

Teoría de la Integral y de la Medida

Universidad Autónoma de Madrid



Figura 1: Henri Lebesgue

Curso 2017/2018

Fernando Soria

(con algunas correcciones de Dmitry Yakubóvich en 2020)

Índice general

1. Introducción	1
1.1. La integral hasta 1900 - la integral de Riemann	1
1.2. La cuerda vibrante (método de Fourier)	3
1.3. Diferenciación y la integral de Lebesgue	5
1.4. La integral según Lebesgue	5
1.5. El conjunto (ternario) de Cantor	7
1.6. Una primera definición de medida de Lebesgue en \mathbb{R}	10
1.7. Medida exterior	11
1.8. A modo de RESUMEN	12
2. Teoría de la medida de Lebesgue	13
2.1. Funciones medibles Lebesgue	14
2.2. Espacios de medida	15
2.3. Integración de funciones medibles positivas	16
2.4. Teorema de la Convergencia Monótona	18
2.5. Lema técnico	20
2.6. Lema de Fatou	22
2.7. Integral de una función medible arbitraria	23
2.8. Teorema de la Convergencia Dominada	24
2.9. ANEXO I: Sobre las funciones simples y su integral	25
2.10. Notas sobre los conjuntos de medida cero	26
2.11. La integral de Lebesgue, un esquema	28
2.12. Estructura topológica del espacio $L^1(d\mu)$	28
3. Espacios de medida	29
3.1. Medidas completas	29
3.2. Medidas exteriores	31
3.3. Teorema(s) de Caratheodory	33
3.4. Medidas de Borel	38
3.4.1. Observaciones sobre las medidas de Lebesgue-Stieltjes	39
3.5. Medidas regulares en \mathbb{R}	41
4. Medidas producto y el Teorema del cambio de variable	45
4.1. La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n como modelo	45
4.2. Propiedades de la σ -álgebra y de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n	47
4.3. Teorema del cambio de variable (I)	49

4.4. Medidas inducidas	50
4.5. Teorema del cambio de variable (II)	51
4.6. Ejemplos del Teorema del cambio de variable	54
4.7. Medidas producto en general	56
5. El Teorema de Fubini	61
5.1. Teorema de Fubini	63
5.2. Clases monótonas	64
5.3. Algunas observaciones y aplicaciones del Teorema de Fubini	68
6. Medidas y derivadas	73
6.1. Derivación dentro del signo integral	73
6.2. El Teorema de diferenciación de Lebesgue	74
6.3. 2º Teorema Fundamental del Cálculo	80
6.4. El teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue	85

Capítulo 1

Introducción

1.1. La integral hasta 1900 - la integral de Riemann

DEFINICIÓN 1.1 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 \dots < x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Sea $I_j = [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, 2, \dots$ y sean también $s_j = \sup_{I_j} f(x)$ y $i_j = \inf_{I_j} f(x)$.

Definimos las sumas superior e inferior como

$$\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n s_j (x_j - x_{j-1})$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \sum_{j=1}^n i_j (x_j - x_{j-1})$$

Decimos entonces que f es integrable **en el sentido de Riemann** si existen particiones que permitan aproximar las sumas anteriores de forma arbitraria.

TEOREMA 1.1 Toda función f continua definida en un intervalo cerrado es integrable en el sentido de Riemann. Lo mismo es cierto si f es acotada y tiene solo un número finito de discontinuidades.

Ejemplo

Sea $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$. Consideramos la partición $\mathcal{P} = \{x_j = \frac{j}{n}, \text{ con } j = 0, 1, \dots, n\}$. Entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_f(\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \\ \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{j-1}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De esta forma se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, lo que implica que

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

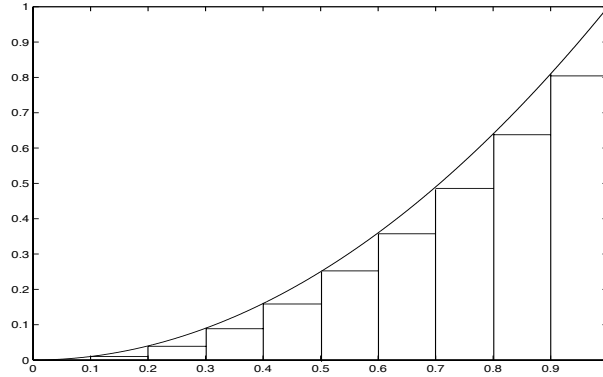


Figura 1.1: Suma inferior para la función x^2 . En este caso $n = 10$

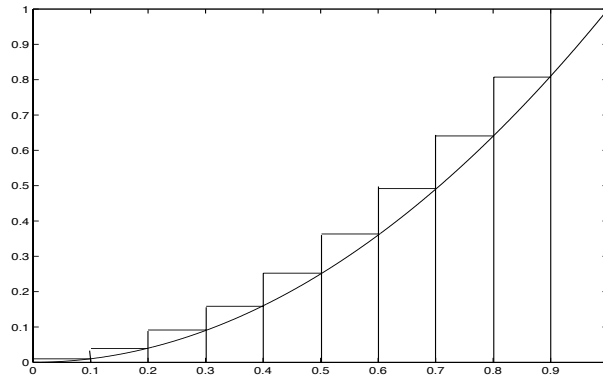


Figura 1.2: Suma superior para la función x^2 . En este caso $n = 10$

Damos a continuación un ejemplo de función no integrable Riemann (la función de Dirichlet):

