2 \rangle \downarrow$ dirección eje $A_\phi = p + \langle u \rangle$
vi	$\{1, 0\}$	1	$= \emptyset$	Proyección seguida de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2$
vii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$\neq \emptyset$	Homología general	$x' = x$, $y' = xy$ eje $A_\phi = p + \langle u_1 \rangle$
Viii	$\{1, \lambda\}$ $\lambda \neq 0, 1$	1	$= \emptyset$ (no tiene pto fijo)	Homología general seguido de traslación	$x' = b_1 + x$, $y' = b_2 + \lambda \cdot y$

3/3/2015

Demostración

i) "$\subseteq$" $\phi(p+u) = \phi(p) + \vec{\phi}(u) \in \phi(p) + \vec{\phi}(W)$

"$\supseteq$" $$\underbrace{\phi(p) + \vec{\phi}(u)}_{\shortparallel} \in \phi(p) + \vec{\phi}(W)$$

$$\phi(p+u) \in \phi(p+W)$$

⁎

5/3/2015

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ la aplicación afín, con $\dim A = 1$, siendo V el espacio vectorial asociado $R = \{p ; B = \{u_1\}\}$

$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ b & \lambda \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}$ $\lambda = M_{\vec{\phi}}(B)$

$\lambda = 0 \Rightarrow \phi$ constante, $\phi \equiv (b)_R$

$\lambda \neq 0 \Rightarrow \vec{\phi} = \lambda id_V \Longrightarrow \begin{cases} \phi \text{ traslación} & \lambda = 1 \\ \phi \text{ homotecia} & \lambda \neq 1 \neq 0 \end{cases}$

Proposición

Sea $\phi : A \longrightarrow A$ una aplicación afín

$A_\phi = \{p\} \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

Demostración

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right)$$

⁎ $A_\phi = 1 \Longleftrightarrow$ el sistema $\left\{\begin{array}{c} b_1 + (a_{11} - 1)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ b_n + a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - 1)x_n = 0 \end{array}\right\}$

tiene solución única $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - 1 & \dots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longleftrightarrow P_{\vec{\phi}}(1) \neq 0 \Longleftrightarrow 1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

#

5/3/2015 IV

i)

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (p \in A\phi)$$

ii) $$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad (b_1, b_2) \neq (0,0)$$

$B = \{p ; \{u_1, u_2\}\}$

$\phi = \tau_{u_1}$ u_1 = vector de la traslación

iii)

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

iv)

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 1 & 1 \end{array}\right) = M\phi(R)$$

v)

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} u_1 \in V_{\bar\phi, 1} \\ u_2 \in V_{\bar\phi, 0} \end{array}$$

vi)

$$M\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

vii) $p + a u_2 \longmapsto p + a\lambda u_2$ recta invariante, punto fijo cambia?

5/3/2015

Ⓘⓘ Caso $1 \notin \sigma(\bar{\phi}) \iff A_\phi = \{p\}$

	$\sigma(\bar{\phi})$	$\dim_K V_{\bar{\phi},\lambda}$	Ecuaciones
i	$\{\lambda_1, \lambda_2\}$	—	$x' = \lambda_1 x, \quad y' = \lambda_2 y$
ii	$\{\lambda\}$	2	$\phi \equiv$ cte , $\lambda = 0$ Homotecia centro p y razón λ $x' = \lambda x, \quad y' = \lambda \cdot y$
iii	$\{\lambda\}$	1	$x' = \lambda x, \quad y' = x + \lambda y$
iv	$\emptyset$ P_ϕ irreducible $K[x]$		$x' = -a_0 y, \quad y' = x - a_1 y$ no hay recta invariante afín ya que $\nexists$ P_ϕ

iii) $$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{array}\right)$$

iv) P_ϕ irreducible en $k[x] \Rightarrow \sigma(\bar{\phi}) = \emptyset$

Ejemplo. caso iv) $P_\phi = x^2 + a_1 x + a_0$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -a_0 \\ 0 & 1 & -a_1 \end{array}\right) \qquad R = \{p; \{u_1, \bar{\phi}(u_1)\}\} \ \exists\, u_1 \in V$$

V

7/5/2015

Movimientos del espacio afín euclídeo (tridimensional)

Sea A, V, f, $\phi : A \longrightarrow A$ movimiento, $\vec{\phi} : V \longrightarrow V$ $\vec{\phi} \in O(V)$,

def ϕ, A_ϕ

Caso 1: Si $1 \notin \sigma(\vec{\phi})$

$$1 \notin \sigma(\vec{\phi}) \iff A_\phi = \{p\} \Longrightarrow \phi = \begin{cases} -id_A & 1. \\ \sigma \circ \rho \end{cases} \quad \text{con } R = \{p; B\}$$

$$1.\quad M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = -id_A$$

traslación

2. $\sigma \circ \rho$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right) =$$

$$= \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)}_{\sigma_{\langle u_1 \rangle^\perp}} \underbrace{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)}_{\rho_{p+\langle u_1 \rangle, \sigma}} \qquad \vec{\phi} \in O^-(V)$$

simetría con rotación

Caso 2 : Si $1 \in \sigma(\vec{\phi})$:

I. Si $\vec{\phi} \in O^+(V)$ entonces :

a) $A_\phi \neq \emptyset \implies \phi = \begin{cases} id_A \\ \\ P_{p+\langle u_1 \rangle, \sigma} \end{cases}$ con $R = \{p ; B\}$ siendo $p \in A_\phi$

$p \in A_\phi$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sigma & -\operatorname{sen}\sigma \\ 0 & 0 & \operatorname{sen}\sigma & \cos\sigma \end{array}\right)$$

giro centro p
ángulo σ

b) $A_\phi = \emptyset \implies \phi = \begin{cases} \tau_u \\ \tau_{u}\rho \ , \ u \in \overline{A_\rho} = \langle u_1 \rangle \end{cases}$

Movimiento helicoidad

↑
eje de giro

con $R = \{p ; B\}$

$\phi = \tau \circ \rho$
$\tau = \tau_u \quad u \in \overline{A_\rho} = A_{\vec{\phi}}$
$\rho = P_{r,\sigma} \quad r = \overline{A_\rho}$
$\sigma \Rightarrow$ ec. cos.
$r = p + \langle \rangle$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & c & -s \\ b_3 & 0 & s & c \end{array}\right)$$

$A_\rho : \begin{cases} 0 = 0 \\ b_2 + (c-1)y - Sz = 0 \\ b_3 + sy + (c-1)z = 0 \end{cases}$

$\|$
$\tau_{b_1 u_1}$
$\|$
$M_{\tau_u}(R)$
$u = b_1 u_1$

$\|$
$M_\rho(R)$
ρ giro ángulo σ
y eje $q + \langle u_1 \rangle$

traslación con rotación

VI

7/5/2015

b) Resultado final

$$M_\phi(\{q;B\}) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline b_1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & -s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right)$$

II. Si $\vec{\phi} \in O^-(V)$ entonces:

a) $p \in A_\phi \neq \emptyset \Longrightarrow \phi = \sigma_{p+\langle u_1,u_2\rangle = A_\phi}$ Simetría

con $R = \{p; B\}$

$$M_\phi(R) = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Simetría respecto del plano $\langle u_1, u_2 \rangle$

b) $A_\phi = \emptyset \Longrightarrow \phi = \tau_u \circ \sigma$, $u \in \vec{A_\sigma}$

Simetría con desplazamiento (o con traslación)

con $R = \{p; B\}$

$$M_\phi(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{traslación}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Simetría.}}$$

$$A_\sigma : \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ b_3 - 2z = 0 \end{cases}$$

σ ; $A_\phi : z = b_3/2$

$A_{\vec{\phi}} = \langle u_1, u_2 \rangle$

Observación Para conseguir los movimientos del espacio basta con las simetrías y su composición

5. Cónicas Cuádricas.

Cónica (basado en el teorema espectral)

A plano afín real, la cónica se define como

$$C = \{(x_1, x_2) \in A : a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0\}$$

siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R}) \text{ simétrica}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A_0 \in Mat_2(\mathbb{R}) \text{ simétrica.}$$

$$A_0 = M(g)$$

Afinmente equivalentes

Si $\exists\, \phi \in GA(A)$ (grupo afín de A) : $\phi(C) = C'$. C y C' son afinmente equivalentes.

$C \sim C'$ relación equivalenca

Conjunto cociente es $\{\text{cónicas}\}/\sim$, siendo $\{\text{cónicas}\}$ familia de cónicas del plano afín A

$$\#(\{\text{cónicas}\}/\sim) = 7 \text{ (clases)}$$

Son equivalentes

- Todo polinomio real no constante posee alguna raiz compleja
- Todo polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja
- $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado (todo $\mathbb{C}[x]$ se descompone completamente)
- Todo polinomio real es producto de $P[x] \in \mathbb{R}$ de grado ≤ 2

Teorema Sea k cuerpo conmutativo $f \in k[x]$ no constante , mónico .

$\exists$ F cuerpo conmutativo y $\alpha_1 \dots \alpha_n \in F$:

- k es subcuerpo de F
- $f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$

Identidades Girard - Newton $\rightsquigarrow$ Apuntes clase

12/5/2015

II

Teorema

Cada cónica de A es afinmente equivalente a una de las siguientes:

1	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$	Elipse
2	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	Elipse degenerada
3	$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0$	Hipérbola
4	$y_1^2 - y_2^2 = 0$	Hipérbola degenerada
5	$y_1^2 - 1 = 0$	Parábola simplemente degenerada
6	$y_1^2 = 0$	Parábola doblement degenerada cada pto contado 2 veces.
7	$y_1^2 - y_2 = 0$	Parábola

Proposición

14/5/2015

Sea C una cónica, vamos a ver ahora la forma de llegar a su forma simplificada para clasificarla.

$$C: \ 0 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01} + 2a_{02}x_2 + a_{00} = (1, x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2)_R$

$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz real simétrica, entonces por el Teorema espectral $\exists \ P \in Mat_2(\mathbb{R})$ ortogonal ($\Leftrightarrow P^t = P^{-1}$) tal que

$$A_0 = P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P.$$

Entonces la matriz $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ teniendo en cuenta

$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$, es igual a $\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \lambda_1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

Como $C \longrightarrow C' = \phi_1(C)$, siendo $\phi_1 \in GA(A)$ ϕ_1 es movimiento del plano afin-euclideo A

$$M_{\phi_1}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix}$$ $\bar{\phi}_1$ es movimiento si R es ortonormal

y por lo tanto $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Por lo que el sistema de la cónica $(1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

aplicando ϕ_1 es igual a

$$= (1, x_1', x_2') \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P^t & \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{\text{simétrico sin necesidad de que } P \text{ lo sea también}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} =$$

$$= (1, x_1', x_2') \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a'_{01} & \lambda_1 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

14/5/2015 II

Sabiendo que $P A_0 P^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con los distintos casos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ o $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$

Caso 1 si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\det(A_0') = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$.

Supongamos que estamos en el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

elegimos una matriz afín con traslación $M\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{01}' \lambda_1^{-1} & 1 & 0 \\ a_{02}' \lambda_2^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$

con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ya que si no no podríamos hallar la inversa

ϕ_2 es movimiento si R es ortonormal.

Entonces con $M\phi_2(R)$ llegamos a $\begin{pmatrix} a_{00}' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con la cónica de antes

Subcaso 1

Cuando $a_{00}' \neq 0$?

$$M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1 / a_{00}'|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2 / a_{00}'|} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

- Cuando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \text{Cónica es una elipse}$$

- Cuando $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \Longrightarrow \text{Cónica es una hipérbola}$$

Subcaso 2

Cuando $a_{00}' = 0 \Rightarrow$ $M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una elipse degenerada

- Si $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una hipérbole degenerada

Conclusión $\boxed{\text{caso 1}}$ si $\det(A_0) = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbole} \\ \text{elipse degenerada} \\ \text{hipérbole degenerada} \end{cases}$

Caso 2

Suponiendo que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

Estamos en el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} \\ a'_{01} & \underset{=\lambda_1}{0} & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

Elegimos una matriz afín con traslación $M\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a'_{02} \cdot \lambda_2^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ϕ_2 es movimiento si R es ortonormal entonces

con $M\phi_2(R)$ llegamos a $\begin{pmatrix} a'_{00} & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

IV

14/5/2015

Subcaso 1 si $a'_{01} = 0$

$$\begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- Sub-caso 1.1 $a'_{00} \neq 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = ($

siendo ϕ_3 movimiento con traslación

$y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ La cónica es una parábola simplemente degenerada

- Sub-caso 1.2 $a'_{00} = 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = ($

siendo ϕ_3 movimiento con traslación si R es ortonormal.

$y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una parábola dóblemente degenerada

Subcaso 2 si $a'_{01} \neq 0$

aplicando $M_{\phi_3}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a'_{00}}{2a'_{01}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene

$\begin{pmatrix} 0 & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ que siendo $\lambda_2 > 0$ y $M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

$$M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$$

∴ Se obtiene la cónica $y_1^2 - y_2 = 0$ que es una parábola.

Teorema de la Casificación

C ~~es~~ afinmente equivalente a:

i) Elipse $\iff \det(A_0) > 0, \quad \det(A) \neq 0, \quad \delta(A) = 1 \begin{cases} a_{11} > 0 & |A| < 0 \\ a_{11} < 0 & |A| > 0 \end{cases}$

ii) Elipse degenerada $\iff \det(A_0) > 0, \quad \det(A) = 0$

iii) Hipérbola $\iff \det(A_0) < 0, \quad \det(A) \neq 0$

iv) Hipérbola degenerada $\iff \det(A_0) < 0, \quad \det(A) = 0$ dos rectas que se cruzan

v) Parábola $\iff \det(A_0) = 0, \quad \det(A) \neq 0$

vi) Parábola simplemente degenerada $\iff \det(A_0) = 0, \; rg(A) = 2 \implies \det(A) = 0$

y $\delta(A) = 0$

vii) Parábola doblemente degenerada $\iff rg(A) = 1$.

Proposición

Sea A, B canónica $\quad M^t A M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & \end{pmatrix}$

Proposición

Sea A una matriz real simétrica, entonces $A = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0$

$\delta = |s - t|$ ($\neq 3$ si no no hay cónica en $n = 3$)

nº autov. posit − nº autov neg

IV B.

Teorema Clasificación afínmente equivalente

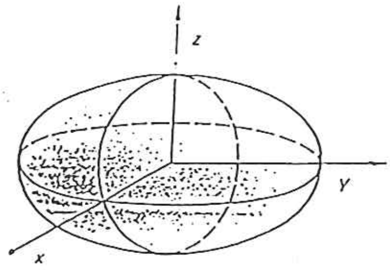
	$\|A_0\|$	$\|A\|$	Rg A	$\delta(A)^*$	Nombre	Ec. reducida
1	>0	$\neq 0$		-1	Elipse no degenerada	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$
2	>0	$=0$			Elipse degenerada	$y_1^2 + y_2^2 = 0$
3	<0	$\neq 0$			Hipérbola no degenerada	$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0$
4	<0	$=0$			Hipérbola degenerada (dos rectas se cruzan)	$y_1^2 - y_2^2 = 0$
5	$=0$	$\neq 0$			Parábola no degenerada	$y_1^2 - y_2 = 0$
6	$=0$	$=0$	2	0	Parábola simplemente degenerada	$y_2 - 1 = 0$
7	$=0$	$=0$	1		Parábola doblemente degenerada	$y_2^2 = 0$

* $\delta(A)$

- |autov post - autov neg|
- Elipses $a_{11} < 0$ $|A| > 0$ } $\delta(A) = 1$
  $a_{11} > 0$ $|A| < 0$
  $a_{11}\ |A|$

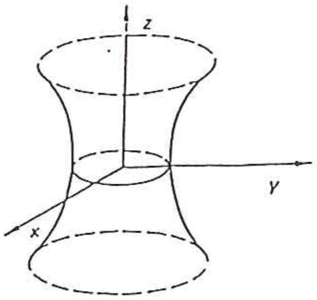
Cónicas espacio afín-euclídeo.

