Matemática Discreta y Álgebra - Curso 2020/21. ESP. VECTORIALES Y BASES

1. Estúdiese si el conjunto $\mathbb{R}^2$ respecto de las operaciones:
   $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$
   $\alpha(a, b) = (\alpha a, 0)$
   es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$

   Solución: No es un espacio vectorial porque no se cumple la propiedad que exista un elemento neutro en el cuerpo $\mathbb{K}$ tal que $\alpha(a, b) = (a, b)$ porque si $b \neq 0$, no lo podemos encontrar.

2. Estúdiese si tiene estructura de subespacio vectorial el subconjunto de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$ formado por todas las ternas (x, y, z) tales que $x - y + z = 2$. Haz lo mismo con la condición $x - y + z = 0$

   Solución: El primero no, ya que el 0 no pertenece (no cumple la ecuación). El segundo sí que es subespacio vectorial, basta con comprobar que el 0 pertenece (comprobando que cumple la ecuación) y que dados dos vectores u, v que cumple la ecuación y están en el subespacio, y dados dos escalares cualesquiera α, β tenemos que $\alpha u + \beta v$ pertenece al subespacio (es decir, cumple la ecuación).

3. Sea $B = \{(1, 1, 0), (0, 2, 1), (1, 1, 3)\}$ un conjunto de vectores de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\mathbb{R})$. Demuéstrese que estos vectores forman una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas del vector $(3, 1, 2)$ respecto de esta base.

   Solución: Si ponemos en una matriz esos 3 vectores como columnas y hacemos el determinante, veremos que nos da 6 que es distinto de 0, luego son linealmente independientes. Como son 3 vectores en $\mathbb{R}^3$ que tiene dimensión 3, el conjunto B es una base.
   Las coordenadas de (3,1,2) respecto de la base B son (2,-1,1). Se pueden calcular resolviendo el sistema (3,1,2)=α(1,1,0)+β(0,2,1)+γ(1,1,3) o a través de la matriz de cambio de base.

4. En el espacio vectorial (V,+,$\cdot\mathbb{R}$), demuéstrese que si los vectores $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ forman una base, también es una base la formada por los vectores $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ siendo

   $$v_1 = 2u_1 + u_3, v_2 = 2u_2, v_3 = u_1 - 3u_3$$

   Solución: Hay que comprobar si los vectores v_1, v_2, v_3 son linealmente independientes. Podemos hacerlo mediante la definición $\alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 = 0$ entonces $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La otra manera es coger las coordenadas de los vectores y comprobar que son linealmente independientes, porque sabemos que si las coordenadas cumplen algo también lo cumple los vectores porque existe un isomorfismo. Las coordenadas son (2,0,1), (0,2,0) y (1,0,-3).

5. Demuéstrese que el cojunto formado por los vectores

   $$1 + 2x, 1 + x^2, 1 - x^2, 2 - x$$

   es linealmente dependiente en el espacio $\mathbb{R}_2[x]$ de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

   Solución: Igual que antes, podemos coger la definición o a través de las coordenadas. En ambos casos saldrá que el conjunto es linealmente dependiente, en el caso de las coordenadas, tendríamos 4 vectores de $\mathbb{R}^3$ que sabemos que siempre son linealmentes dependientes porque la dimensión de $\mathbb{R}^3$ es 3. Luego tenemos que coger 3 de ellos, y a través de sus coordenadas ver si son linealmente independientes. Por ejemplo, los 3 primeros lo son.

6. Obtenga el valor o valores de h para que y esté en $Gen\{v_1, v_2, v_3\}$ siendo: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$,

   $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ h \end{pmatrix}$

   Solución: A través de un sistema (ya que y tiene que ser combinación lineal de los vectores $\{v_1, v_2, v_3\}$) podemos ver que valor tiene que tener h para que el sistema tenga solución. Si $h = 5$ entonces pertenece, en otro caso no.

7. Liste dos vectores en $Gen\{v_1, v_2\}$ siendo $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -62 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

   Solución: Cualesquiera dos que estén en las combinaciones lineales $av_1 + bv_2$, dándole valores a a y b.

8. Describa geométricamente $Gen\{v_1, v_2\}$ para los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

   Solución: Tenemos que ver que describen: un punto, una recta, un plano, etc... Se comprueba que son proporcionales y entonces los que describen es un subespacio de dimensión 1, luego es una recta.

9. Determine si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes. Justifique la respuesta.

   a) $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix}$

   b) $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$

   Solución: Por ejemplo, haciendo el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores obtenemos que en el primer caso sí son linealmente independientes y en el segundo no.

10. Determine si b es una combinación lineal de los vectores a_1, a_2 y a_3: $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$,

    $a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$

    Solución: Resolviendo el sistema $\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = b$ veremos si existen esos parámetros. En efecto, sería $\alpha = -3, \beta = -1$ y $\gamma = 1$

11. a) Demuéstrese que el conjunto

    $$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{Q} : x + y + z + w = 0, x + y - z - w = 0\}$$

    es un subespacio vectorial de $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot\mathbb{Q})$

    b) Prúebese que los vectores $u_1 = (1, -1, 3, -3)$ y $u_2 = (0, 0, 1, -1)$ son base de dicho subespacio

    c) Hállese las coordenadas del vector $u = (-3, 3, -4, 4)$ respecto de dicha base.