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n} = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1]; \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1]. \end{cases}$$

Esto es debido a que $\forall \mathcal{P}$ partición se tiene que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) = 1$ y que $\mathcal{L}_f(\mathcal{P}) = 0$. Con lo que no es cierto que $\mathcal{U}_f(\mathcal{P}) - \mathcal{L}_f(\mathcal{P}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Observación Es fácil ver que la función

$$f_m(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos(\pi m! x))^{2n},$$

es igual a cero salvo en un número finito de puntos. Por tanto es integrable en el sentido

de Riemann y se tiene $\int f_m(x) dx = 0, \quad \forall m$. En particular

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int f_m(x) dx = 0.$$

Antes de desarrollar su teoría, Lebesgue demostró el siguiente resultado de caracterización de funciones que son integrables en el sentido de Riemann:

TEOREMA 1.2 (de Lebesgue) *Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada. Las dos afirmaciones siguientes son equivalentes:*

- f es integrable en el sentido de Riemann
- El conjunto de discontinuidades de f , es decir, $\mathcal{D}_f = \{x \in [a, b] : f \text{ no es continua en } x\}$ verifica la propiedad de que $\forall \varepsilon > 0$ podemos encontrar un cubrimiento numerable de \mathcal{D}_f por intervalos abiertos $\{(a_j, b_j)\}_{j \geq 1}$ que cumple

$$\sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) < \varepsilon. \quad (1.1)$$

(Los conjuntos con esta propiedad se denominan de medida cero).

1.2. La cuerda vibrante (método de Fourier))

Queremos encontrar $u(x, t)$ que verifique

- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \omega^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (Ecuación de Ondas)
- $u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \forall t;$
- $u(x, 0) = f(x), \forall x;$ (dato inicial).

Observamos que $u_n(x, t) = \cos(\omega n t) \text{ sen}(nx), n \in \mathbb{N}$, son soluciones simples de la EDP y, por ser la EDP lineal, cualquier combinación lineal de éstas,

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega n t) \text{ sen}(nx), \quad \text{con } a_n \in \mathbb{R}, \mathbb{C},$$

también es solución. Para que $u_N(x, t)$ verificase las condiciones iniciales y de contorno, se debería tener

$$\sum_{n=1}^N a_n \text{ sen}(nx) = f(x),$$

lo cual no es cierto en general (entre otras cosas porque la parte izquierda es una función analítica). Supongamos que tenemos en su lugar una serie infinita.

La idea de Fourier es la siguiente: como “toda” función π -periódica f se puede escribir en la forma

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx),$$

para ciertos “números” $\{a_n\}_n$, entonces

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega nt) \operatorname{sen}(nx),$$

es la solución a la ecuación de ondas dada.

Nos preguntamos cómo serían los a_n para que esto fuera posible. Para ello debemos fijarnos en que

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m. \end{cases}$$

Entonces, si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, se tiene formalmente que

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(mx) dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \right) \operatorname{sen}(mx) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(nx) \operatorname{sen}(mx) dx = a_m \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos una fórmula para los a_n ⁽¹⁾:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx.$$

El problema es que para llegar a este resultado, hemos integrado término a término una serie infinita, y eso hay que justificarlo. Si la suma fuera finita, no habría problema. Luego se trata de determinar cuándo es cierto que

$$\int_0^{\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} f_N(x) dx.$$

¹a estos valores se les denomina “coeficientes de Fourier” de f y a la expresión $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$, “suma de Fourier” de f

1.3. Diferenciación y la integral de Lebesgue

Uno de los logros del Cálculo diferencial e integral es el denominado *T.F.C.* (Teorema Fundamental del Cálculo):

TEOREMA 1.3 (T. FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO) *Sea f continua y definamos $F(x) = \int_0^x f(y) dy$. Entonces F es derivable y además $F'(x) = f(x)$, $\forall x$.*

Esto nos permite calcular primitivas para la función f . En general, si sabemos que G es una primitiva de f (i.e. $G' = f$), entonces

$$\int_a^b f = G(b) - G(a)$$

Por definición de límite, lo que el T.F.C. dice es que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y) dy,$$

Pero, ¿podemos esperar que el límite de la derecha exista, incluso si f no es continua, y coincida además con el valor de f en x ? La respuesta viene dada por el hecho de que el límite sí coincide con $f(x)$ en **casi todo punto**, en un sentido que precisaremos más adelante.

A las preguntas planteadas en esta introducción daremos respuesta con teoremas importantes que permiten obtener resultados de gran utilidad en otras áreas de las matemáticas como la Probabilidad, la resolución de EDPs o el Análisis Funcional.

Además veremos que cualquier teoría de la medida da lugar de forma natural a una teoría de la integral. Y es que INTEGRAR es MEDIR ... y RECÍPROCAMENTE !!