V



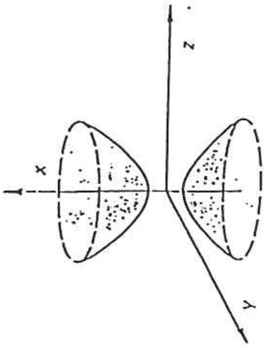
(1) *ELIPSOIDE*:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



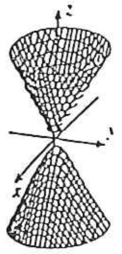
(2) *HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO*

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$



(4) *CONO IMAGINARIO* (*un único punto real*):

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

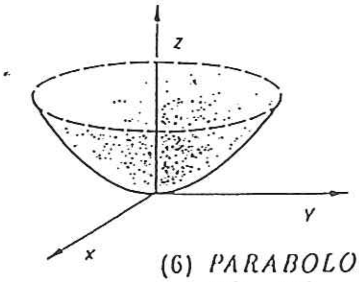


(3) *HIPERBOLOIDE ELIPTICO*

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

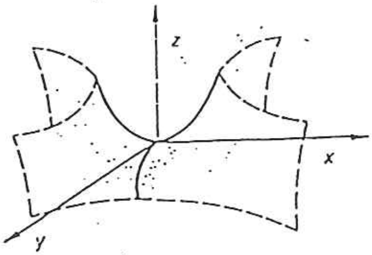
(5) *CONO REAL*:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$



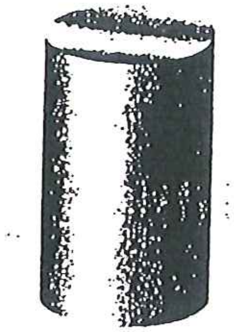
(6) *PARABOLOIDE ELIPTICO*:

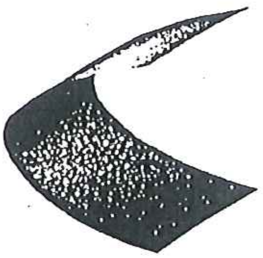
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$$



(7) *PARABOLOIDE HIPERBOLICO*

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$





(8) *CILINDRO ELIPTICO*:

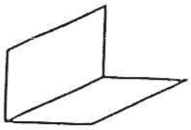
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

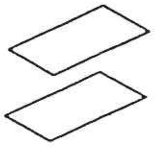
(9) *CILINDRO HIPERBOLICO*:

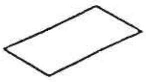
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

(10) *CILINDRO PARABOLICO*:

$$X^2-2aY=0.$$







(11) *PAR DE PLANOS SECANTES*:

$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0.$$

(12) *PAR DE PLANOS PARALELOS*:

$$X^2=a^2.$$

(13) *PLANO DOBLE*:

$$X^2=0.$$

(14) *PAR DE PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0.$

VI

16/5/2015

Teorema Clasificación afín-euclídea

Sea $C: a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0$

Siendo $(x_1, x_2)_R$, R es el sistema de referencia ortonormal del plano afín euclídeo A.

C es afín euclídeamente equivalente a una y sólo una de las siguientes:

1) $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b > 0)$ Elipse.

Caso particular

Si $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Circunferencia

2) $\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a \geq b > 0)$ Elipse degenerada

3) $\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ Hiperbola

Caso particular

Si $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Hiperbola equilatera

4) $\frac{y_1^2}{a^2} - \frac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a, b > 0)$ Hiperbola degenerada

5) $y_1^2 - 2py_2 = 0$ $(p > 0)$ Parábola

6) $y_1^2 - a^2 = 0$ $(a > 0)$ Parábola simplemente degenerada

7) $y_1^2 = 0$ Parábola doblemente degenerada

Cuádricas

21/5/2015

Definición Cuádricas

Sea A un espacio afín real de dimensión 3. y R el sistema de referencia.

Siendo $(x_1, x_2, x_3)_R$, entonces la cuadrática es

$$Q = C : a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \ldots + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 +$$

$$+ 2a_{03} x_3 + a_{00} = 0 \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Observación

Sea A la matriz simétrica de la cuádrica.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & & & \\ a_{02} & & A_0 & \\ a_{03} & & & \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$A, A_0 \in Mat_n(\mathbb{R})$ simétricas

Notación

$\delta(A) = \delta \qquad \delta(A_0) = \delta_0$ son invariantes

$\shortparallel$

diferencia 1 y -1

* Invariantes $r(A) = r$, $r(A_0) = r_0$

* Conjunto invariantes $(r, \delta, r_0, \delta_0)$

Observación

Dos cuádricas C y C' son afinmente equivalentes si $\exists\, \phi \in GA(A) : \phi(C) = C'$

Observación

Sean C y C' afín-euclídeas, $\exists\, \phi$ - movimiento tal que $\phi(C) = C'$

Hay infinitas clases en el espacio afín.

VII

21/5/2015

Teorema Clasificación cuádricas afín-euclídea

Toda cuadrica C del espacio afín real tridimensional es afinmente equivalente a una y solo una de las siguientes ecuaciones reducidas

	Ecuación reducida en afín-euclídea	Nombre	$(\underset{\text{rango}}{r}, \underset{\text{signatura}}{\delta}, r_0, \delta_0)$
1	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0$	Elipsoide	$(4, \underset{\underset{4}{\shortparallel}}{2}, 3, 3)$
2.	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$	(un punto) Cono imaginario	$(3, 3, 3, 3)$
3.	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de una hoja Hiperbólico	$(4, 0, 3, 1)$
4.	$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de dos hojas Elíptico	$(4, 2, 3, 1)$
5.	$y^2_1 + y_2^2 - y_3^2 = 0$	Cono Real	$(3, \underset{2}{1}, 3, 1)$
6.	$y_1^2 + y_2^2 - y_3 = 0$	Paraboloide elíptico	$(4, 2, 2, 2)$
7.	$y_1^2 - y_2^2 - y_3 = 0$	Paraboloide hiperbólico	$(4, 0, 2, 0)$
8.	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico	$(3, 1, 2, 2)$
9.	$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0$	Cilindro hiperbólico	$(3, 1, 2, 0)$
10.	$y_1^2 - y_3 = 0$	Cilindro parabólico	$(3, 1, 1, 1)$
11.	$y_1^2 - y_2^2 = 0$	Par de planos secantes	$(2, 0, 2, 0)$
12.	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	recta: Par de rectas imaginarias conjugada	$(2, 2, 2, 2)$
13.	$y_1^2 - 1 = 0$	Par planos paralelos	$(2, 0, 1, 1)$
14.	$y_1^2 = 0$	Plano doble	$(1, 1, 1, 1)$

* para saber cuál es.

Observación

De las 5 primeras cc. reducidas, cuádricas se obtiene

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ a'_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ a'_{03} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} a'_{00} & 0 \quad 0 \quad 0 \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \boxed{\phantom{\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}} \end{pmatrix}$$

Observación

Las cuádricas 6, 7, 8, 9, 10, 12 (*) tienen dos autovalores no nulos

Proposición

Son equivalentes

1) Todo polinomio real no constante posee alguna raíz compleja.

2) Todo polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja

3) $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado (todo polinomio complejo descompone completamente en $\mathbb{C}[x]$)

4) Todo polinomio real es producto de polinomios reales de grado ≤ 2

Demostración

$1 \Rightarrow 2$

$g \in \mathbb{C}[x]$, $g = \sum a_i x^i$ $a_i \in \mathbb{C}$

$\bar{g}$ polinomio complejo conjugado, $\bar{g} \doteq \sum \bar{a}_i x^i$
definimos

$$\mathbb{R}[x] \ni f = g \cdot \bar{g} = \sum a_i x^i \cdot \sum \overline{a_j} x^j = \sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i,j \leq m}} \sum (a_i \overline{a_j}) \, x^{i+j}$$

$\in \mathbb{R}$

$$\overline{\sum a_i \overline{a_j}} = \sum \overline{a_i} \, \overline{\overline{a_j}} = \sum \overline{a_i} \, a_j$$

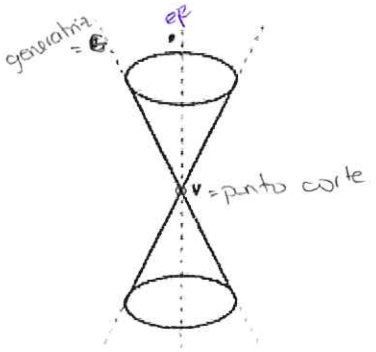
$$\exists \, \alpha \in \mathbb{C} \quad f(\alpha) = 0 = (g\bar{g})(\alpha) \Rightarrow 0 = g(\alpha)\bar{g}(\alpha) = (g\bar{g})(\alpha)$$

$$\bar{g}(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\bar{\alpha}) = \bar{0} = 0$$

$\Sigma a_i \bar{\alpha}^i = g(\bar{\alpha})$

CURVAS EN EL PLANO: CIRCUNFERENCIAS, ELIPSES, HIPÉRBOLAS Y PARÁBOLAS

En el espacio, si dos rectas se cortan en un punto V y una recta gira en torno a la otra, se obtiene una superficie cónica. La recta que gira recibe el nombre de **generatriz** y la otra se denomina **eje** de giro. El punto de intersección de ambas rectas se llama **vértice**.



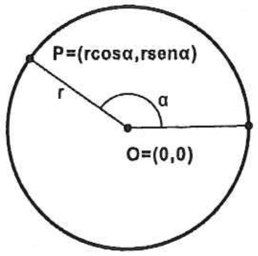
La intersección de una superficie cónica con un plano que **no** pasa por su vértice, da lugar a las curvas llamadas **cónicas**. Las **circunferencias** son las curvas que se obtienen cortando una superficie cónica con un plano perpendicular al eje. Las **elipses** son las curvas que se obtiene cortando una superficie cónica con un plano que no es paralelo a ninguna de sus generatrices. Las **hipérbolas** son las curvas que se obtiene al cortar una superficie cónica con un plano que es paralelo a dos de sus generatrices. Las **parábolas** son las curvas que se obtienen al cortar una superficie cónica con un plano paralelo a una sola generatriz.

Nosotros vamos a estudiar estas curvas como **lugares geométricos**.

La **CIRCUNFERENCIA** de **centro** O y **radio** $r > 0$ es el lugar geométrico de los puntos del plano, P, tales que la distancia a O es r. Es decir, $d(P, O) = r$.

Si el centro es $O = (0, 0)$ y el radio es $r > 0$ la ecuación cartesiana de la circunferencia es $x^2 + y^2 = r^2$, mientras que las ecuaciones paramétricas son

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$$



En general, si el centro es $O = (a, b)$ y el radio es $r > 0$ su ecuación cartesiana es $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$, mientras que las ecuaciones paramétricas son

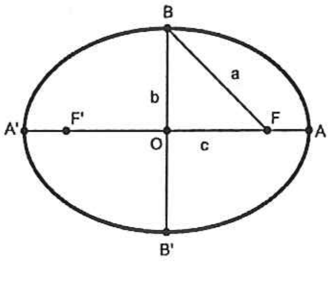
$$\begin{cases} x = a + r\cos\alpha \\ y = b + r\,\mathrm{sen}\,\alpha \qquad \alpha \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

1. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(-3, 0)$ y que pasa por $(3, -8)$.
2. Halla la ecuación de la circunferencia que pasa por $(3, 0)$, $(-1, 0)$ y $(0, 3)$.
3. Halla los valores de k para que la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ represente:

   a) una circunferencia, b) un punto, c) ninguna línea. $= \emptyset$
4. Sea considera la circunferencia $C : x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$. Determina los valores de k para que la recta $y = 2x + k$ sea:

   a) exterior a C, b) tangente a C, c) secante a C.
5. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2+y^2+4x+6y-12 = 0$ en los puntos de abscisa 2.
6. Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(-1, -2)$ y $(3, 2)$ cuyo centro está en la recta $y = -2x$.
7. Halla la ecuación de la circunferencia de centro $(1, 2)$ y tangente a la recta $4x+3y = 35$. Halla el punto de contacto.
8. Halla las ecuaciones de las dos rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ trazadas desde el punto $(2, 0)$.
9. Halla los puntos de intersección de las dos circunferencias. $x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$, $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 8 = 0$, y la longitud de la cuerda común.

La **ELIPSE** es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la **suma** de las distancias a dos puntos fijos F y F', llamados **focos**, es constante. Si llamamos $2a$ a esa constante, los puntos P cumplen $d(P, F) + d(P, F') = 2a$.



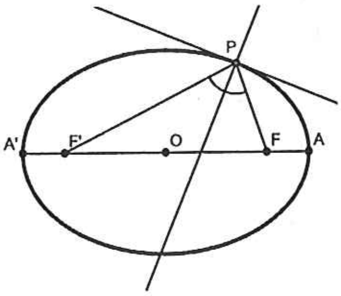
Consideremos la recta que une los focos F y F' y O su punto medio. En O situamos el origen de coordenadas y en la recta que une los focos el eje OX. A los puntos A y A', intersección de la elipse con la recta que pasa por F y F', se les llama **vértices** de la elipse. Observa que $OA = a$, ya que $d(A, F) + d(A, F') = 2a$. También se llama **vértices** a los puntos B y B' que son intersección de la mediatriz del segmento FF' con la elipse. Como B es un punto de la elipse $BF' + BF = 2a$ y, como $BF' = BF$, se tiene que $BF = a$. Llamando b a OB y c a la mitad de la distancia entre los focos, se tiene que $a^2 = b^2 + c^2$. Se llama **excentricidad** al cociente $e = \frac{c}{a}$. En la elipse $e < 1$. La ecuación reducida de la elipse respecto de sus ejes es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Las ecuaciones paramétricas de la elipse son:

$$\begin{cases} x = a\cos\alpha \\ y = b\,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases} \qquad \alpha \in [0, 2\pi]$$

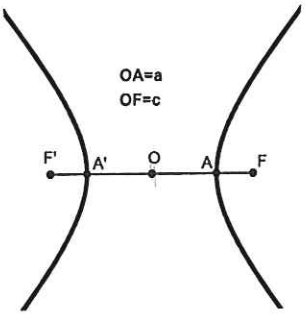
$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

1. Dada la elipse $4x^2+9y^2 = 900$, encuentra la longitud de los semiejes y su excentricidad.
2. Inscribe un rectángulo de lados paralelos a los ejes y perímetro 12 en la elipse $x^2+2y^2 = 6$
3. Dada la elipse $3x^2+2y^2 = 21$, halla los valores de n para los cuales la recta $x-2y-n = 0$ es:

   a) secante a la elipse, b) tangente a la elipse, c) exterior a la elipse.
4. Halla las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16} = 1$, en el punto de abscisa 1 situado en el primer cuadrante.
5. Dada la elipse $x^2 + 4y^2 = 100$ y uno de sus puntos $(6,4)$, comprueba la propiedad geométrica siguiente (válida en cada punto): la tangente y la normal en ese punto son las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores del punto. [Observación: $\sqrt{127 \pm 60\sqrt{3}} = 10 \pm 3\sqrt{3}$].



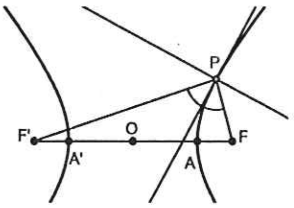
La **HIPÉRBOLA** es el lugar geométrico de los puntos P del plano tales que la **diferencia** de sus distancias a dos puntos fijos F y F', llamados **focos**, es constante. Si llamamos $2a$ a esa constante, son los puntos P tales que $|d(P,F) - d(P,F')| = 2a$.



Los puntos A y A' se llaman **vértices** de la hipérbola. Consideremos el segmento que une F y F' y sea O su punto medio. En O situamos el origen de coordenadas y en la recta que une los focos el eje OX: es decir para cierto $c > 0$, $F = (c,0)$, $F' = (-c,0)$. Se llama **excentricidad** al cociente $e = \frac{c}{a} > 1$. Si, además, para $b > 0$ se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$, la ecuación reducida de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ se llaman **asíntotas** de la hipérbola.

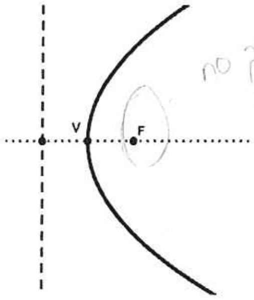
Cuando $a = b$, la hipérbola se dice que es equilátera y su ecuación reducida es $x^2 - y^2 = \lambda \neq 0$. En este caso, las asíntotas son las rectas $y = \pm x$ y la ecuación de la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas es $xy = k$, siendo k una constante.