    Solución:

    a) Efectivamente es subespacio vectorial. Hay que comprobar que el 0 pertenece y cumple las ecuaciones y que $\alpha u + \beta v$ pertenece a U, es decir que cumple las ecuaciones, sabiendo que u, v pertenecen a U (y por tanto cumplen las ecuaciones) y que α y β son escalares.

b) Si sabemos la dimensión de U tendremos un dato importante. Para ello, a partir de las ecuaciones de U, las resolvemos y obtenemos dos vectores que son la base. Por tanto tiene dimensión 2. Si los vectores que nos dan son linealmente independientes y pertenecen a U (cumplen las ecuaciones) entonces serán base. Efectivamente, se comprueba facilmente que son linealmente independientes y por tanto base.

c) Se resuelve el sistema y obtenemos que las coordenas son (-3,5).

12. Hállese la dimensión de los subespacios de $\mathbb{R}^5$ generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$A = \{(1, 1, 1, -1, -1), (2, 0, 2, 0, 1), (3, 1, 3, -1, 0), (5, 1, 5, -1, 1)\}$$

$$B = \{(6, 3, 9, 3, 3), (8, 4, 12, 4, 4), (10, 5, 15, 5, 5)\}$$

Solución: El conjunto A tiene dimensión 2 y el conjunto B tiene dimensión 1.

13. Determínase la dimensión y una base de los siguientes subespacios de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot\mathbb{R})$:

$$U = \{(x, y, z, w) : x - y = 0, 2x + z + w = 0, x + y + z + w = 0\}$$

$$W = \{(\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma, \gamma) : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$$

Solución:
$U = \{((-1/2, -1/2, 1, 0)(-1/2, -1/2, 0, 1)\}$ y $W = \{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$

14. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_2, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_1 + v_3$$

a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'

b) Calcúlese la matriz de cambio de base de B' a B

c) Calcúlese las coordenadas del vector $v = (1, 0, 3)_B$ respecto de B' y las del vector $w = (5, 3, 1)_{B'}$ respecto de B.

Solución:

a) $M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

c) Multiplicando por las matrices de cambio de base obtenemos $v = (1, 0, 3)_B = (4, 1, 3)_{B'}$ y $w = (5, 3, 1)_{B'} = (7/2, -1/2, 3/2)_B$.

15. Sean $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dos bases de un espacio vectorial V de las que sabemos que:

$$u_1 = v_1 + v_3, u_2 = v_2 + v_3, u_3 = v_2 + v_4, u_4 = v_1 + 2v_4$$

a) Calcúlese la matriz de cambio de base de B a B'

b) Calcúlese la matriz de cambio de base de B' a B

c) Calcúlese las coordenadas del vector $v = (1, 1, 2, 2)_B$ respecto de B' y las del vector $w = (0, 7, 0, 3)_{B'}$ respecto de B.

Solución:

a) $M_{B \to B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $M_{B' \to B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) Multiplicando por las matrices de cambio de base obtenemos $v = (1,1,2,2)_B = (3,3,2,6)_{B'}$ y $w = (0,7,0,3)_{B'} = (4,-4,11,-4)_B$.

16. Sea $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3\}$ una base de un espacio vectorial V de dimensión 3. Dados los vectores $u = u_1 - 2u_2 + 3u_3$, $v = 2u_1 - 3u_2 + u_3$, y $w = -au_2 + bu_3$,

(a) ¿Qué relación deben cumplir a y b para que el conjunto $\{u, v, w\}$ sea también una base?

(b) Para $a = 1$ y $b = 4$, halla las coordenadas del vector $3u_1 - 6u_2 + 8u_3$ respecto de la base $\tilde{\mathcal{B}} = \{u, v, w\}$.

Solución:

a) Ponemos las coordenadas de los vectores como columnas de una matriz y hacemos el determinante. Cuando ese determinante sea distinto de 0, serán linealmente independientes. En este caso, cuando $b - 5a \neq 0$

b) Con la matriz de cambio de base de B a $\tilde{\mathcal{B}}$, multiplicando por las coordenadas obtenemos que las coordenadas en base $\tilde{\mathcal{B}}$ son (1,1,1)

17. Dado el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^4$ $S = \{(x, y, z, t) \mid x + y = 0,\ z + 2t = 0\}$, calcula una base y la dimensión de S, y amplía dicha base hasta una base de $\mathbb{R}^4$.

Solución: Resolviendo las ecuaciones tenemos que una base está formada por los vectores $\{(1,-1,0,0),(0,0,-2,1)\}$, luego tiene dimensión 2. Una externsión de la base al total podría ser (mediante el algoritmo) $\{(1,-1,0,0),(0,0,-2,1),(1,0,0,0),(0,0,0,1)\}$

18. Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x + 2y + 4z + 8t\}$. Prueba que S es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$. Halla dos bases diferentes de S, e indica la dimensión de S.

Solución: Para probar que es subespacio ya se ha comentado en otros ejercicios lo que hay que hacer, y efectivamente lo es. Si resolvemos la ecuación que nos da tenemos que una base del subespacio es $\{(1,0,0,0),(0,-3,1,0),(0,-7,0,1)\}$, luego tiene dimensión 3. Otra base de S podría ser $\{(4,0,0,0),(0,-6,2,0),(0,21,0,-3)\}$