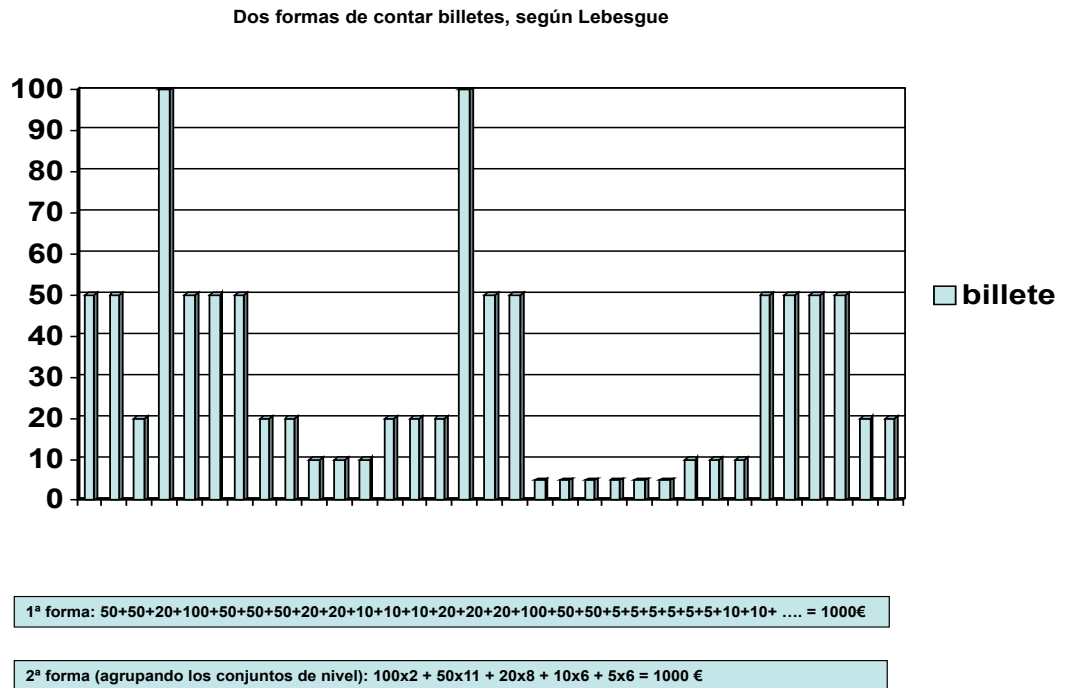
1.4. La integral según Lebesgue

“Hay dos formas de contar el dinero en billetes:

1. sumando su valor directamente según van apareciendo
2. agrupándolos por denominación y sumando al final cada uno de estos grupos”

Aquí la función f que da el valor de cada billete es escalonada. Para una función arbitraria (de momento positiva)

$$f : D \subset \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty),$$



dado $\varepsilon > 0$ y $k \in \mathbb{N}$, definimos los conjuntos de nivel

$$E_{k,\varepsilon} = \{x \in D : k\varepsilon < f(x) \leq (k+1)\varepsilon\}.$$

Supongamos que conocemos la “longitud” de cada $E_{k,\varepsilon}$. Entonces una aproximación por exceso del área encerrada por f viene dada por

$$A_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1)\varepsilon \text{long}(E_{k,\varepsilon}),$$

mientras que por defecto viene dada por

$$B_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} k\varepsilon \text{long}(E_{k,\varepsilon}).$$

(Ver figura)

La función f será integrable en el sentido de Lebesgue cuando al hacer $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ambas aproximaciones coincidan. Obsérvese que $A_\varepsilon \geq B_\varepsilon$ y

$$A_\varepsilon - B_\varepsilon = \varepsilon \text{long}(\{x \in D : \varepsilon < f(x)\}),$$