1. Encuentra los vértices y los focos de la hipérbola $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.
2. Inscribe un triángulo equilátero en la hipérbola $x^2 - 7y^2 = 4$, que tenga un vértice en un vértice de la hipérbola.
3. Dada la hipérbola $x^2 - 4y^2 = 36$ y uno de sus puntos $(10, 4)$, comprueba la propiedad geométrica siguiente (válida en cada punto): la tangente y la normal en este punto son las bisectrices de los ángulos formados por los radios vectores del punto. [Observación: $\sqrt{161 \pm 60\sqrt{5}} = 5\sqrt{5} \pm 6$].



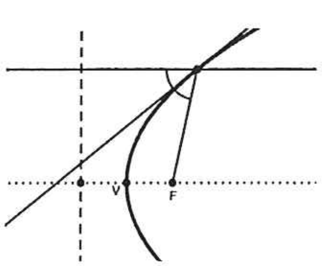
4. Represente la familia de hipérbolas equiláteras definida por la ecuación $xy = k$, para los valores de $k > 0$. Compárala con la familia $xy = k'$, con $k' < 0$.

La **PARÁBOLA** es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo F llamado **foco**, y de una recta fija r, llamada **directriz**. Se llama **eje** de la parábola a la recta perpendicular a la directriz trazada desde el foco. Se llama **vértice** de la parábola al punto intersección de ésta con el eje. Si la directriz es la recta $x = \frac{-p}{2}$ y el foco es el punto $F = (\frac{p}{2}, 0)$, la ecuación de la parábola es $y^2 = 2px$. La excentricidad de una parábola siempre es 1.



no pertenece a la recta

1. Encuentra la ecuación de la parábola que tiene por directriz la recta $x = 5$ y el foco en el punto $F = (-4, 0)$
2. Halla las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la parábola $y^2 = 8x$ en los puntos de abscisa $x = 2$.
3. Dada la parábola $y^2 = 4x$, y uno de sus puntos $P = (4, 4)$, comprueba la propiedad geométrica (válida en cada punto): la tangente a la parábola en P es la bisectriz del ángulo formado por la recta PF y la perpendicular por P a la directriz.



ALG. 11/5/2015

1)

$d(P,O) = r = \|(-6, 8)\| = \sqrt{36 + 64} = 10$

$(x-3)^2 + (y-0)^2 = 10^2 \Rightarrow (x-3)^2 + y^2 = 10^2$

2)

Pasa por: $(3,0)$, $(-1,0)$ y $(0,3)$

$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

$C = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$

$r^2 = \left(\frac{A}{2}\right)^2 + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C$

$(3,0) \Rightarrow 9 + 3A + C = 0$
$(-1,0) \Rightarrow 1 - A + C = 0$

$\Rightarrow \begin{cases} 9 + 3A + C = 0 \\ 3 - 3A + 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow 12 + 4C = 0$ $\boxed{C = -3}$ $\boxed{A = -2}$

$(0,3) \Rightarrow 9 + 3B + C = 0 \Rightarrow 6 = -3B$ $\boxed{B = -2}$

$C = (1, 1)$

[illegible]

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5.$

conjugados = ortogonales
respecto
uno paro

super 0 = ortogonal = el anulador =

12/5/2015

Cónicas en el plano afín

Ejemplo

$$C : \underbrace{3x^2 + 4xy + y^2} - 20x - 12y + a = 0 \qquad a \in \mathbb{R} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\shortparallel$$

$$-x^2 + (2x+y)^2 - 12(2x+y) + 4x + a$$

$$C' : \; -x'^2 + y'^2 - 12y' + 4x' + a$$

$$\shortparallel$$

$$-(x'-2)^2 + (y'-6)^2 + 4 - 36 + a$$

$$C''_a : \; -x''^2 + y''^2 + a - 32$$

$$a = 32 \implies -x''^2 + y''^2 = 0$$

$$(x'' - y'')(x'' + y'') = 0 \begin{cases} x'' - y'' = 0 \\ x'' + y'' = 0 \end{cases}$$

Cónica degenerada

$$a = 37 \implies -x''^2 + y''^2 + 5 = 0$$

$$\shortparallel$$

$$-\left(\frac{x''}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y''}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1 = 0$$

$$x'''^2 - y'''^2 - 1 = 0 \implies \text{hipérbola}$$

$$a = 30 \implies -x''^2 + y''^2 - 2$$

$$-x'''^2 + y'''^2 - 1 = 0 \implies \text{hipérbola}$$

$$\text{Si } a \neq 32 \implies y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \implies \text{hipérbola.}$$

$$\phi_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ afín}$$

$$\phi_a(Ca) \underset{a \neq 32}{=} C : y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \qquad \begin{cases} x' = x \\ y' = 2x + y \end{cases}$$

$$\phi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{afín}$$

$$H\phi_1(Rc) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

aplicación afín no movimiento ya que la parte lineal no es ortogonal

$$\Phi_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad : \left\{ \begin{array}{l} x'' = x' - 2 \\ y'' = y' - 6 \end{array} \right. \quad \text{''} \quad M_{\phi_2}(R_c) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline -2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Definición (cónica) . se basa en el teorema espectral

Sea A plano afín real , la cónica se define como:

$$C = \{ (x_1 , x_2) \in A : a_{11} x_1^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 + a_{00} = 0 \}$$

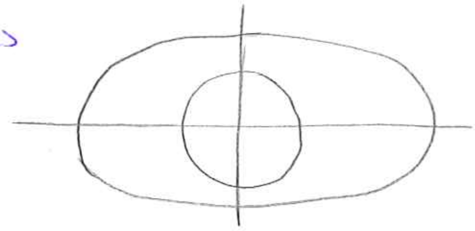
siendo $a_{ij} \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in Mat_3(\mathbb{R}) \quad , \text{ simetrica.}$$

$$A_0 = \underset{\underset{M(q)}{\shortparallel}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}} \in Mat_2(\mathbb{R}) \quad \text{simétrica}$$

Proposición

Si existe $\phi \in GA(A)$ (grupo afín de A) tal que $\phi(C) = C'$, se dirá que C y C' son afinmente equivalentes



Siendo $C \sim C'$ relación de equivalencia

El conjunto cociente es $\{cónicas\}/_\sim$, siendo $\{cónicas\}$ la familia de cónicas del plano afín A.

$$\#\left(\{cónicas\}/_\sim \right) = 7 \text{ (clases).}$$

12/5/2015

Teorema

Cada cónica de A es afinmente equivalente a una de las siguientes:

1	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$	Elipse
2	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	Elipse degenerada
3	$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0$	Hipérbola
4	$y_1^2 - y_2^2 = 0$	Hipérbola degenerada
5	$y_1^2 - 1 = 0$	Parábola simplemente degenerada
6	$y_1^2 = 0$	Parábola doblement degenerada cada pto contado 2 veces.
7	$y_1^2 - y_2 = 0$	Parábola

Proposición

14/5/2015

Sea C una cónica, vamos a ver ahora la forma de llegar a su forma simplificada para clasificarla.

$$C: 0 = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{01} + 2a_{02}x_2 + a_{00} = (1, x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$(x_1, x_2)_R$

$A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ es una matriz real simétrica, entonces por el Teorema espectral $\exists\, P \in Mat_2(\mathbb{R})$ ortogonal ($\Leftrightarrow P^t = P^{-1}$) tal que

$$A_0 = P^t \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P.$$

Entonces la matriz $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ teniendo en cuenta

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P & \\ 0 & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} \text{, es igual a } \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Como $C \longrightarrow C' = \phi_1(C)$, siendo $\phi_1 \in GA(A)$ ϕ_1 es movimiento del plano afín-euclídeo A

$$M_{\phi_1}(R) = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & P & \\ 0 & & \end{array}\right)$$ $\bar{\phi}_1$ es movimiento si R es ortonormal

y por lo tanto $$\begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Por lo que el sistema de la cónica $(1, x_1, x_2) \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

aplicando ϕ_1 es igual a

$$= (1, x_1', x_2') \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P & \\ 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & P^t & \\ 0 & & \end{pmatrix}}_{\text{simétrico sin necesidad de que } P \text{ lo sea también}} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} =$$

$$= (1, x_1', x_2') \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

14/5/2015

Sabiendo que $P A_0 P^t = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con los distintos casos $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ o $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 \neq 0$

Caso 1 si $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$, $\det(A_0') = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0$

Supongamos que estamos en el caso $\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \lambda_1 & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$

elegimos una matriz afín con traslación $H\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{01}' \lambda_1^{-1} & 1 & 0 \\ a_{02}' \lambda_2^{-1} & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ ya que sino no podríamos hallar la inversa

ϕ_2 es movimiento si R es ortonormal.

Entonces con $H\phi_2(R)$ llegamos a $\begin{pmatrix} a_{00}' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ con la cónica de antes

Subcaso 1

Cuando $a_{00}' \neq 0$?

$$M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1 / a_{00}'|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2 / a_{00}'|} \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

- Cuando $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0 \implies \text{Cónica es una elipse}$$

- Cuando $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$$y_1^2 - y_2^2 - 1 = 0 \implies \text{Cónica es una hipérbole}$$

Subcaso 2

Cuando $a_{00}' = 0 \Rightarrow$ $$M\phi_3(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{|\lambda_1|} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$$

- Si $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$y_1^2 + y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una elipse degenerada

- Si $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

$y_1^2 - y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una hipérbole degenerad

Conclusión $\boxed{\text{caso 1}}$ si $\det(A_0) = \lambda_1 \lambda_2 \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{elipse} \\ \text{hipérbole} \\ \text{elipse degenerada} \\ \text{hipérbole degenerada} \end{cases}$

$\boxed{\text{Caso 2}}$

Suponiendo que $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

Estamos en el caso $$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01}' & a_{02}' \\ a_{01}' & \underset{=\lambda_1}{0} & 0 \\ a_{02}' & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$ con $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 \neq 0$

Elegimos una matriz afín con traslación $$M\phi_2(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{02}' \cdot \lambda_2^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ϕ_2 es movimiento si R es ortonormal entonces

con $M\phi_2(R)$ llegamos a $$\begin{pmatrix} a_{00}' & a_{01}' & 0 \\ a_{01}' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

14/5/2015

Subcaso 1 si $a'_{01} = 0$

$$\begin{pmatrix} a'_{00} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

- **Sub-caso 1.1** $a'_{00} \neq 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = ($

siendo ϕ_3 movimiento con traslación

$y_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow$ La cónica es una parábola simplemente degenerada

- **Sub-caso 1.2** $a'_{00} = 0$, aplicando $M_{\phi_3}(R) = ($

siendo ϕ_3 movimiento con traslación si R es ortonormal.

$y_2^2 = 0 \Rightarrow$ la cónica es una parábola doblemente degenerada

Subcaso 2 si $a'_{01} \neq 0$

aplicando $M_{\phi_3}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{a'_{00}}{2a'_{01}} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ se obtiene

$\begin{pmatrix} 0 & a'_{01} & 0 \\ a'_{01} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ que siendo $\lambda_2 > 0$ y $M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$

$$M_{\phi_4}(R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2a'_{01} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{|\lambda_2|} \end{pmatrix}$$

∴ Se obtiene la cónica $y_1^2 - y_2 = 0$ que es una parábola.

Teorema de la Casificación

⇒ C ~~es~~ afinmente equivalente a:

i) Elipse $\Leftrightarrow \det(A_0) > 0$, $\det(A) \neq 0$, $\delta(A) = 1$

ii) Elipse degenerada $\Leftrightarrow \det(\underbrace{A_0}_{\text{parte cuadrática}}) > 0$, $\det(\underbrace{A}_{\text{matriz real.}}) = 0$

iii) Hipérbola $\Leftrightarrow \det(A_0) < 0$, $\det(A) \neq 0$

iv) Hipérbola degenerada $\Leftrightarrow \det(A_0) < 0$, $\det(A) = 0$

v) Parábola $\Leftrightarrow \det(A_0) = 0$, $\det(A) \neq 0$

vi) Parábola simplemente degenerada $\Leftrightarrow \det(A_0) = 0$, $rg(A) = 2 \Rightarrow \det(A) = 0$

y $\delta(A) = 0$

vii) Parábola doblemente degenerada $\Leftrightarrow rg(A) = 1$.

Proposición

Sea A, B canónica $M^t A M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$ $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & \end{pmatrix}$

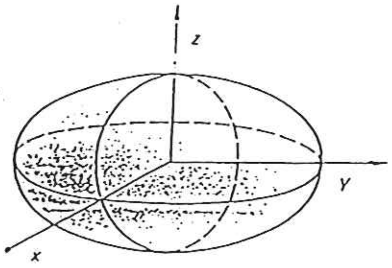
B_0

Proposición

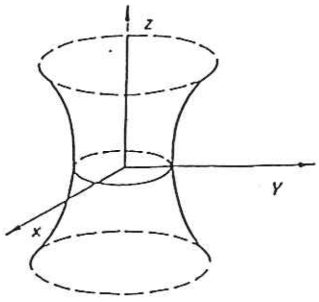
Sea A una matriz real simétrica, entonces $A = I_s \oplus (-I_t) \oplus 0$

$\delta = |s - t|$ ($\neq 3$ si no no hay cónica, en $n = 3$)

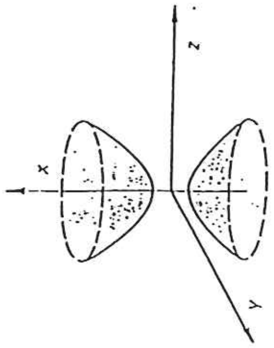
Cónicas espacio afin-euclideo.



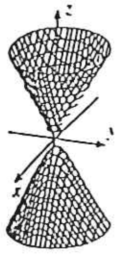
(1) *ELIPSOIDE*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



(2) *HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO*
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

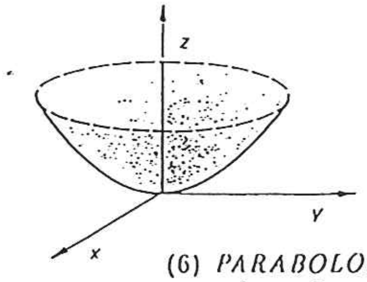


(4) *CONO IMAGINARIO* (*un único punto real*):
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

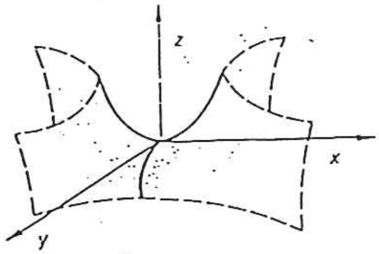


(3) *HIPERBOLOIDE ELIPTICO*
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

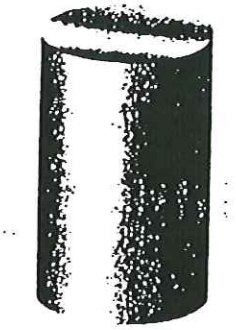
(5) *CONO REAL*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$



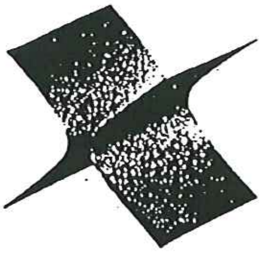
(6) *PARABOLOIDE ELIPTICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$$



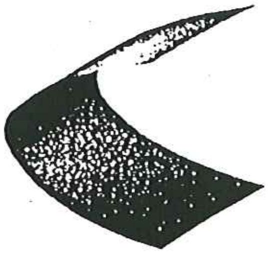
(7) *PARABOLOIDE HIPERBOLICO*
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$



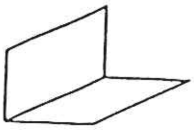
(8) *CILINDRO ELIPTICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$



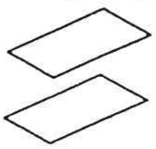
(9) *CILINDRO HIPERBOLICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$



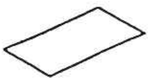
(10) *CILINDRO PARABOLICO*:
$$X^2-2aY=0.$$



(11) *PAR DE PLANOS SECANTES*:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0.$$

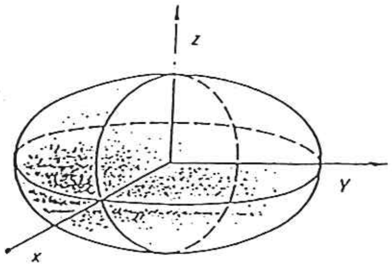


(12) *PAR DE PLANOS PARALELOS*:
$$X^2=a^2.$$

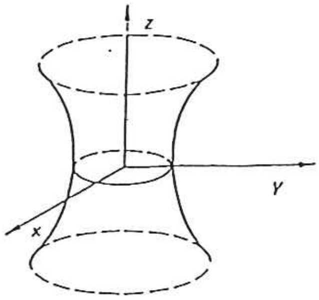


(13) *PLANO DOBLE*:
$$X^2=0.$$

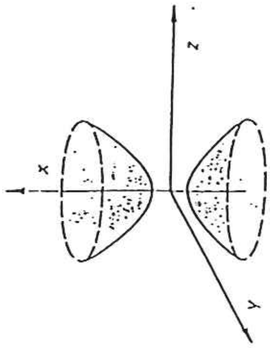
(14) *PAR DE PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0.$