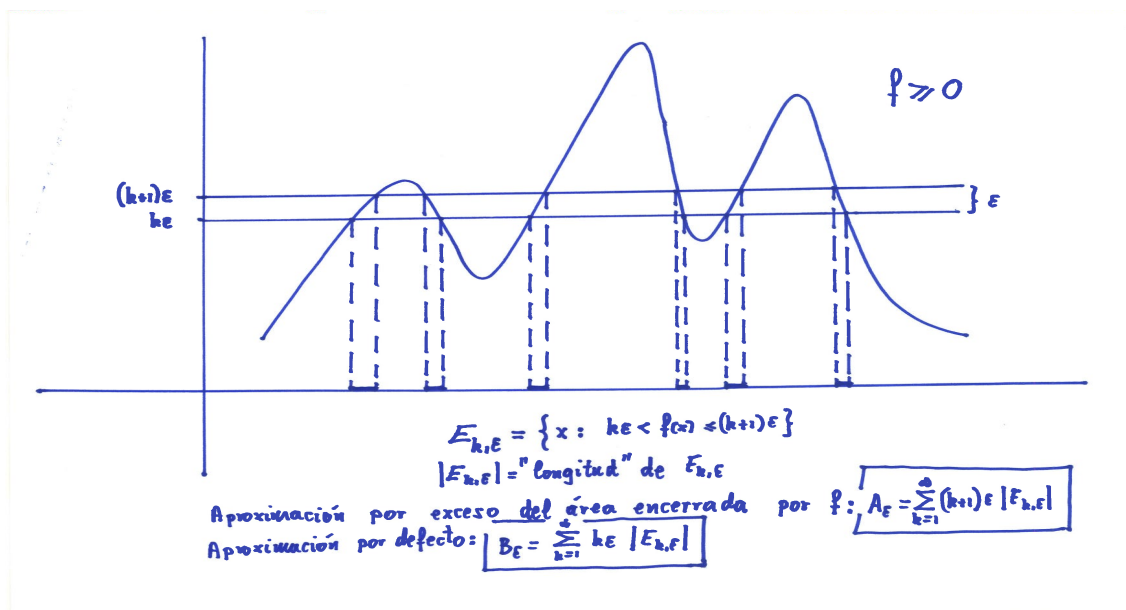


Figura 1.3: Esquema de las aproximaciones a la integral de Lebesgue

si al menos uno de los conjuntos es finito. La función podría no ser acotada.

Ejemplo: $f : (0, 1) \rightarrow [0, \infty), \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$

- El método descrito reduce la cuestión a determinar apropiadamente qué se entiende por longitud de un conjunto arbitrario.
- Este es el primer gran concepto de la integral de Lebesgue: Para integrar funciones es necesario “medir” primero conjuntos.

Ejemplo: El conjunto (ternario) de Cantor (ver figura).

1.5. El conjunto (ternario) de Cantor

- Los intervalos $\{I_{n,k}\}$, con $n = 1, \dots, \infty$ y $k = 1, \dots, 2^{n-1}$, son abiertos y disjuntos
- Los intervalos $\{J_{n,k}\}$, con $n = 1, \dots, \infty$ y $k = 1, \dots, 2^n$, son cerrados
- En cada paso retiramos $1/3$ (el tercio central) de cada intervalo $J_{n,k}$ ya construido
- Cada Intervalo $J_{n,k}$ es “padre” de dos intervalos de la clase J del paso $n + 1$
- La longitud de cada intervalo $I_{n,k}$ y $J_{n,k}$ construido en el paso n es igual a 3^{-n}

Hay dos formas de calcular la “longitud”² del conjunto de Cantor \mathcal{C} .

²a partir de ahora la llamaremos medida, y para un conjunto A escribiremos $\text{med}(A)$.

PRIMEROS PASOS EN LA CONSTRUCCIÓN DEL CONJUNTO DE CANTOR

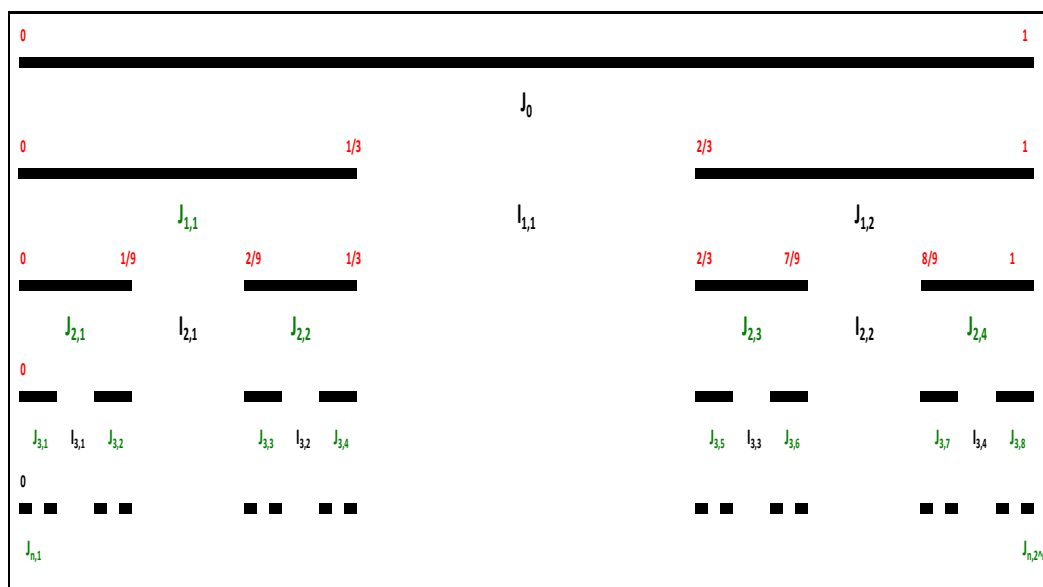


Figura 1.4: $[0, 1] = \mathcal{O} \cup \mathcal{C}$, donde $\mathcal{O} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}$ y $\mathcal{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$

- Por un lado podemos calcular la medida del abierto \mathcal{O} que es la unión disjunta de todos los intervalos abiertos $\{I_{n,k}\}$:

$$\text{med}(\mathcal{O}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long}(I_{n,k}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = \frac{1/3}{1 - 2/3} = 1.$$

Como \mathcal{O} y \mathcal{C} son disjuntos, se debe tener

$$\text{med}(\mathcal{O}) + \text{med}(\mathcal{C}) = \text{med}([0, 1]) = 1, \quad \text{luego} \quad \text{med}(\mathcal{C}) = 0.$$

- Por otro, si llamamos $\mathcal{C}_n = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}$, se tiene $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_n, \forall n$, y por tanto

$$\text{med}(\mathcal{C}) \leq \text{med}(\mathcal{C}_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \text{med}(J_{n,k}) = \frac{2^n}{3^n} \rightarrow 0, \quad \text{si } n \rightarrow \infty.$$

De nuevo se concluye $\text{med}(\mathcal{C}) = 0$.