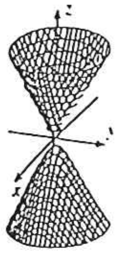
(1) *ELIPSOIDE*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1$$



(2) *HIPERBOLOIDE HIPERBOLICO*
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

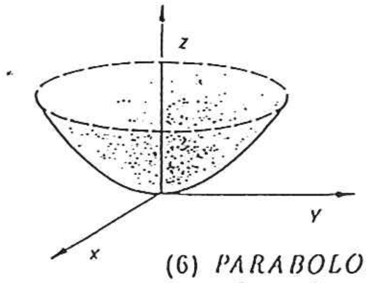


(4) *CONO IMAGINARIO* (*un único punto real*):
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=0$$

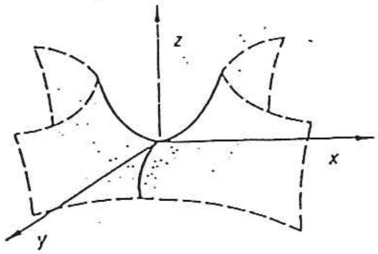


(3) *HIPERBOLOIDE ELIPTICO*
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=1$$

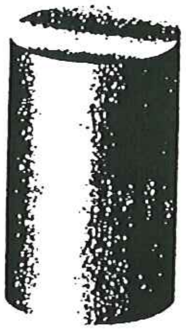
(5) *CONO REAL*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}-\frac{Z^2}{c^2}=0$$

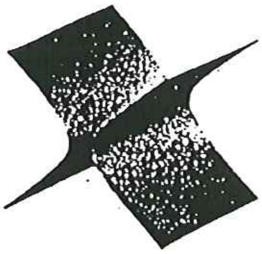


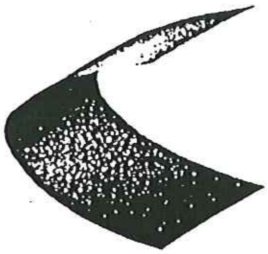
(6) *PARABOLOIDE ELIPTICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=2Z$$



(7) *PARABOLOIDE HIPERBOLICO*
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=2Z.$$



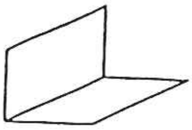


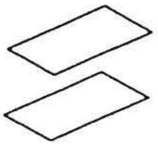


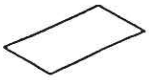
(8) *CILINDRO ELIPTICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$$

(9) *CILINDRO HIPERBOLICO*:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1.$$

(10) *CILINDRO PARABOLICO*:
$$X^2-2aY=0.$$







(11) *PAR DE PLANOS SECANTES*:
$$\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=0.$$

(12) *PAR DE PLANOS PARALELOS*:
$$X^2=a^2.$$

(13) *PLANO DOBLE*:
$$X^2=0.$$

(14) *PAR DE PLANOS IMAGINARIOS CONJUGADOS* $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=0.$

18/5/2015

Teorema Clasificación afín-euclidea

Sea $C: a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{01}x_1 + 2a_{02}x_2 + a_{00} = 0$

Siendo $(x_1, x_2)_R$, R es el sistema de referencia ortonormal del plano afín euclídeo A.

C es afín euclídeamente equivalente a una y sólo una de los siguientes:

1) $\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a \geq b > 0)$ Elipse.

Caso particular

Si $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Circunferencia

2) $\dfrac{y_1^2}{a^2} + \dfrac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a \geq b > 0)$ Elipse degenerada

3) $\dfrac{y_1^2}{a^2} - \dfrac{y_2^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$ Hiperbola

Caso particular

Si $a = b \neq 1 \Rightarrow$ Hiperbola equilatera

4) $\dfrac{y_1^2}{a^2} - \dfrac{y_2^2}{b^2} = 0$ $(a, b > 0)$ Hiperbola degenerada

5) $y_1^2 - 2py_2 = 0$ $(p > 0)$ Parábola

6) $y_1^2 - a^2 = 0$ $(a > 0)$ Parábola simplemente degenerada

7) $y_1^2 = 0$ Parábola doblemente degenerada

Cuádricas

21/5/2015

Definición Cuádricas

Sea A un espacio afín real de dimensión 3, y R el sistema de referencia.

Siendo $(x_1, x_2, x_3)_R$, entonces la cuadrática es

$$Q = C : \boxed{a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + \dots + 2a_{23} x_2 x_3} + 2a_{01} x_1 + 2a_{02} x_2 +$$

$$+ 2a_{03} x_3 + a_{00} = 0 \quad , \quad a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Observación

Sea A la matriz simétrica de la cuádrica.

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{01} & & & \\ a_{02} & & A_0 & \\ a_{03} & & & \end{pmatrix} \qquad A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$A, A_0 \in Mat_n(\mathbb{R})$ simétricas

Notación

$\delta(A) = \delta$ $\qquad$ $\delta(A_0) = \delta_0$ $\qquad$ son invariantes

$\|$

diferencia 1 y -1

- $*$ Invariantes $r(A) = r$, $r(A_0) = r_0$
- $*$ Conjunto invariantes $(r, \delta, r_0, \delta_0)$

Observación

Dos cuádricas C y C' son afinmente equivalentes si $\exists\ \phi \in GA(A) : \phi(C) = C'$

Observación

Sean C y C' afín-euclideas, $\exists\ \phi$ - movimiento tal que $\phi(C) = C'$

Hay infinitas clases en el espacio afín.

21/5/2015

Teorema Clasificación cuádricas afín-euclidea

Toda cuádrica C del espacio afín real tridimensional es afínmente equivalente a una y solo una de las siguientes ecuaciones reducidas

	Ecuación reducida en afín-euclidea	Nombre	$(\underline{r}, \delta, \underline{r_0}, \underline{\delta})$
1	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 1 = 0$	Elipsoide	$(4, 2, 3, 3)$
2.	$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 0$	(un punto) Cono imaginario	$(3, 3, 3, 3)$
3.	$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de una hoja Hiperbólico	$(4, 0, 3, 1)$
4.	$y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - 1 = 0$	hiperboloide de dos hojas Elíptico	$(4, 2, 3, 1)$
5.	$y^2_1 + y_2^2 - y_3^2 = 0$	Cono Real	$(3, 1, 3, 1)$
6. ⊛	$y_1^2 + y_2^2 - y_3 = 0$	Paraboloide elíptico	$(4, 2, 2, 2)$
7. ⊛	$y_1^2 - y_2^2 - y_3 = 0$	Paraboloide hiperbólico	$(4, 0, 2, 0)$
8. ⊛	$y_1^2 + y_2^2 - 1 = 0$	Cilindro elíptico	$(3, 1, 2, 2)$
9. ⊛	$y_1^2 - y^2_2 - 1 = 0$	Cilindro hiperbólico	$(3, 1, 2, 0)$
10. ⊛	$y_1^2 - y_3 = 0$	Cilindro parabólico	$(3, 1, 1, 1)$
11.	$y_1^2 - y_2^2 = 0$	Par de planos secantes	$(2, 0, 2, 0)$
12. ⊛	$y_1^2 + y_2^2 = 0$	recta: Par de rectas imaginarias conjugada	$(2, 2, 2, 2)$
13.	$y_1^2 - 1 = 0$	Par planos paralelos	$(2, 0, 1, 1)$
14.	$y_1^2 = 0$	Plano doble	$(1, 1, 1, 1)$

*para saber cuál es.

Observación

De las 5 primeras cc. reducidas, cuádricas se obtiene

$$\left(\begin{array}{c|ccc} a_{00} & a'_{01} & a'_{02} & a'_{03} \\ \hline a'_{01} & \lambda_1 & 0 & 0 \\ a'_{02} & 0 & \lambda_2 & 0 \\ a'_{03} & 0 & 0 & \lambda_3 \end{array}\right) \simeq \left(\begin{array}{c|ccc} a'_{00} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Observación

Las cuádricas 6, 7, 8, 9, 10, 12 (*) tienen dos autovalores no nulos

Proposición

Son equivalentes

1) Todo polinomio real no constante posee alguna raíz compleja.

2) Todo polinomio complejo no constante posee alguna raíz compleja

3) $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado (todo polinomio complejo descompone completamente en $\mathbb{C}[x]$)

4) Todo polinomio real es producto de polinomios reales de grado ≤ 2

Demostración

$1 \Rightarrow 2$

$g \in \mathbb{C}[x]$, $g = \sum a_i x^i$ $a_i \in \mathbb{C}$

$\bar{g}$ polinomio complejo conjugado, $\bar{g} \underset{\text{definimos}}{\doteq} \sum \bar{a}_i x^i$

$$\mathbb{R}[x] \ni f = g \cdot \bar{g} = \sum a_i x^i \cdot \sum \bar{a_j} x^j = \boxed{\sum_{\substack{i+j=k \\ 1 \leq i,j \leq m}} \sum (a_i \bar{a_j})} x^{i+j} \in \mathbb{R}$$

$$\overline{\sum a_i \bar{a_j}} = \sum \bar{a_i} \bar{\bar{a_j}} = \sum \bar{a_i} a_j$$

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} \quad f(\alpha) = 0 = (g\bar{g})(\alpha) \Rightarrow 0 = g(\alpha)\bar{g}(\alpha) = (g\bar{g})(\alpha)$$

$$\bar{g}(\alpha) = 0 \Rightarrow g(\bar{\alpha}) = \bar{0} = 0$$

$$0 = \bar{g}(\alpha) = \sum \bar{a}_j \alpha^j \Rightarrow \bar{0} = \sum a_i \bar{\alpha}^i = g(\bar{\alpha})$$

21/5/2015

Demostración (continuación)

$3 \Rightarrow 4)$

Sea $f \in \mathbb{R}[x] \Rightarrow f \in \mathbb{C}[x] \xrightarrow{3_)} \underset{\uparrow \text{mónico}}{f} = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_n) \quad \alpha_i \in \mathbb{C}$

Supongamos $\alpha_1 \in \mathbb{C}$, $\alpha_1 \notin \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_2 = \bar{\alpha}_1$ conjugados

$\Rightarrow (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \in \mathbb{R}[x]$

$4 \Rightarrow 1)$

Si al descomponer aparecen raíces de grado ≥ 2 hay alguna raíz real.

22/5/2015

Teorema

Sea k un cuerpo conmutativo $f \in k[x]$ no constante, mónico. Existe F cuerpo conmutativo y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ tal que:

i) k es un subcuerpo de F

ii) $f = (x-\alpha_1) \ldots (x-\alpha_n)$

Identidades de Girard - Newton.

Sea $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in k$; $f = (x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$ $\alpha_i \in F$

$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \ldots \alpha_n$

$a_1 = (-1)^{n-1}(\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} + \ldots + \alpha_2 \ldots \alpha_n) \ldots a_{n-1} = -(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) =$

$= (-1)^{n-(n-1)}(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n)$

Entonces:

$$a_{n-k} = (-1)^k \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_k} \quad , \; k = 0, \ldots, n$$

Ejemplo.

$x^3 - 3x + 1 = 0 \qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \quad ,, \quad \beta_i = \alpha_i + 1$

$a_0 \overset{\text{G-N}}{=} -\beta_1 \beta_2 \beta_3 = -(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1) =$

$= -\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3) - 1 = 1 + 3 - 1 = 3$

$a_1 = \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 = \dots = \dots 0$

$a_2 = -(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + 3) = -3$

$a_{n-k} = (-1)^k \sum\limits_{1 \leq i_1 \leq \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} \quad k = 1, \dots n$ (anillo unitario)

$k[x_1 \dots x_n] = k[x_1 \dots x_{n-1}][x_n]$ (anillo)

$\sum a_{i_1 \dots i_n} \underbrace{x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}}_{\text{monomio}} \quad , + , \cdot$

$a_{i_1 \dots i_n} \in k \quad ; \; i_1, \dots, i_n \geq 0$

Al tener una indeterminación no se cumplen todas las propiedades de polinomios. No se puede dividir por un $k[x]$ con cociente y resto.

Proposición

Sea k cuerpo conmutativo $k \subset R$, R anillo conmutativo y unitario

$f \in k[x_1 \dots x_n] \; \alpha_1 \dots \alpha_n \in R$

$f(\alpha_1 \dots \alpha_n) \underset{\text{defin.}}{=} \sum\limits_{\text{en } R} a_{i_1 \dots in} \underbrace{\alpha_1^{in} \dots \alpha_n^{in}}_{\text{en } R} \in R$

$(f+g)(\alpha_1 \dots \alpha_n) = f(\alpha_1 \dots \alpha_n) + g(\alpha_1 \dots \alpha_n)$

Id. Girard-Newton

$a_{n-k} = (-1)^k \sum\limits_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_k} = (-1)^k \Big(\underbrace{\sum x_{i_1} \dots x_{i_k}}_{\substack{\text{polinomio simétrico} \\ \text{elemental} = S_k}} \Big)(\alpha_1 \dots \alpha_n) =$

$= (-1)^k S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$

$S_k \in k[x_1 \dots x_n]$

22/5/2015

$1 \leq k \leq n \qquad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$

$n = 2 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 \\ S_2 = x_1 x_2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \longrightarrow x_1 \\ x_2 \longrightarrow x_2 \end{matrix} \quad \Big\| \quad \begin{matrix} x_1 \longmapsto x_2 \\ x_2 \longmapsto x_1 \end{matrix}$

$n = 3 \Rightarrow \begin{cases} S_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ S_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ S_3 = x_1 x_2 x_3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \longrightarrow x_2 \\ x_2 \longrightarrow x_1 \\ x_3 \longrightarrow x_3 \end{matrix}$

Proposición

S_n = { permutaciones del conjunto $\{1, \dots, n\}$ }

$|S_n|$ = nº elementos $= n!$ $\qquad \sigma \in S_n \quad \sigma(i) \cdot 1 \leq i \leq n$

$F \in k[x, \dots x_n]$ es simétrico si

$F(x_1, \dots x_n) = F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \ \forall \sigma \in S_n$

Ejemplo

$x^2 y + x y^2 \qquad x + y = S_1 \qquad xy = S_2$

$x^2 y + x^2 x = xy(x+y) = S_2 S_1 = (z_1 - z_2)$ $\quad (S_2 S_1) \rightarrow$ simetrica

simétrica $= x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy = F(S_1 S_2)$

$F(z_1 z_2) = z^2_1 - 3z_2$

25/5/2015

Visto anteriormente

$F \in k[x_1 \dots x_n]$ simétrico si $F(x_1 \dots x_n) = F(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) \ \forall \sigma \in S_n$

$S_1 \dots S_n \in k[x_1, \dots x_n] \quad S_k = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k}$ (polinomio simétrico elemental)

$a_{n-k} = (-1)^k S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ Identidad Girard-Newton

Teorema Fundamental de polinomios simétricos

Si $F \in k[x, \dots x_n]$ es simétrico, entonces existe $G \in k[x, \dots, x_n]$ tal qu

$F = G(S_1, \dots, S_n)$

Demostración

Sea $F = \sum a_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ $\quad (i_1, \dots i_n) \in \mathbb{N}^n = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$ siendo un conjunto ordenado.

Decimos que $(i_1, \dots, i_n) > (j_1 \dots j_n)$ por orden lexicográfico

si $i_1 = j_1 \dots i_k = j_k$, $i_{k+1} > j_{k+1}$

Proposición

$\Longrightarrow \partial F = \max_{lex} \{(i_1 \dots i_n) : a_{i_1 \dots i_n} \neq 0\}$

$\partial S_1 = \partial(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \equiv (1, 0, \dots, 0)$

$(1, 0 \dots 0) > (0, 1 \dots 0) > \dots > (0, \dots 0, 1)$

grado S_1

$\delta_{S_2} = \partial(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{n-1} x_n) \equiv (1, 1, 0, \dots, 0)$

$(1, 1, 0, \dots, 0) \quad (1, 0, 1, 0 \dots 0) \quad (0, \dots, 0, 1, 1)$

grado S_2

$\delta_{S_k} = (\underbrace{1, \dots, 1}_{k}, \underbrace{0 \dots 0}_{n-k})$

Esto es una indeterminación si F es simétrico.