Algunas propiedades del conjunto ternario de Cantor:

- \mathcal{C} es un **conjunto perfecto**, es decir
 - es cerrado
 - coincide con todos sus **puntos de acumulación** (i.e., no tiene puntos aislados)
- \mathcal{C} es **compacto** (cerrado y acotado)
- \mathcal{C} es **totalmente desconexo** (i.e., dados dos puntos cualesquiera de \mathcal{C} el segmento que los une no está en \mathcal{C})
- El conjunto de Cantor se puede caracterizar a partir de la descomposición en base 3 de todo número de $[0, 1]$ como

$$\mathcal{C} = \{x \in [0, 1] : x = \sum_{k \geq 1} \frac{a_k}{3^k}, \text{ con } a_k = 0, 2\}.$$

- \mathcal{C} tiene el **cardinal del continuo** (en realidad todo conjunto perfecto de la recta real es no numerable). La siguiente aplicación es biyectiva (!):

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}; \text{ si } x = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^k}, b_k = 0, 1, \text{ entonces } \varphi(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{2b_k}{3^k}.$$

(Paso de base 2 a base 3).

- **... además, como hemos visto, el conjunto ternario de Cantor tiene medida 0.**
- Dirichlet conjeturó que todo conjunto cerrado totalmente desconexo debería tener medida cero.

Sin embargo, se pueden construir conjuntos de Cantor similares al ternario pero que NO tengan medida cero:

Conjuntos de Cantor generalizados

El proceso es similar:

- Se elige un valor $0 < \alpha < 1/3$. En el primer paso se elimina el intervalo abierto central, $I_{1,1}^\alpha$ de longitud α . A los dos intervalos restantes, $J_{1,k}^\alpha, k = 1, 2$, se les quita los intervalos centrales $I_{2,k}^\alpha, k = 1, 2$, de longitud α^2 . Quedan ahora cuatro intervalos cerrados $J_{2,k}^\alpha, k = 1, 2, 3, 4$, de los que se eliminan los intervalos centrales $I_{3,k}^\alpha, k = 1, 2, \dots, 8$, de longitud α^3 y se continua el proceso por inducción.

- El conjunto de Cantor de orden α viene definido por la expresión

$$\mathcal{C}^\alpha = [0, 1] \setminus \mathcal{O}^\alpha, \quad \text{donde} \quad \mathcal{O}^\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}^\alpha; \quad \left(\mathcal{C}^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}^\alpha \right).$$

- Como

$$\text{med}(\mathcal{O}^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^{n-1}} \text{long}(I_{n,k}^\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \alpha^n = \frac{\alpha}{1-2\alpha},$$

obtenemos

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{1-2\alpha} = \frac{1-3\alpha}{1-2\alpha}.$$

Este valor es estrictamente positivo si $\alpha < 1/3$, lo cual coincide con la condición impuesta.

- Es fácil ver también que

$$\text{med}(\mathcal{C}^\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{med}(\mathcal{C}_n^\alpha), \quad \text{donde} \quad \mathcal{C}_n^\alpha = \bigcup_{k=1}^{2^n} J_{n,k}^\alpha.$$

1.6. Una primera definición de medida de Lebesgue en \mathbb{R}

A la vista de lo anterior, nos aventuramos a hacer la siguiente

DEFINICIÓN 1.2 Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}$, se define su “medida” de Lebesgue como

$$\text{med}(A) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} \text{long}(I_k), \text{ con } \{I_k\} \text{ intervalos, y } \bigcup_{k \geq 1} I_k \supset A \right\}.$$

En particular se tiene

LEMA 1.4 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tiene “medida” de Lebesgue cero si y solo si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \{I_k\} \text{ sucesión de intervalos, con } \bigcup_{k \geq 1} I_k \supset A, \text{ tal que } \sum_{k \geq 1} \text{long}(I_k) < \varepsilon.$$

DEFINICIÓN 1.3 Una determinada propiedad \mathcal{P} se dice que se cumple en *casi todo punto (c.t.p.)* si el conjunto de puntos donde NO se cumple \mathcal{P} tiene medida cero.

Propiedades de la “medida” de Lebesgue en \mathbb{R}

1. $\text{med}(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subset B$ entonces $\text{med}(A) \leq \text{med}(B)$.

3. Dada una familia numerable de subconjuntos, $\{A_k\}_k$, entonces

$$\text{med} \left(\bigcup_{k \geq 1} A_k \right) \leq \sum_{k \geq 1} \text{med}(A_k).$$

Además,

- La unión numerable de conjuntos de medida cero tiene medida cero.

LEMA 1.5 Si $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, entonces $\text{med}(I) = \text{long}(I)$.
(La demostración utiliza propiedades topológicas muy finas ...)

Conjuntos no medibles para la “medida” de Lebesgue

La propiedad 3 anterior no es totalmente satisfactoria. Nos gustaría que si la familia de conjuntos $\{A_k\}_k$ fuera disjunta, entonces, se tuviera la igualdad:

$$\text{med} \left(\bigsqcup_{k \geq 1} A_k \right) = \sum_{k \geq 1} \text{med}(A_k), \quad (\text{numerablemente aditiva}).$$

Además, para que recoja las propiedades habituales de los movimientos rígidos, debería cumplirse que la medida no cambiará si realizamos una traslación (o rotación). En particular,

$$\text{med}(x + A) = \text{med}(A), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall A \subset \mathbb{R}.$$

El problema es que, con estas condiciones no todo todo conjunto es medible.

Contraejemplo:

En $[0, 1]$ definimos la relación de equivalencia $x \mathcal{R} y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. Sea A^* el conjunto formado por un elemento de cada clase de equivalencia ([axioma de elección](#)). Entonces A^* “no se puede medir”.

1.7. Medida exterior

DEFINICIÓN 1.4 La función sobre conjuntos definida anteriormente se denomina *medida exterior* para la medida de Lebesgue y se denota por m^* ; es decir, $\forall A \subset \mathbb{R}$,

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k \geq 1} \text{long}(I_k), \text{ con } \{I_k\} \text{ intervalos, y } \bigcup_{k \geq 1} I_k \supset A \right\}.$$

Según veremos posteriormente, existe una clase de subconjuntos, que denominaremos *medibles*, sobre los cuales m^* será numerablemente aditiva.

Lebesgue definió los subconjuntos medibles de $[0, 1]$ de la siguiente forma

DEFINICIÓN 1.5 $A \subset [0, 1]$ es medible si $m^*(A) + m^*(CA) = 1$. ($CA = [0, 1] \setminus A$)

- **NOTA:** como siempre se tiene $m^*(A) + m^*(CA) \geq 1$ (por la propiedad 3), basta con exigir $m^*(A) + m^*(CA) \leq 1$ para que A se medible.

Ejercicio: Probar que, con esta definición, todo subconjunto de $[0, 1]$ de medida cero es medible.

1.8. A modo de RESUMEN

Los aspectos fundamentales que hemos resaltado en esta introducción a la Teoría de la Integral de Lebesgue son:

- La integración de funciones se puede obtener a partir de un desarrollo apropiado de una teoría de medir conjuntos.
- Esta teoría proporciona inicialmente una aproximación a la medida de “cualquier” conjunto, a través de [la medida exterior de Lebesgue](#),
- Aunque existen conjuntos que **no** pueden ser medidos, ... sí permite analizar conjuntos “extraños” de medida pequeña, como el conjunto de Cantor.
- El que no todos los conjuntos sean medibles nos obliga a restringir la teoría de la medida a clases de conjuntos que sean cerradas por uniones, intersecciones y complementarios ([álgebras](#), [\$\sigma\$ -álgebras](#)).
- La Teoría de Lebesgue permite en condiciones muy generales el intercambio del orden de funcionales límites (sumas, integrales, Fubini, etc) a través de teoremas intrínsecos (TCM, Fatou, TCD).
- Existe una Teoría de Diferenciación que extiende el conocido Teorema Fundamental del Cálculo y que se puede usar no solo sobre funciones sino también sobre medidas ([Teorema de Radon-Nikodym](#))

Capítulo 2

Teoría de la medida de Lebesgue

En la introducción nos hemos referido siempre, por cuestiones históricas, a la medida original de Lebesgue (es decir, a la que asigna a un intervalo de la recta $I = [a, b]; [a, b); (a, b]; (a, b)$, su longitud $|I| = b - a$).

Sin embargo, la teoría de Lebesgue se extiende de una forma natural y sencilla a casos más generales. Primero consideramos la estructura de la clase de conjuntos que vamos a medir, (y que eventualmente llamaremos *medibles*).

DEFINICIÓN 2.1 Dado un conjunto X (en general $X = \mathbb{R}, \mathbb{R}^n, \mathbb{Z}, \mathbb{N}, [0, 1], \dots$), se dice que $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ es **σ -álgebra** si verifica:

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. \mathcal{A} es cerrada por complementación, esto es $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$.
3. \mathcal{A} es cerrada por uniones numerables, finitas o no, esto es

$$A_n \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{A}.$$

NOTAS:

- (2) y (3) nos dicen que \mathcal{A} es cerrada por intersecciones, porque

$$\left(\bigcap_{n \geq 1} A_n \right) = \left(\bigcup_{n \geq 1} A_n^c \right)^c.$$

- \mathcal{A} es cerrada por diferencias, porque

$$A, B \in \mathcal{A}, \quad A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{A}.$$

- (1) Se podría sustituir por la afirmación de que \mathcal{A} es no vacía, pues basta que exista $A \in \mathcal{A}$ para concluir por las dos notas anteriores que $X = A \cup A^c \in \mathcal{A}$

- Si en la definición, nos limitamos a exigir sólo que la unión finita de conjuntos está en \mathcal{A} , entonces se dice que \mathcal{A} es una **álgebra**
- $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$ es siempre una σ -álgebra.