Proposición

$\partial F_1 = (i_1, \dots, i_n)$, $\partial(F_2) = (j_1, \dots, j_n) \Rightarrow \partial(F_1 F_2) = (i_1 + j_1, \dots, i_n + j_n)$

grado $F_1 + F_2$ es la suma de los dos

$\underset{\substack{\neq \\ 0}}{a} \cdot x^{i_1} \dots x^{i_n} b$

F simétrico, $\partial F = (j_1 \dots j_n) \Rightarrow j_1 \geq j_2 \geq \dots \geq j_n$

$F(x_1 \dots x_n) = \underset{\substack{\neq \\ 0}}{a} x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} + (\text{términos})$

$\|$ simet.

$F(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = a \quad \forall \sigma \in S_n$

Supongamos $j_1 < j_2$ (imposible)

$\sigma(1) = 2$ $\qquad \sigma(j)\ j \ \forall j \neq 1, 2$

$\sigma(2) = 1$

$F(x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}) = a x_2^{j_1} x_1^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ + términos puntuales

$j_2, j_1, j_3, \dots j_n) \Rightarrow \partial F(j_1, j_2, \dots)$

$(j_1, j_2 \dots)$

$\partial F = (i_1 \dots i_n) \Rightarrow F = \underset{\neq 0}{a} x_1^{i_1} \cdots x^{i_n}$ + términos de menor grado

$$F = \underbrace{(F - a s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}, s_n^{i_n})}_{\text{simétrico.}} + a s_1^{i_1-i_2} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}$$

grado $\partial(F - a s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n}, s_n^{i_n}) < \partial F$

$$\underset{\underset{\partial F}{\shortparallel}}{\partial(a s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} s_n^{i_n})} = \partial(s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} s_n^{i_n}) =$$

$$= (\underbrace{i_1 - \cancel{i_2} + \cancel{i_2} - \cancel{i_3} + \dots + \cancel{i_{n-1}} - \cancel{i_n} + \cancel{i_n}}_{\overset{\shortparallel}{i_1}}, \underbrace{i_2 - \cancel{i_3} + \cancel{i_3} - \cancel{i_4} + \dots + \cancel{i_{n-1}} - \cancel{i_n} + \cancel{i_n}}_{\overset{\shortparallel}{i_2}})$$

Por hipótesis inducción

$$F = (F - a s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \dots s_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} s_n^{i_n}) + a s_1^{i_1-i_2} s_2^{i_2-i_3} \underset{\underset{HI}{\uparrow}}{=}$$

$$= H(s_1 \dots s_n) + (a x_1^{i_1-i_2} \dots x_{n-1}^{i_{n-1}-i_n} x_n^{i_n}) =$$

$$= \underbrace{(H(x_1 \dots x_n) + a x_1^{i_1-i_2} \dots x_n^{i_n})}_{\text{Pol. G.}}(s_1 \dots s_n)$$

Final demostración T.F.P.S

$F \in k[x_1, \dots x_n]$

$G_1 \dots G_n \in k[y_1 \dots y_m]$ $k \subset k^*$ $\beta_1 \dots \beta_m \in k^*$

$$[F(G_1 \dots G_n)(\beta_1 \dots \beta_m)] = F(G_1(\beta_1 \dots \beta_m), \dots, G_n(\beta_1, \dots, \beta_m))$$

$F = b \in k \Rightarrow b = b$

$F = x_i \Rightarrow G_i(\beta_1 \dots \beta_m) = G_i(\beta_1 \dots \beta_m)$

Teorema Fundamental del Álgebra 1801 Gauss.

"Todo polinomio real tiene raíces complejas"

Si $f \in \mathbb{R}[x]$ es no constante entonces $f(\alpha) = 0$, para algún $\alpha \in \mathbb{C}$

Demostración

$1 \leq$ grado $f = n = 2^e n_0$ iducción sobre e $e \geq 0$, n_0 impar.

26/5/2015

$n = gr\, f = 2^e n_0$, $e \geq 0$ n_0 impar

Inducción sobre e.

$e = 0 \Rightarrow gra\, f$ es impar, $f \in \mathbb{R}[x] \xRightarrow{\text{Tma Bolzano.}} \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ tq $f(\alpha) = 0$

$e > 0$ " $\boxed{HI}$: "$g \in \mathbb{R}[x]$, $gr\, g = m = 2^{e-1} m_0$, m_0 impar

$\Rightarrow \exists\, \beta \in \mathbb{C} : g(\beta) = 0$"

$f \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x] \Rightarrow \exists$ k - cuerpo conmutativo, $\alpha_1 \dots \alpha_n \in k$ tal que

$f = (x - \alpha_1) \dots (x - \alpha_n)$

Por tanto $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C} \subseteq k$, cuerpo conmutativo.

Si escribimos $f = x^n a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$

$a_{n-k} = (-1)^k S_k(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ relaciones Girard - Newton

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq i < j \leq n$ $\alpha_{i,j,\lambda} = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \in k$

$$f_\lambda = \underbrace{\prod_{1 \leq i < j \leq n}}_{} (x - \alpha_{i,j,\lambda}) \in k[x]$$ polinomio mónico.

26/5/2015

$$m_\lambda = gr\, f_\lambda \underset{\substack{\uparrow \\ 1 \leq i < j \leq n}}{=} \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{2^e \cdot n_0 (2^e n_0 - 1)}{2} =$$

$$= 2^{e-1} \underbrace{n_0 (2^e n_0 - 1)}_{m_0} = 2^{e-1} m_0 \quad , m_0 \text{ impar}$$

$i<j \longmapsto k \quad (1 \leq k \leq m) \qquad$ ¿$b_k \in \mathbb{R}$?

$$\alpha_{ij\lambda} = \beta_{\lambda,\lambda}$$

$$f_\lambda = \prod_{1 \leq k \leq m} (x - \beta_{k,\lambda}) = x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0$$

$$P_k(\alpha_1 \ldots \alpha_n) = \beta_k \overset{def}{\boxed{=}} \alpha_{ij} = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j = (\overbrace{x_i + x_j + \lambda x_i x_j}^{P_{ij} = P_k})(\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

$t_k \equiv$ k-ésimo polinomio simétrico elemental

$$b_{m-k} = (-1)^k t_k (\beta_1 \ldots \beta_m) = (-1)^k t_k (P_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \ldots, P_m(\alpha_1 \ldots \alpha_m)) =$$

$$= (-1)^k [\underbrace{t_k (P_1 \ldots P_m)}_{\in \mathbb{R}[x_1 \ldots x_n] \text{ simétrico}}] (\alpha_1 \ldots \alpha_n) \overset{\text{Tma T. pol. sim.}}{=} (-1)^k [g_k (s_1 \ldots s_n)] (\alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

$$= (-1)^k g_k (s_1(\alpha_1 \ldots \alpha_n), \ldots, s_n(\alpha_1 \ldots \alpha_n)) \overset{\text{G-N a f.}}{=} (-1)^k g_k (-a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$$

$$\ldots, (-1)^n a_0) \in \mathbb{R}$$

Hemos llegado a que todos los coeficientes b descomponen en R

$$\Rightarrow f_\lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x - \alpha_{ij\lambda}) \in \mathbb{R}[x]$$

Ahora aplicamos inducción $\quad f_\lambda = g \in \mathbb{R}[x]$, sabemos $\forall \lambda \in \mathbb{R} \ \exists \underbrace{\beta_\lambda}_{\text{raíz}} \in \mathbb{C}$:
$f_\lambda(\beta_\lambda) = 0$

$$\beta_\lambda = \alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \qquad \boxed{\text{Principio palomar}}$$

Entonces $\exists \lambda \neq \mu$: $\alpha_i + \alpha_j + \lambda \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C}$
$\alpha_i + \alpha_j + \mu \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C}$ $\xrightarrow{\text{si restamos}}$ $\Rightarrow (\lambda - \mu) \alpha_i \alpha_j \in \mathbb{C}$

Como $\lambda \neq \mu \Rightarrow \alpha_i \, \alpha_j \in \mathbb{C}$

$\alpha_i \, \alpha_j = C_0 \in \mathbb{C}$

$\alpha_i \, \alpha_j = C_1 \in \mathbb{C}$ $\Rightarrow \alpha_i \, \alpha_j$ raíces del polinomio

$$x^2 - C_1 x + C_0 \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j = \frac{C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0}}{2} \in \mathbb{C} \Rightarrow \alpha_i, \alpha_j \in \mathbb{C}$$

28/5/2015

DETERMINANTES.

Sea $\dim_k V = n$ $\quad B = \{u_1 \dots u_n\}$ base

Definición

i) $f : V^n \longrightarrow k$ es n-lineal alternada si f es lineal en cada variable y $f(v_1, \dots v_n) = 0$ cuando $v_i = v_j$, $i \neq j$

ii) $f : V^n \longrightarrow k$ es n-lineal antisimetrica si f es lineal en cada variable y $f(v_1, \dots v_i, \dots, v_j \dots, v_n) = -f(v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$, siendo $i \neq j$

Proposición

i) f n-lineal alternada $\Rightarrow$ f n-lineal antisimétrica

ii) $\chi(k) \neq 2$ f n-lineal antisimétrica $\Rightarrow$ f n-lineal altenada

Demostración

i) Sea $i \neq j$ $\quad f(v_1 \dots v_i + v_j, \dots, v_j + v_i, \dots, v_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{por ser} \\ \text{alternada}}}{=} 0 = f(v_1, \dots v_i, \dots v_j, \dots v_n) +$

$$+ \underset{=0}{f(v_1, \dots, \underset{\smile}{v_i} \dots \underset{\smile}{v_j} \dots v_n)} + \underset{=0}{f(v_1 \dots \underset{\smile}{v_j} \dots \underset{\smile}{v_j} \dots v_n)} + f(v \dots v_j \dots v_i \dots v_n)$$

$$\Rightarrow f(v_1 \dots v_j \dots v_i \dots v_n) = -f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n)$$

ii) $\underset{i \neq j}{\chi(k) \neq 2} \Rightarrow f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) = -f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) \Rightarrow$

$$2 f(v_1 \dots v_i \dots v_j \dots v_n) = 0$$

Permutaciones

Sea $S_n = \{\sigma : \sigma$ es una permutación de $\{1, \dots, n\}\}$

S_n es grupo con la composición, grupo simétrico.

$1 \longmapsto 1 \quad n \longmapsto n \quad id_{\{1 \dots n\}} \in S_n$

$\sigma \in S_n \implies \vec{\sigma} \in S_n$ $\circ$ asociativo

$|S_n| = n!$

$n = 1 \implies |S_n| = 1 = \{id\}$

$n = 2 \implies S_n = \{id, \sigma\}$ $\quad \sigma\,(1 \to 2,\ 2 \to 1)$

$n = 3 \implies S_n$ no conmutativo

- σ permuta $(1 - 2)$, los demás se quedan fijos
- p permuta $(3 \longrightarrow 1)$, los demás se quedan fijos

$p \circ \sigma$	$\sigma \circ p$	σ	p
$1 \longmapsto 2$	$1 \longmapsto 3$	$1 \longrightarrow 2$	$1 \longrightarrow 3$
$2 \longmapsto 3$	$2 \longmapsto 1$	$2 \longrightarrow 1$	$2 \longrightarrow 2$
$3 \longmapsto 1$	$3 \longmapsto 2$	$3 \longrightarrow 3$	$3 \longrightarrow 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n \longmapsto n$	$n \longmapsto n$	$n \longrightarrow n$	$n \longrightarrow n$

Trasposición

$\tau = (i\,j) \qquad |S_n| = n! \qquad i \longrightarrow j \quad j \longrightarrow i \qquad k \longrightarrow k \quad \forall\, k \neq ij$

$|\tau| = 2$

r-ciclo $\quad (i_1 \dots i_r) \in S_n \quad r \leq n$

Ciclo.

$(i_1, \dots i_r) = (i_1, i_r)(i_1, i_{r-1}) \dots (i_1, i_3)(i_1, i_2)$

$i_1 \to i_2 \qquad i_1 \to i_2 \longrightarrow i_2 \longrightarrow \dots \to i_2$

$i_2 \longrightarrow i_3 \qquad i_2 \to i_1 \to i_3 \longrightarrow i_3 \longrightarrow \dots \to i_3$

$i_r \longrightarrow i_1$

Todos los ciclos se pueden expresar como producto finito de trasposición

No todas las permutaciones son ciclos

Suponemos $\sigma \in S_n$

$i_1 \xrightarrow{\sigma} i_2 \xrightarrow{\sigma} i_3 \xrightarrow{\sigma} \ldots \xrightarrow{\sigma} i_r \qquad \sigma(r-1) = i_p = i_2 = \sigma_i j$

i_r permuta tal que $\underset{\overset{\shortparallel}{i_1}}{\sigma(i_r)} = i_1 \ldots i_{r-1} \qquad r = n \quad r < n$

$\Pi \text{ciclos} = (i_1 \ldots i_r)^{-1} \cdot \sigma \in S_{n-r} \qquad i \ldots i_r$ identidad

Ejemplo

$$\sigma = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & \textcircled{2} & \textcircled{3} & \textcircled{4} & \textcircled{5} & 6 \\ 2 & 5 & 4 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \qquad n = 6$$

$$\sigma = (\underset{2}{\underset{\downarrow}{1}}, \underset{5}{\underset{\downarrow}{2}}, \underset{1}{\underset{\downarrow}{5}}) \qquad (\underset{4}{\underset{\downarrow}{3}}, \underset{3}{\underset{\downarrow}{4}})$$

$$r = 3 \qquad\qquad r = 2$$

Toda $\sigma \in S_n \qquad \sigma = \tau_1 \ldots \tau_m$ (trasposiciones)

Signo de sigma.

Definición

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} \quad (\text{sigma de } \sigma)$$

$$\varepsilon(1\ 2) = \frac{\sigma(1) - \sigma(2)}{1-2} \circ \frac{\sigma(1) - \sigma(3)}{1-3} \circ \ldots \circ \frac{\sigma(1) - \sigma(n)}{1-n} \circ$$

$$\circ \frac{\sigma(2) - \sigma(3)}{2 \cdot 3} \circ \ldots \circ \frac{\sigma(2) - \sigma(n)}{2-n} \circ \boxed{\prod_{3 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(ij)}{i-j}} = 1.$$

Ejemplo

$$\mathcal{E}(12) = \left(\frac{2-1}{1-2}\right)\cdot\left(\frac{2-3}{1-3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{2-n}{1-n}\right)\cdot\left(\frac{1-3}{2-3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\frac{1-n}{2-n}\right)\cdot(-1) = -1$$

$$\mathcal{E}(i_1\, i_2) = -1$$

Observación

$$\mathcal{E}(\sigma\cdot\rho) = \prod_{1\leq i<j\leq n}\frac{\sigma(\rho(i))-\sigma(\rho(j))}{i-j} = \prod\frac{\sigma(\rho(i))-\sigma(\rho(j))}{\rho(i)-\rho(j)}\prod\frac{\rho(i)-\rho(j)}{i-j} =$$

$$= \mathcal{E}(\sigma)\,\mathcal{E}(\rho)$$

Observación

$$\mathcal{E}(\sigma) = \pm 1$$

Observación

$$\mathcal{E}(\sigma)^2 = \left(\prod\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}\right)^2 = \prod_{i\neq j}\frac{\overbrace{\sigma(i)-\sigma(j)}^{n^2-n}}{i-j} = 1$$

$$\mathcal{E}(\sigma) = \mathcal{E}(\tau_1,\ldots,\tau_m) = \mathcal{E}(\tau_1)\ldots\mathcal{E}(\tau_m) = (-1)^m$$

Proposición

Si f es n-lineal antisimétrica $\Rightarrow f(v_{\sigma(1)}\ldots v_{\sigma(n)}) = \mathcal{E}(\sigma)\, f(v_1\ldots v_n)$