LEMA 2.1 Si $\{\mathcal{A}_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{D}}$ es una colección arbitraria de σ -álgebras, entonces $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{D}} \mathcal{A}_\alpha$ es una σ -álgebra.

Demostración: Ejercicio

Este Lema nos permite hablar para una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ de la **σ -álgebra generada por \mathcal{B}** como la intersección de todas las σ -álgebras que contienen a \mathcal{B} .

Ejemplo: En \mathbb{R} se define la **σ -álgebra de Borel**, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ como aquella generada por los intervalos abiertos

$$\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}.$$

Ejercicio: Probar que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ coincide con la generada por los intervalos cerrados $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, o por los semiabiertos $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$, o $\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$ o por las semirectas $\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ o $\{(-\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$...

2.1. Funciones medibles Lebesgue

A continuación pasamos a describir las funciones que vamos a integrar

DEFINICIÓN 2.2 Diremos que $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es **\mathcal{A} -medible** (o medible respecto a la σ -álgebra \mathcal{A}) si $\forall a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$f^{-1}((a, \infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

LEMA 2.2 Dada $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{A} -medible, la familia

$$\mathcal{A}_f = \{B \subset \mathbb{R} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

es una σ -álgebra en \mathbb{R} . En consecuencia, contiene a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ (σ -álgebra de Borel) porque $(a, \infty) \in \mathcal{A}_f, \forall a$, por definición.

En particular, la definición de función medible es equivalente a pedir

- $\{x : f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a.$
- $\{x : f(x) \leq b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall b.$
- $\{x : a < f(x) < b\} \in \mathcal{A}, \quad \forall a, b.$
- La imagen inversa de todo abierto (o cerrado, o Borel) es \mathcal{A} -medible.

Finalmente, damos la definición abstracta de medida:

DEFINICIÓN 2.3 Dada una σ -álgebra \mathcal{A} en X . Se dice que $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ es una **medida** sobre \mathcal{A} si :

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Para toda familia numerable $\{A_j\}_{j \geq 1}$ de \mathcal{A} cuyos elementos son disjuntos dos a dos, se tiene

$$\mu \left(\bigsqcup_{j \geq 1} A_j \right) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j).$$

Ejemplos:

1. En \mathbb{R} , sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y fijemos $x_0 \in \mathbb{R}$. Definimos para $A \subset \mathbb{R}$,

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_0 \in A \\ 0, & \text{si } x_0 \notin A, \end{cases}$$

entonces δ_{x_0} (**Delta de Dirac en x_0**) es una medida.

2. En \mathbb{R} , sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$. Definimos

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{card}(A), & \text{si } \text{card}(A) < \infty, \\ \infty, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Entonces, μ es una medida.

3. En \mathbb{Z} sea $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Z})$. Definimos para $A \subset \mathbb{Z}$, $\mu(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{1 + |n|}$;

entonces, μ es una medida.

4. En $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, sean $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N}_0)$, $\lambda > 0$ y $\mu_\lambda(A) = e^{-\lambda} \sum_{n \in A} \frac{\lambda^n}{n!}$,

para cada $A \in \mathcal{A}$. Entonces, μ_λ es una medida. (**Medida de probabilidad asociada a la distribución de Poisson de índice λ**).

2.2. Espacios de medida

DEFINICIÓN 2.4 Llamaremos **espacio de medida** a toda terna (X, \mathcal{A}, μ) compuesta por un conjunto X , una σ -álgebra \mathcal{A} de $\mathcal{P}(X)$, y una medida μ definida sobre \mathcal{A} . Diremos que la medida μ sobre \mathcal{A} es **finita** si $\mu(X) < \infty$ y que es **σ -finita** si podemos escribir $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$, con $X_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, 3, \dots$, y $\mu(X_n) < \infty$.

En los ejemplos anteriores, las medidas de (1) y (4) son finitas, la de (3) es σ -finita pero no finita y la de (2) no es siquiera σ -finita.

Ejercicios:

1. Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ son medibles, probar que las funciones $\max(f, g)$ y $\min(f, g)$ son medibles.
2. Probar que el supremo y el ínfimo de una familia numerable de funciones medibles, es medible. *Indicación:* $\{\sup_n f_n > a\} = \bigcup_n \{f_n > a\}$; (obsérvese la nueva notación).
3. Deducir que el \limsup , \liminf y \lim de funciones medibles son todos medibles
4. Si $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ son medibles, probar que su suma $f + g$ es medible. *Indicación:*

$$\{f + g > a\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f > q\} \cap \{g > a - q\}).$$

5. Si $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ es \mathcal{A} -medible y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua, probar que la composición $g \circ f$ es \mathcal{A} -medible.