$\forall\, \sigma\in S_n$

Ciclos

$$\mathcal{E}(i_1\ldots i_r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ impar} \\ -1 & \text{si } r \text{ par}\end{cases}$$

$$(i_1, i_2, i_3) = (i_1, i_3)\,(i_1 . i_2)$$

29/5/2015

Determinante

Definición

Se define al determinante como la forma bilineal alternada, $f \in \mathrm{Alt}_K V$ $B=\{u_1, u_2\}$

$$f(v_1,v_2)=f(a_{11}u_1+a_{12}u_2,\ a_{21}u_1+a_{22}u_2)=a_{11}a_{21}\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{f(u_1,u_1)}+a_{11}a_{22}f(u_1,u_2)+$$

$$+a_{12}a_{21}\underset{\substack{\shortparallel\\ -f(u_1,u_2)}}{f(u_2,u_1)}+a_{12}a_{22}\underset{\substack{\shortparallel\\ 0}}{f(u_2,u_2)}=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})f(u_1,u_2)=$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

dos elementos $\Rightarrow 2^2$ mantienen 2

3 elementos $\Rightarrow 3^3$ mantienen $3!=6$ $\Rightarrow$ (escalar) $\underset{\substack{\shortparallel\\ |\quad|_{3\times3}}}{\text{(escalar)}}\ f(u_1,u_2,u_3)\cdot$

Teorema

Sea $B=\{u_1,\dots u_n\}$ base V $\forall \lambda\in K$ $\exists!$ $f\in \mathrm{Alt}_K V : f(u_1,\dots u_n)=\lambda$

Demostración

- Unidad

$f\in \mathrm{Alt}_K V$, $f(u_1,..u_n)=\lambda$

$$f(v_1..v_n)=f\Big(\underset{i=\sigma(1)}{\sum_{i=1}^{n}a_{1i}u_i}\dots,\underset{i=\sigma(n)}{\sum_{i=1}^{n}a_{ni}u_i}\Big)=\sum_{\sigma\in S_n}a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}f(u_{\sigma(1)},..$$

$\boxed{n^n \text{ sumandos}}$

$$..u_{\sigma(n)})=\sum_{\sigma\in S_n}a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}\,\varepsilon(\sigma)\,f(u_1,..u_n)=$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}\cdot\lambda$$

- Existencia

$$f(v_1\dots v_n)\doteq\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\,a_{1\sigma(1)}\dots a_{n\sigma(n)}\lambda\Rightarrow f\in \mathrm{Alt}_K V,\ f(u_1,\dots,u_n)=\lambda$$

Observación Isomorfismo

$\mathrm{Alt}_K V \simeq$

$f \longmapsto f(u_1, .. u_n)$

Si $\dim_K \mathrm{Alt}\, V = 1 \Longrightarrow$ vectores proporcionales

Definición

Sea B base de V, $B = \{u_1, \dots u_n\}$, $\det_B$ es la única:

i) $\det_B \in \mathrm{Alt}_K V$

ii) $\det_B (u_1, \dots u_n) = 1$

Aplicada a familia $(v_1 \dots v_n)$

$\det_B (v_1 .. v_n) \equiv$ determinante de la familia $\{v_1 .. v_n\}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & & \\ a_{1n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_n(K)$$

$$\det A = \det_{Bc} \left(\sum a_{1i}\, e_i, \dots \sum a_{ni}\, e_i \right) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} .. a_{n\sigma(n)} \det_{Bc}(e_1 .. e_n) =$$

$Bc = \{e_1 .. e_n\} \in K^n$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)} = \det A = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma^{-1}(1)\sigma(1)} \dots a_{\sigma^{-1}(n)\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma^{-1}(1) 1}, \dots, {}_{\sigma^{-1}(n) n} = \det A^t$$

Producto matrices cuadradas

$\det AB = \det A \cdot \det B$

$M_B(\phi \phi) = M_B(\phi\, M_B(\phi))$ $\quad \phi \in \mathrm{End}_K V$, $f \in \mathrm{Alt}_K V$

$f\phi(v_1 .. v_n) = f(\phi(v_1) \dots \phi(v_n))$

$f_\phi \in \mathrm{Alt}_K V$

29/5/2015

Demostración

$$f_\phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_1' v_1', v_2, \ldots v_n) = f(\phi(\lambda_1 v_1 + \lambda_1' v_1'), \phi(v_2), \ldots, \phi(v_n)) =$$

$$= f(\lambda_1 \phi(v_1) + \lambda_1' \phi(v_1'), \phi(v_2) \ldots \phi(v_n)) =$$

$$= \lambda_1 f(\phi(v_1), \phi(v_2) \ldots \phi(v_n)) + \lambda_1' f(\phi(v_1'), \phi(v_2), \ldots \phi(v_n))$$

Veamos si es alternada

$$f_\phi(v_1 v_1 v_3 \ldots v_n) = f(\phi(v_1), \phi(v_1), \phi(v_3) \ldots \phi(v_n)) = 0$$

Si $f \neq 0 \Rightarrow \{f\}$ base $\text{Alt}_k(V) \simeq k$

$f_\phi = af \quad a \in k$

$$f_\phi(u_1 \ldots u_n) = f(\phi(u_1) \ldots \phi(u_n)) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_{1i} u_i, \ldots, \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} u_i\right) = \overbrace{\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}}^{\det M_\phi(B)} \cdot f(u_1 \ldots u_n)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} = M_\phi(B), \quad B = \{u_1 \ldots u_n\}$$

$f_\phi(u_1 \ldots u_n) = \det M_\phi(B) f(u_1 \ldots u_n) \Rightarrow f_\phi = \det M_\phi(B) \cdot f$ (independiente de la base)

Binet

$$f_{\phi\psi} = \det M_{\phi\psi}(B)\, f = \underbrace{\det(M_\phi(B) M_\psi(B))}_{\shortparallel} f$$

$$\shortparallel$$

$$\det \phi(B) f_\psi = \overbrace{\det \phi(B) \det \psi(B)} \cdot f$$

f no es nula.

Sea $A = M_\phi(B_c)$, $B = M_\psi(B_c)$

P_ϕ = invariante por semejanza.

Resumen Apuntes

para

Exámenes

1er Semestre

Grupos , anillos y cuerpos

Propiedades

i) Asociativa $(a+b)+c = a+(b+c)$

ii) $\exists$ elemento neutro $0_R \in R$: $a+0_R = 0_R + a = a \quad \forall a \in R$

iii) $\exists$ elemento opuesto $\forall a \in R \ \exists -a \in R$: $a+(-a) = (-a)+a = 0_R$

una iv) Conmutativa $\forall a, b \in R \quad a+b = b+a$

v) Asociativa $(ab)c = a(bc) \ \forall a,b,c \in R$

vi) Distributiva $a(b+c) = ab+ac$, $(a+b)c = ac+bc$

vii) $\exists$ elemento neutro $1_R \in R$: $a \cdot 1_R = 1_R \cdot a = a \quad \forall a \in R$

viii) $\forall a, b \in R$ (Conmutativa) $ab = ba$

ix) $\forall a, b \in R \quad ab = 0_R$ (Elemento nulo) $a = 0_R$ o $b = 0_R$

x) $\forall a \in R \quad a \neq 0_R \ \exists a^{-1} \in R$ (Elemento opuesto): $a \cdot a^{-1} = a^{-1} a = 1_R$

* Clasificación

i - vi ⇒ Anillo

i - vii ⇒ Anillo unitario

i - vi + viii ⇒ Anillo conmutativo

i - viii ⇒ Anillo conmutativo unitario

i - vi + ix ⇒ Sin divisores de cero

no tiene div de 0

i - ix ⇒ Dominio de integridad (menos que cuerpo)

i - vii + x ⇒ Cuerpo (no puede ser divisor de 0)

i - viii + x ⇒ CUERPO CONMUTATIVO /CAMPO

Grupo $(G, *)$

1) Asociativa

2) $a*e = e*a = a$

3) $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$

4) $a*b = b*a$

= nº elementos / cardinal del conjunto $= \{\alpha \in S : f(\alpha) = 0\} \leq$ grado (f)

$\chi(R)$ = característica de R $= \begin{cases} 0 & \text{si } \{n>0 : n 1_R = 0_R\} = \emptyset \\ \min \{n>0 : n 1_R = 0_R\}, & \text{si } \{\dots\} \neq \emptyset \end{cases}$

↳ resto al dividir el nº por el de la característica

Espacios vectoriales

K, cuerpo conmutativo. V es k-ev si están definidas estas operaciones

$+ : V \times V \longrightarrow V$ $\qquad$ $\cdot : K \times V \longrightarrow V$

$(u, v) \longmapsto u+v$ $\qquad$ $(a, u) \longmapsto a \cdot u$

Y cumplen las siguientes propiedades

i) $V, +$ Grupo abeliano

ii) $(a+b)u = au+bu$ $\quad \forall a, b \in k$

iii) $a(u+v) = au+av$ $\quad \forall u, v \in V$

iv) $(ab)u = a(bu)$

v) $1_K u = u$

$K, +, \cdot$ $\quad 0_K, 1_K, -a, a^{-1}$

$V, +, \cdot$ $\quad a, b, c \in k$

$u, v, w \in V$

$0_V, -u$

Subespacio $W < V$, W subespacio de V si $W \subseteq V$

$+ : W \times W \longrightarrow W$ $\qquad$ $\cdot : K \times W \longrightarrow W$

$\emptyset \neq W \subseteq V$, V k-ev son equivalentes

i) $W < V'$

ii) $\forall u, v \in W$ $\; \forall a \in k \Rightarrow u+v \in W$, $au \in W$

$F \subseteq E$ sub ev

1) $u, v \in F \Rightarrow$
$u+v \in F$

2) $u \in F$, $K \in K \Rightarrow$
$K u \in F$

$\Rightarrow Ku + \lambda v \in F$

Isomorfismo $\phi : V \longrightarrow V'$ isomorfismo de k-ev si:

i) ϕ biyectiva

ii) $\phi(u+v) = \phi(u) + \phi(v)$

iii) $\phi(au) = a\phi(u)$

$\forall a \in k$, $\forall u, v \in V$

$V \simeq V'$ isomorfo $\iff \dim V = \dim V'$

$X \subseteq V$ es:

i) Sistema Generadores $\forall u \in V$ $\exists u_1, \dots, u_m \in X$ $\exists a_1, \dots, a_m \in k$:

$u = a_1 u_1 + \dots + a_m u_m$ Combinación lineal.

ii) Linealmente independiente $\forall u_1, \dots, u_m \in X$ $\forall a_1, \dots, a_m \in k$

$a_1 u_1 + \dots + a_m u_m = 0 \Longrightarrow a_1 = \dots = a_m = 0$.

iii) Base : si es Sist. generadores y linealmente independiente (vectores linealmente independientes).

Si X es base y Li (Maximal) $\Longrightarrow$ X es SG minimal.

Dimensión $\mathrm{Dim}_K V = \#B$ (cardinal de B)

Sea $\{u_1, \dots, u_r\}$ l.i y $\{v_1, \dots, v_s\}$ SG $r \leq s$ $r \leq \dim_K V = n$

Intersección & Suma

- $W_1 \cap W_2$, intersección vectores que estén en ambos espacios unimos ec implicitas
- $W_1 + W_2$ suma se suman todos los vectores unimos bases

Tma Grassmann

$$\dim (W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim_K W_1 \cap W_2$$

Suma directa V e.v , $V = W_1 \oplus W_2$ si

i) $V = W_1 + W_2$

ii) $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

$$\dim W_1 \oplus W_2 = \dim W_1 + \dim W_2$$

Espacio vectorial cociente

V - ev , $W \triangleleft V$, $u, v \in V$ $u R v$ si $u - v \in W$. R relación equivalencia:

i) Reflexiva $u - u = 0 \in W$

ii) Simétrica $u - v \in W \Rightarrow v - u = -(u - v) \in W$

iii) Transitiva $u - v \in W, v - w \in W \Rightarrow u - v + v - w = u - w \in W$

$u \equiv v \pmod{w}$

$$V/_W = V/_{\equiv W} = \{\bar{u} : u \in V\}$$

$\dim V/_W = n - m$, $\dim V = n$, $\dim W = m$

Aplicaciones Lineales Sean V, W k-ev : $\phi : V \longrightarrow W$ k-lineal (k-homomorfismo) si:

i) $\phi(u + v) = \phi(u) + \phi(v)$

ii) $\phi(au) = a\phi(u)$

$\mathrm{Hom}_K(V, W) = \{\phi : \phi$ es k-lineal$\}$

•) ϕ k-lineal $\Rightarrow \phi(0) = 0$, $\phi(-u) = -\phi(u)$

•) $V \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} U$ ϕ, ψ son k-lineales $\Rightarrow V \xrightarrow{(\psi \circ \phi)} U$ es k-lineal

Aplicaciones lineales $\phi, \psi : V \longrightarrow W$ k-lineal $\Longrightarrow \psi + \phi$ es k-lineal

$$(\phi + \psi)(au) = \phi(au) + \psi(au) = a\phi(u) + a\psi(u) = a(\phi(u) + \psi(u)) =$$
$$= a(\phi + \psi)(u)$$

Núcleo & Imagen

-) $\ker \phi = \{u \in V : \phi(u) = 0\}$ = núcleo. < 0 $\rightsquigarrow$ $\dim \ker = n - \underbrace{\text{rg} A}_{\text{Im}}$
-) $\text{Im}\, \phi = \{\phi(u) : u \in V\}$ = imagen $< W$

$$\dim \ker \phi + \dim \text{Im}\, \phi = \dim_K V = n$$

Morfismos.

-) ϕ monomorfismo $\Longleftrightarrow \ker \phi = \{0\}$
-) ϕ Epimorfismo $\Longleftrightarrow \text{Img}\, \phi = W$

Teorema Isomorfía

$W_1, W_2 \subset V \Rightarrow W_1 + W_2 / W_1 \simeq W_2 / W_1 \cap W_2$

-) $\phi : V \longrightarrow W \Longrightarrow V / \ker \phi \simeq \text{Im}\, \phi$

Matriz de una ap. lineal

$$\begin{tikzcd} k^n \arrow[r, "\phi"] & k^m \end{tikzcd}$$
B_1 B_2
v_1 v_2

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{matrix} B_2 \\ \vdots \\ \\ \end{matrix} \\ \phi(B_1) \ldots \end{array} = M_\phi(B_1, B_2)$$

$$v_2 = \left(M_\phi(B_1 B_2) \right) v_1$$

- +) $\phi, \psi : V_{B_V} \longrightarrow W_{B_W}$

$$M_{\phi+\psi}(B_V, B_W) = M_\phi(B_V, B_W) + M_\psi(B_V, B_W)$$

-) $a\phi$ k-lineal

$$M_{a\phi}(B_V, B_W) = \underbrace{a}_{\substack{\text{x todas} \\ \text{las coordenadas}}} \cdot M_\phi(B_V, B_W)$$

- o) $$\begin{tikzcd} \underset{B_V}{V} \arrow[r, "\phi"] & \underset{B_W}{W} \arrow[r, "\psi"] & \underset{B_U}{U} \end{tikzcd}$$ $$\boxed{M_{\psi \circ \phi}(B_V, B_U) = M_\psi(B_W, B_U) \cdot M_\phi(B_V, B_W)}$$

$$\text{Id} : \begin{tikzcd} \underset{B}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B'}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B}{V} \end{tikzcd}$$

$$I_n = M(B'B) M(B, B')$$

Matriz A para sacar Im y ker

$$\left(I \mid A^t_f \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} & \boxed{B\,\mathrm{Img}} \\ \boxed{B\ker f} & \boxed{0 \cdots 0} \end{array} \right) \quad \square \quad \square \ \ldots$$

Pivotes (triangular inferior)

---

f inyectivo $\Leftrightarrow \ker(f) = \bar{0}$

f sobreyect $\Leftrightarrow \mathrm{Im}\, f = V'$

$\Big\}$ Isomorfismo

---

matriz cambio base

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r] & V' \\
B_1 \arrow[r, "m_f"'] & B_2 \arrow[d, "Q"'] \\
B_3 \arrow[u, "P"] \arrow[r, "\tilde{m}_f"'] & B_4
\end{tikzcd}$$

P = matriz cambio B_3 a B_1

Q = matriz cambio B_2 a B_4

$$\tilde{m}_f = Q \cdot m_f \cdot P$$

Si alguno no tiene cambio ⇒ se mult. x iden

$\phi \in \mathrm{Hom}(V, W)$
$\Downarrow$
$\phi^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$

Espacio Dual

isomorfismo $\dim_K V = n$, $\dim_K W = m$

$$\left.\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_K(V,W) & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{m\times n}(K) \simeq K^{m\cdot n} \\ \phi & \longmapsto & M_\phi(B_V, B_W) \end{array}\right\} K\text{-isomorfismo}$$

isomorfismo natural

$$\mathrm{Hom}_K(K, W) \simeq \mathrm{Mat}_{m\times 1}(K) \simeq K^m \simeq W$$

$$\phi(u) \longleftrightarrow u$$

$\phi(u)(a) = a \cdot u$

$$\boxed{V^* = \mathrm{Hom}_K(V, K) \quad \text{Espacio dual}}$$

Base dual $V^* \simeq V$ (isomorfo)

$B = \{u_1, \ldots, u_m\}$ base V; $u_i^* \in V^* \iff u_i^*(u_j) \quad \forall j = 1, \ldots, n$

$$\boxed{u_i^*(u_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \implies B^* = \{u_1^*, \ldots, u_n^*\} \text{ base } V^*}$$

Propiedades

i) $(id_V)^* = id_{V^*}$ ii) $(\psi \circ \phi)^* = \phi^* \circ \psi^*$

~~Pro~~ Proposición (Matriz)

$\phi \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\phi^* \in \mathrm{Hom}_K(W^*, V^*) \implies \boxed{M_{\phi^*}(B_W^*, B_V^*) = \underbrace{\mathrm{Mat}_\phi(B_V, B_W)^t}_{}}$

$M_{\phi^*} = (M_\phi)^t$

Principio dualidad (dual sobre dual)

$$V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}_K(V^*, K) = \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_K(V, K), K)$$

$$\eta : V \longrightarrow V^{**}$$

$[\eta(u)](w) \mapsto w(u) \qquad u \in V \;, w \in V^*$

Corchete canónico

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V^* \longrightarrow K$$

$\langle u, w \rangle = w(u) = \eta(u)(w) \qquad u \in V \;, w \in V^*$

Propiedades

i) $\langle u_1 + u_2, w \rangle = \langle u_1, w \rangle + \langle u_2, w \rangle$

ii) $\langle a u_1, w \rangle = a \langle u, w \rangle$

iii) $\langle u, w_1 + w_2 \rangle = \langle u, w \rangle + \langle u, w_2 \rangle$

iv) $\langle u, a w \rangle = a \langle u, w \rangle$

$$\left[\begin{matrix} v_1^* \\ v_2^* \\ v_3^* \end{matrix}\begin{pmatrix} \quad & \quad & \quad \\ & & \\ & & \end{pmatrix}\right]^{-1} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}$$

Espacio ortogonal

$W < V \Rightarrow W^{\perp} = \{w \in V^* : \langle u, w \rangle = 0 \quad \forall\, u \in W\} =$

$= \{w \in V^* : w(u) = 0 \quad \forall\, u \in W\} \subseteq V^*$

Casos

1) $0^{\perp} = \{w \in V^* : w(0) = 0\} = V^*$

2) $V^{\perp} = \{w \in V^* : w(u) = 0 \ \forall \ u \in V\} = \{0\}$

3) $W_1 \subseteq W_2 \Rightarrow W_2^{\perp} \subseteq W_1^{\perp}$

Teorema dualidad

$(\cdot)^{\perp} : \mathrm{Sub}(V) \longrightarrow \mathrm{Sub}(V^*$

$W \longmapsto W^{\perp}$ biyectiva

Dimensión

$\dim_K V = n, \quad W < V, \ \dim_K W = m \Rightarrow \dim_K W^{\perp} = n - m = \mathrm{codim}_K W$

Proposición

1) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

2) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

3) $V = W_1 \oplus W_2 \Rightarrow V^* = W_1^{\perp} \oplus W_2^{\perp}$

Tma Rango, Im, ker.

1) $M_{\phi^*}(B_{W^*}, B_{V^*}) = M_{\phi}(B_V, B_W)^t$

$\mathrm{rg}\, A = \dim_K \mathrm{Im}\, \phi$

$\mathrm{rg}\, A^t = \dim_K \mathrm{Im}\, \phi^*$

$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A^t$

2) $\ker \phi^* = (\mathrm{Im}\, \phi)^{\perp} \in \mathrm{Sub}\, W^* \longrightarrow \dim \mathrm{Im}\, \phi = \dim \mathrm{Im}\, \phi^*$

3) $\mathrm{Im}\, \phi^* = (\ker \phi)^{\perp} \in \mathrm{sub}\, V^*$

Endomorfismos II

Observación

ϕ diagoralizable / triangularizable $\Rightarrow \exists B' : M_\phi(B')$

$A' = P^{-1} A P$

$A \sim A$ (Diag / triang)

Teorema equivalentes

i) ϕ diagonalizable

ii) P_ϕ descompone completamente $k[x]$ y $\boxed{f_i = e_i}$

Triangularizable

ϕ triangularizable (superior) si $\exists B$ base $V : M_\phi(B)$ es triangular (sup)

Teorema Equivalentes

i) ϕ triangularizable

ii) P_ϕ descompone completamente $k[x]$

Teorema Hamilton (Cayley - Hamilton)

$P_\phi(\phi) = 0$

Polinomio mínimo $\equiv q_\phi$

i) $q_\phi \in k[x]$ $q_\phi \neq 0$ ii) $q_\phi(\phi) = 0$ iii) q_ϕ grado mínimo.

Proposición $f \in k[x]$, $\phi \in End_k(V)$ $n = \dim_k V$ $\Rightarrow$

i) $q_\phi \mid P_\phi$ ii) $q_\phi \mid f \Leftrightarrow f(\phi) = 0$ iii) $q_\phi(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

Tma descomposición $f = f_1 \cdots f_t$ $f_i \in k[x]$ $mcd(f_1, \ldots f_t) = 1$ $f(\phi) = 0$:

1) $\ker f_i(\phi)$ subespacio V ϕ-invariante

2) $V = \ker f_1(\phi) \oplus \cdots \oplus \ker f_t(\phi)$

3) B_i base $\ker f_i(\phi) \Rightarrow B = B_1 \cup \ldots \cup B_t$ base V y se tiene

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t \end{pmatrix}$$

diagonaliza por cajas

$A_i = M_{\phi \mid \ker f_i(\phi)}(B)$

Corolario

ϕ diagoraliza $\Rightarrow q_\phi$ descompone completamente $k[x]$ y separable

Endomorfismos $\phi \in End_K(V)$ $dim_K V = n$

$$\phi : V \longrightarrow V$$

$B = \{u_1, \dots, u_n\}$ base V

$$M_\phi(B) = \begin{pmatrix} & \\ \phi(u_1) & \phi(u_n) \end{pmatrix}$$

matriz de Paso.

base de V = $B' = \{u'_1, \dots, u'_n\}$

$$\begin{tikzcd} \underset{B'}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "\phi"] & \underset{B}{V} \arrow[r, "id"] & \underset{B'}{V} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{M_\phi(B') = \underbrace{M(B,B')}_{\overset{\shortparallel}{M_{id}(B',B)^{-1}}} M_\phi(B)\ M_{id}(B',B) = P^{-1}AP}$$

Semejanza matriz $\Leftrightarrow$ $A' = P^{-1}AP \Rightarrow A \sim A'$

Polinomio característico $P_\phi = P_A = |A - xI_n|$ Siendo $A = M_\phi(B)$ $n = dim_K V$

i) $P_\phi \in K[x]$

ii) $P_\phi = n$ (grado)

iii) $P_\phi(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} \underbrace{t(\phi)}_{\text{traza de A suma diagonal}} x^{n-1} + \dots + \underbrace{det(\phi)}_{det\ A}$

Diagonalizable

$\phi \in End_K(V)$ diagonalizable si $\exists B$ base V : $M_\phi(B)$ diagonal

* $V_{\phi,\lambda} = \{u, \in V : \phi(u) = \lambda u\} \Rightarrow$ Subespacio propio de λ

* λ = valor propio ϕ si $V_{\phi,\lambda} \neq \{0\}$

* $\sigma(\phi)$ = espectro $\phi = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ = Valores propios de ϕ.

Lema $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in K$ autovalores distintos $u_i \in V_{\phi,\lambda_i}$; si $u_1 + \dots + u_t = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow u_1 = u_2 = \dots = u_t = 0$

Teorema Equivalentes:

multiplicidad algebráica $= e_{\phi,\lambda}$

multiplicidad λ como raíz P_ϕ

i) ϕ diagonalizable

ii) V posee base vectores propios

Lema

i) $\lambda \in \sigma(\phi) \Leftrightarrow e_{\phi,\lambda} \geq 1 \Leftrightarrow P_\phi(\lambda) = 0$

ii) $\sigma(\phi)$ es finito

iii) $0 \leq \underbrace{dim\ V_{\phi,\lambda}}_{\overset{\shortparallel}{f_{\phi,\lambda}}} \leq e_{\phi,\lambda} \leq n = dim\ \phi$

$f_{\phi,\lambda} \equiv$ dim Geométrica λ respecto ϕ

dim. subespacio vectores propios λ

Anotación

1) $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$ $t \leq n = dim\ \phi$

$t \leq f_1 + \dots + f_t \leq e_1 + \dots + e_t \leq n$

2) P_ϕ n raíces distintas

$\Rightarrow \phi$ diagonaliza.

$(n = dim\ \phi)$

Endomorfismos III

Teorema
- $P_\phi = (-1)^n (x-\lambda_1)^{e_1} \dots (x-\lambda_t)^{e_t} \iff \phi$ diagonalizable
- $\sigma(\phi) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_t\}$
- $q_\phi = (x-\lambda_1)^{a_1} \dots (x-\lambda_t)^{a_t} \qquad 1 \leq a_i \leq e_i$
- $f_i = (x-\lambda_i)^{a_i}$
- $N_i = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} = N_{\phi,\lambda_i} \supseteq V_{\phi,\lambda_i}$
- $\exists\ B_i$ base $N_i : M_\phi(B_1 \cup \dots \cup B_t) = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_t \end{pmatrix}$; $A_i = M_{\phi|N_i}(B_i)$
- $\phi|_{N_i} = \lambda_i \, id_{N_i} + (\phi - \lambda_i \, Id)|_{N_i} = \lambda_i \, id_{N_i} + \eta_i$
- $\eta_i^{a_i} = (\phi - \lambda_i \, Id)^{a_i}/_{N_i} = 0$ endomorfismo nilpotente

Tma Estructura

$$V = \ker(\phi - \lambda_i id_V)^{a_i} \oplus \dots \oplus \ker(\phi - \lambda_t \, id_V)^{a_t}$$

$V = N_i \oplus \dots \oplus N_t \qquad N_i$ ϕ-invariante

Proposición

i $q_{\phi_i} = (x-\lambda_i)^{a_i}$

ii $P_{\phi_i} = (-1)^{e_i} (x-\lambda_i)^{e_i}$

iii $\dim_K N_i = e_i$

iv $\ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i} = \ker(\phi - \lambda_i \, id_V)^{a_i + j} \quad \forall j \geq 0$

Endomorfismo nilpotente

* $q_\eta = x^a$
* $P_\eta = x^e$
* $\sigma(\eta) = \{0\} \qquad \lambda_1 = 0 \quad e_1 = e_1 \quad 1 \leq f_1 \leq e_1$
* $1 \leq a \leq e$

Definición $e_K = \dim_K N_K \qquad d_K = e_K - e_{K-1}$

Jordan End nilpotentes $\exists\ B$ de N : $M_\eta(B) = J_{0,a}^{(d_a)} \oplus J_{0,a-1}^{(d_{a-1} - d_a)} \oplus \dots \oplus J_{0,1}^{(d_1 - d_2)}$

$$J_{\lambda,i} = \begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$A = PJP^{-1} \qquad J^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$$

ϕ simetría $\quad \phi^2 = id_V$

$$\left.\begin{array}{l} V = W_1 + W_2 \\ \{0\} = W_1 \cap W_2 \end{array}\right\} \quad V = W_1 \oplus W_2$$

$$M_{Diag.} = \begin{array}{c|ccc|} u_1 & & & \\ u_2 & & & \\ u_3 & & & \\ & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array}$$

Simetría definida $V = W_1 \oplus W_2$ coincide con ϕ

base $W_1 = \ker(id_V - \phi) \rightarrow$ vectores $(\phi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

dirección $W_2 = \ker(id_V + \phi) \rightarrow$ vectores $(\phi)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

ϕ Proyección $\quad \phi^2 = \phi$

$$\left.\begin{array}{l} V = \mathrm{Im}\,\phi + \ker\phi \\ \{0\} = \mathrm{Im}\,\phi \cap \ker\phi \end{array}\right\} \quad V = \mathrm{Im}\,\phi \oplus \ker\phi$$

$$M_{Diag} = \begin{array}{c|ccc|} u_1 & & & \\ u_2 & & & \\ u_3 & & & \\ & f(u_1) & f(u_2) & f(u_3) \end{array}$$

base proyección $= \mathrm{Im}(\phi)$

Dirección proyección $= \ker(\phi)$

$$u \in V^\perp \iff \underbrace{<u, v>}_{\text{prod.escalar}} = 0 \quad \forall v \in V.$$

MINISTERIO
DE FOMENTO

SUBSECRETARÍA

DIRECCIÓN GENERAL
DEL INSTITUTO
GEOGRÁFICO NACIONAL

CORREO ELECTRÓNICO
ign@mfom.es

GENERAL IBÁÑEZ DE IBERO, 3
28003 MADRID
TEL: 91 597 70 00

ÁLGEBRA

$B_c = \{1, x, x^2, x^3\}$

$\mathbb{R}^{②}$, $\mathbb{R}^2$

$\{(1,0),(0,1)\}$

$f: \boxed{\mathbb{R}_3[x]} \longrightarrow \boxed{\mathbb{R}_3[x]} \implies f \in \text{End}$ porque El espacio vectorial va al mismo esp. vectorial

$f(p(x)) \longmapsto p'(x)$

$a + bx + cx^2 + dx^3 \longmapsto b + 2cx + 3dx^2 \; 0x^3\}$

$\{1 \;,\; x \;,\; x^2$

Como no nos determinan Bases, usamos las bases canónicas.

$B_c(\mathbb{R}_3[x]) = \{1, x, x^2, x^3\}$

$$M_{B_c} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} f(1) & f(x) & f(x^2) & f(x^3) \end{array} & \end{array}$$

$f: W \longrightarrow W$

$f(x,y,z) \longmapsto (3x+y, 2z, \overset{2y-z}{2y-z})$

$x = -\lambda - \beta$

$y = \lambda$

$z = \beta$

$*W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} \implies B_W = \{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a=0 & c=1 \\ b=2 & d=2 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} (-1,1,0) \\ (-1,0,1) \end{array} \\ \begin{array}{cc} f(-1,1,0) & f(-1,0,1) \\ \| & \| \\ (-2,0,2) & (-3,2,1) \\ *_1 & *_2 \end{array} & \end{array}$$

$*_1 \; (-2,0,2) = a(-1,1,0) + b(-1,0,1)$

$*_2 \; (-3,2,1) = c(-1,1,0) + d(-1,0,1)$

$$\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$B_1 = \{(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)\}$

$B_2 = \{(\underline{2,1,1}), (1,1,1), (1,-1,1)\}$

$$M_{B_2-B_1} = C_{B_2-B_1} = \begin{array}{cccc} & & & B_1 \\ \left(\begin{array}{c} 3=a \\ -2=b \\ -3=c \end{array}\right. & \begin{array}{c} 2=d \\ -1=e \\ -2=f \end{array} & \left.\begin{array}{c} 0=g \\ 1=h \\ 2=i \end{array}\right) & \begin{array}{c} (1,0,1)=e_1 \\ (-1,1,1)=e_2 \\ (1,-1,0)=e_3 \end{array} \\ B_2\ \ (2,1,1) & (1,1,1) & (1,-1,1) & \\ \parallel & & & \\ a e_1 + b e_2 + c e_3 & & & \end{array}$$

B_2

$\downarrow$

$(2,1,1) = a(1,0,1) + b(-1,1,1) + c(1,-1,0)$

* Con det. las transformaciones

$F_2' = F_2 - 3F_3$

NO ← $F_2' = \boxed{3}F_2 - 4F_3$

Examen ejc diagonalización

Sean $a \in \mathbb{R}$ y los vectores $v_a = (a, 0, 1)$ y $w = (1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^3$.

Consideremos el endomorfismo $f_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$u \longmapsto \langle v_a, u \rangle w$$

1. ¿ Para que valores de a es f_a diagonalizable? Para los que lo sea, obtener una B_a de $\mathbb{R}^2$: la matriz de f_a respecto de B_a sea diagonal

2. Calcular, $\forall\ a \in \mathbb{R}$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$, la traza del endomorfismo f_a^n

Prod. escalar

$$\left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

$$M_{B_c'} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} (1,0,0) \\ (0,1,0) \\ (0,0,1) \end{matrix} \\ \begin{matrix} f(1,0,0) & f(0,1,0) & f(0,0,1) \end{matrix} & \end{array}$$

* Cogemos $B_c = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

$$f(1,0,0) = \langle (a,0,1)(1,0,0) \rangle \cdot (1,0,-1) = a(1,0,-1) = (a,0,-a)$$

$$f(0,1,0) = \langle (a,0,1)(0,1,0) \rangle \cdot (1,0,-1) = 0(1,0,-1) = (0,0,0)$$

$$f(0,0,1) = \langle (a,0,1)(0,0,1) \rangle \cdot (1,0,-1) = 1(1,0,-1) = (1,0,-1)$$

$$M_\phi = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_\phi = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ -a & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ -a & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \cdot \left[(a-\lambda)(-1-\lambda) + a \right]$$

$$= (-\lambda) \cdot \left[-a - a\lambda + \lambda + \lambda^2 + a \right] = (-\lambda)(\lambda^2 + (1-a)\lambda) = (-1)\lambda^2 (\lambda + (1-a))$$

$$\lambda = 0, \quad \lambda = 0, \quad \lambda = a - 1$$

Casos.

$a = 1 \implies \lambda = 0 \quad e_1 = 3$

$a \neq 1 \implies \lambda = 0 \quad e_1 = 2$

$\lambda = a - 1 \quad e_2 = 1$

Caso $a = 1$

$\lambda = 0 \quad e_1 = 3 \rightsquigarrow f = \dim \phi - \text{rango}(\phi - 0I)$

$$N_1 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \underset{F_3' = F_3 + F_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \quad \begin{cases} x = -z' \\ y = y' \\ z = z' \end{cases}$$

$(-1, 0, 1) \quad (0, 1, 0)$

$f = \dim N_1 = 2 \neq e_1 \implies$ no diagonaliza

$f \neq e$

$q_\phi = x^2$

Para practicar

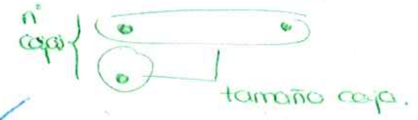
$N_{12} = \ker \eta_1^2 = \ker(\phi - 0I)^2 : \Big($

Absorcb.

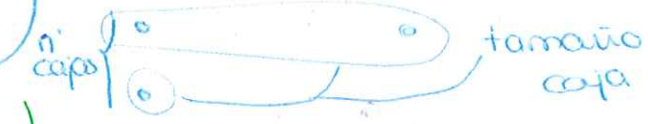
nos va a salir toda la dim

es decir rango $= 0 \implies \boxed{Bc}$

$N_{11} \subsetneq N_{12}$



$N_{11} \subsetneq N_{12}$



$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right) \qquad J^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

Caso $a \neq 1$

$\lambda_1 = 0 \quad e_1 = 2 \quad f_1$

$\lambda_2 = a - 1 \quad e_2 = 1 = f_2$

- $\lambda = 0$

$$N_{11} : \left(\begin{array}{ccc|c} a & 0 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ -a & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \overset{\text{puede ser } 0.}{\textcircled{a}} & 0 & \boxed{1} & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \quad \begin{matrix} x = x' \\ y = y' \\ z = -ax' \end{matrix}$$

$f_1 = \dim N_1 = 2 = e_1$

$3 - \text{rango} = 3 - 1 = 2$

$(1 \ 0 \ -a) \quad (0, 1, 0)$

$\implies$ diagonaliza

Continuación

- $\lambda = a-1$

$$N_2 : \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a+1 & 0 & 0 \\ -a & 0 & -a & 0 \end{array}\right) \underset{F_3' = F_3 + aF_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-a+1} & 0 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right) \underset{F_2' = \frac{F_2}{-a+1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$y(-a+1) = 0 \rightarrow \underline{\underline{y = 0}}$.

$F_3' = F_3 + aF_1$

↓

única xq

$F_3' = aF_3 + \dots$

a no sabemos si es 0.

$$\left\{\begin{array}{l} x = x' \\ \cancel{y = a+1} \\ z = -x' \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = x' \\ y = 0 \\ z = -x' \end{array}\right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{a \neq 1}$

$$B_a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

2. Traza igual en cualquier base. f_a^n $\forall a \in \mathbb{N}$ La traza $[Tr(A)]^n = (a-1)^n$

Caso $a = 1$

$$J = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$J^n = \left(\begin{array}{cc|c} 0^n & 0 & 0 \\ n0^{n-1} & 0^n & \\ \hline 0 & & 0^n \end{array}\right)$$

$$\text{traza } J^n = Tr(J^n) = 0^n + 0^n + 0^n = 0 = (a-1)^n = (1-1)^n$$

Caso $a \neq 1$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{pmatrix}$$

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & & 0 \\ 0 & 0^n & \\ & & (a-1)^n \end{pmatrix}$$

$$\text{traza } D^n = tr(D^n) = 0^n + 0^n + (a-1)^n = (a-1)^n$$

$$\Longrightarrow Tr\, f_a^n = (a-1)^n \quad \forall a \in \mathbb{N}$$

~~todos~~ A ver. Si separamos caso era por multiplicidad pero en verdad es lo mismo poner $\lambda = 0$ que $\lambda = a-1$ si $a = 1$.

Traza siempre va a ser lo misma en J y D pero aun así poner proceso pa que se diviertan.

$Tr(B) = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$

$Tr(B^n) = \lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n$

Ejercicio

Hallar la matriz respecto de la base canónica de un homomorfismo $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$: $\boxed{f(1,0,1,0)=(2,1,-1,0)}$, $L((0,1,-1,0))$ → sub vect prop

Sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio -1 y $H = \{ x+z=0 , x-y+t=0 \}$ sea el subespacio de vectores propios de f para el valor propio 2

Autovector

$(A-\lambda I)\cdot v = 0$

$Av - \lambda v = 0$

$Av = \lambda v$

$f(v) = \lambda v$

⊛ $f((0,1,-1,0)) = (-1)(0,1,-1,0) =$

$= (0,-1,1,0)$

⊛ $\begin{cases} x+z=0 \\ x-y+t=0 \end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)$

$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = -x \\ t = -x+y \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ $f(1,0,-1,-1) = (2)\cdot(1,0,-1,-1) = (2,0,-2,-2)$

→ $f(0,1,0,1) = (2)\cdot(0,1,0,1) = (0,2,0,2$

Ya tenemos imagen 4 vectores. $\begin{cases} f(1,0,1,0) = (2,1,-1,0) \\ f(0,1,-1,0) = (0,-1,1,0) \\ f(1,0,-1,-1) = (2,0,-2,-2) \\ f(0,1,0,1) = \underbrace{(0,2,0,2)}_{\text{columnas matriz.}} \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

I xq así son las Bases canónicas

Matriz.

$$\underset{\substack{F_3 = F_3 + F_1 \\ F_4 = F_4 - F_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \underset{\underbrace{F_3 = F_3 + F_4}_{\downarrow\ (\cdot -1)}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underset{F_4 = F_4 - F_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right) \underset{\substack{F_2 = F_2 + F_3 \\ F_1 = F_1 - F_3}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & -3 & 2 \end{array}\right)$$

$M \Rightarrow$ Traspu

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -2 & 5 \\ -3 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Autov = $(-1, 2, 2, ②)$

1) $f:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z,t) \longmapsto (x-z+t,\ 2x+3t)$

$B_c=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ $\quad B_c=\{(1,0),(0,1)\}$

$\operatorname{Ker}(f)=\{u\in F: f(u)=0_V\}$

$\operatorname{Im}(f)=\{f(v) : v\in K\}$

$$M=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & (1,0) \\ 2 & 0 & 0 & 3 & (0,1) \end{array}\right)$$

$f(1,0,0,0) = (1,2)$ $\quad f(0,1,0,0) = (0,0)$ $\quad f(0,0,1,0) = (-1,0)$ $\quad f(0,0,0,1) = (1,3)$

$\operatorname{Ker} f = \{u\in F : f(u)=0\}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \left\{\begin{array}{l} x-z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{array}\right\} \operatorname{Ker}(f)$$

$$\begin{cases} x = z' - t \rightarrow x = 3z' \\ t = -2z' \\ z = z' \\ y = y' \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{Ker}(f)=\langle(3,0,1,2),(0,1,0,0)\rangle_{\mathbb{R}^4}$ (Sist Generador del núcleo)

↳ otra forma $\operatorname{Ker} f=\langle(3\lambda,0,\lambda,-\frac{2\lambda}{3}),(0,\cancel{\lambda},0,0)\rangle_{\mathbb{R}^4}$

Base $\operatorname{Ker}(f)=\{(3,0,1,-2),(0,1,0,0)\}$

Base $\operatorname{Im}(f) = \{u\in\mathbb{R}^4 \mid f(u)=v\}$ v es L.i

Base $\operatorname{Im}(f)=\{f(0,0,1,0),\ f(0,0,0,1)\} = \{(-1,0),(1,3)\}$

↳ L. indep.

$\operatorname{Im} f = \left\{(x,z,t)\in\mathbb{R} : \begin{cases} x-z+t=0 \\ 2x+3t=0 \end{cases}\right\}$

Base $\mathbb{R}^4/\operatorname{ker} f = \{[(1,0,0,0)],[(0,0,0,1)]\}$ (vectores que no estan* en ker f y estan en $\mathbb{R}^4$ "LI"*)

↳ $\{(3,0,1,-2),(0,1,0,0)\}$

↓

$\{(1,0,0,0),(0,1,0,0)$
$(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$

Teoría conjunto cocient V/W $\quad \dim V=n$, $\dim W=r$

$\dim(V/W)=n-r$ $\quad B_V=\{u_1,\dots,u_r,u_{r+1},\dots,u_n\}$
$\quad B_W=\{u_1,\dots,u_r\}$

$B\,V/W=\{\underbrace{[u_{r+1}],\dots,[u_n]}_{\text{los que estan en V y no en W.}}\}$:))

b) $U \subset \mathbb{R}^4 : \mathbb{R}^4 = \ker f \oplus U$ $\overset{\parallel}{\text{dim } 2}$ x formula Grassmann

Tiene que cumplir

- ⊛ $\ker f \cap U = \{0_{\mathbb{R}^4}\}$
- ⊛ $\mathbb{R}^4 = \ker f + U$

$\ker f = \{(3,0,1,-2), (0,1,0,0)\} = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \begin{cases} x-z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases}\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{pmatrix} \Big] U$$

Para buscar/hacer intersección y suma a la vez

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 1 & -2 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & I_4 \\ a & b & c & d & \\ e & f & g & h & \end{array}\right) \sim \Bigg($$

?

---

c) $f \; \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$f(x,y,z,t) \longmapsto (x-z+t, 2x+3t)$

$B' = \{(1,1), (1,0)\}$

$B = \{(1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,-1,1)\}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (1,1) \\ (1,0) \end{matrix}$$

$(1,2) = a(1,1) + b(1,0)$
$(0,3) = a_1(1,1) + b_1(1,0)$
$(2,3) = a_2(1,1) + b_2(1,0)$

$\underset{(1,2)}{\overset{}{f(1,0,0,0)}} \; \underset{(0,0)}{f(0,-1,0,0)} \; \underset{(0,3)}{f(0,0,1,1)} \; \underset{(2,3)}{f(0,0,-1,1)}$

1.) $f(x, y, z\ t) = (x - z + t, 2x + 3t)$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\text{Ker} f \left[\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \right] \text{Im} f$$

$\text{Im}(f) = \langle (1,2)(0,1) \rangle$

subespacio
generado

$\text{Ker}(f) = \langle (3,0,1,2), (0,1,0,0) \rangle$

Base $\mathbb{R}^4/_{\text{ker}(f)} = \{ [\overline{(0,0,1,0)}], [\overline{(0,0,0,1)}] \}$

(

b)

$\mathbb{R}^4 = \text{Ker} f \oplus U$

$\text{ker} f \oplus U \iff \text{ker} f + U = \mathbb{R}^4$ y $\text{ker} f \cap U = \emptyset$

Por la formula dimensión como la dimensión de U es 2 y la base $\mathbb{R}^4/\text{ker}(f) = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$ dimension ~~d~~ 2 y la intersección con $\text{ker}(f)$ es $\emptyset$

$\Rightarrow U = \{(0,0,1,0), (0,0,0,1)\}$

c) f respecto de las bases

$B = \{ (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,-1,1) \} \in \mathbb{R}^4$

$B' = \{ (1,1) (1,0) \} \in \mathbb{R}^2$

Como es canónico.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^4 & & \mathbb{R}^2 \\ B_c\mathbb{R}^4 \arrow[rr, "M"] & & B_c \arrow[d] \\ B \arrow[u] \arrow[rr, "\tilde{M}"'] & & B' \end{tikzcd}$$

Voy de B a Bc.
⇒ B en columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\textcircled{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Bc a B'

$$\tilde{M} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

Si fuese M

$$\begin{tikzcd} B_c\,\mathbb{R}^4 \arrow[rr, "M"] \arrow[d, "P"'] & & B_c\,\mathbb{R}^2 \\ B \arrow[rr, "\tilde{M}"'] & & B' \arrow[u, "Q"'] \end{tikzcd}$$

$M =$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$P_\phi = P_A = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} \underset{F_3 = F_2 + F_3}{=} \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & 1 \\ 2 & -1-\lambda & -1 \\ 0 & -2-\lambda & -2-\lambda \end{vmatrix} \overset{C_2 = -C_3 + C_2}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & -1 \\ 0 & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)\left[\lambda^2 - 4\right]$$

$$= (-2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2) = (-1)(\lambda-2)(\lambda+2)^2 = P_\phi$$

$$\sigma(\phi) = \{2, -2\}$$

* $\lambda_1 = 2 \quad e_1 = 1 \quad f_1 = 1$

$$N_1 = \ker \eta_1 = \ker(A - 2I) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} -2x + 3y + z = 0 \\ -2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -z' \\ y = -z' \\ z = z' \end{cases}$$

$$u_1 = (-1, -1, 1)$$

$$\dim N_1 = 3 - \text{rango}(A - 2I) = 1$$

* $\lambda_2 = -2 \quad e_2 = 2 \quad f_2 \leq 2$

$$\rightarrow N_{2,1} = \ker \eta_2 = \ker(A + 2I) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \begin{cases} 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -2y' \\ y = y' \\ z = y' \end{cases}$$

$$\dim N_{2,1} = 3 - \text{rango}(A + 2I) = 1 \neq e_1 = 2$$

$\Longrightarrow$ no diagonaliza

$$(-2, 1, 1)$$

$$\rightarrow N_{2,2} = \ker \eta_2^2 = \ker(A + 2I)^2 = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 \\ -8 & 8 & 0 \\ -8 & -8 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \{8x + 8y = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x = -y' \\ z = z' \\ y = y' \end{cases}$$

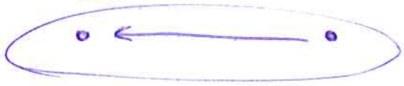
$$\dim N_{2,2} = 3 - \text{rango}(A + 2I)^2 = 2$$

$$(-1, 1, 0)\ (0, 0, 1)$$

tía esto creo q podemos hacerlo en hoja a sucio, porq en verdad solo puede haber un núcleo más y para el vector no se necesita

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "+1"] & \boxed{1} \arrow[r, bend left, "+1"] & \boxed{2} \end{tikzcd}$$

$$N_{2,1} \subsetneq N_{2,2}$$



2×2 una caja

$$J = \left(\begin{array}{c|cc} 2 & & \\ \hline & -2 & \\ & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$g_\phi = (\lambda - 2)(\lambda + 2)^{②}$$

no es × f

numero núcleos

Cogemos $v_1 \in N_{2,2} \notin N_{2,1}$ ⇝ Si no tuviesemos $N_{2,2}$ cogemos un vector $\notin N_{2,1}$ y podríamos hacerlo, y creo q el profe a limpio lo vera mejor. Nosotras a sucio (todos los pasos = P)

$v_1 = (-1, 1, 0)$

Sacamos $v_2 \in N_{2,1}$

$$(A + 2I)\, v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = V_2$$

$$B_J = \{u_1, v_1, v_2\} = \{(-1,-1,1), (-1,1,0), (1,-1,1)\}$$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$A = P J P^{-1}$ ✓