Primer resultado de monotonía para conjuntos

PROPOSICIÓN 2.3 *Sea μ una medida sobre la σ -álgebra \mathcal{A} ; se tienen los siguientes resultados:*

1. Si $A, B \in \mathcal{A}$, con $A \subset B$, entonces $\mu(A) \leq \mu(B)$. Además si $\mu(A) < \infty$, se tiene que $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

2. Si $A_1 \subset \dots \subset A_n \subset A_{n+1} \dots$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, entonces $\mu \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j)$.

3. Si $A_1 \supset \dots \supset A_n \supset A_{n+1} \dots$, $A_n \in \mathcal{A}$, $\forall n$, y $\mu(A_1) < \infty$, entonces

$$\mu \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \right) = \lim_{j \rightarrow \infty} \mu(A_j).$$

Un ejemplo de por qué la condición $\mu(A_1) < \infty$ de 3 es necesaria: en el ejemplo 3 de páginas anteriores, sean $A_m = \{m, m + 1, m + 2, \dots\}$ con $m = 1, 2, 3, \dots$, entonces $\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \emptyset$ pero $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(A_m) = \infty$ (porque de hecho $\mu(A_m) = \infty$, $\forall m$).

2.3. Integración de funciones medibles positivas

Durante todo el curso, emplearemos el término “función positiva” en el sentido de “función no negativa”.

DEFINICIÓN 2.5 Dado un conjunto A , se define la *función característica* o *indicatriz* de A como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

DEFINICIÓN 2.6 Dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) (X conjunto, \mathcal{A} σ -álgebra, μ medida) se dice que $s : X \rightarrow \mathbb{R}$ es una *función simple* si se puede escribir como una combinación lineal finita de funciones características de conjuntos de \mathcal{A} . Es decir

$$s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}(x), \quad \text{con } c_j \in \mathbb{R}, A_j \in \mathcal{A}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

- Por un reordenamiento de las constantes c_j , se puede suponer siempre que los A_j son disjuntos.
- Una función es simple si y solo si es medible y su rango está compuesto por un número finito de valores.

DEFINICIÓN 2.7 ▪ Para una función simple

$$s(x) = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}(x), \tag{2.1}$$

se define su integral como sigue:

$$\int_X s(x) d\mu = \sum_{j=1}^n c_j \mu(A_j),$$

siempre que bien $\mu(A_j) < \infty$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$, o bien los c_j sean positivos, en cuyo caso no importa que los A_j sean de medida finita o no.

El valor de la integral va a ser el mismo si pasamos de la representación de $s(x)$ a otra, $s(x) = \sum_{j=1}^{n'} c'_j \chi_{A'_j}(x)$ donde los conjuntos A'_j son disjuntos. Se puede deducir que la definición de la integral $\int_X s d\mu$ no depende de la elección de los conjuntos A_j en la representación de s .

- Para una función medible y $f(x) \geq 0, \forall x$ se define su integral como sigue:

$$\int_X f(x) d\mu = \sup \left\{ \int_X s(x) d\mu : 0 \leq s(x) \leq f(x); s(x) \text{ simple} \right\}.$$

- f puede tomar valor $+\infty$ siempre que el conjunto $f^{-1}(\infty)$ sea medible.
- El supremo en esta definición podría valer $+\infty$. Esto sucede, en particular, si f toma valor $+\infty$ en un conjunto de medida positiva.

Ejemplos

1. Si μ es la medida de Lebesgue en \mathbb{R} y f es la función de Dirichlet, entonces f es simple, $f = \chi_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ y $\int_{\mathbb{R}} f d\mu = 0$
2. Si δ_{x_0} es la medida “Delta de Dirac en x_0 ”, entonces toda función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y si $f \geq 0$, se tiene $\int f \delta_{x_0} = f(x_0)$
3. En general, si μ es la medida de contar sobre \mathbb{Z} , entonces $\int f d\mu = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k)$.
4. Si μ es la medida del ejemplo 3 inicial y definimos $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(m) = \frac{1+|m|}{|m|^2}$, con $m \neq 0$ y $f(0) = 0$, entonces $\int_{\mathbb{Z}} f d\mu = \frac{\pi^2}{3}$.

Observaciones:

1. Es fácil ver que si u y v son funciones simples, $u + v$ es simple y

$$\int (u + v) d\mu = \int u d\mu + \int v d\mu.$$

2. También, si f y g son medibles y $0 \leq g \leq f$ se tiene $\int g d\mu \leq \int f d\mu$.

2.4. Teorema de la Convergencia Monótona

Ejercicio importante: Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida y $s = \sum_{j=1}^n c_j \chi_{A_j}$ es una función simple positiva, entonces la función $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ dada por

$$\nu(A) = \int_A s d\mu = \int_X s \chi_A d\mu,$$

define una medida sobre \mathcal{A} . Escribiremos $d\nu = s d\mu$. Diremos que s es la **función densidad** (o **función derivada**) de ν con respecto a μ .

TEOREMA 2.4 (de la convergencia monótona) Si $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ es una sucesión monótona creciente de funciones medibles positivas ($0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots \leq +\infty$) y sea $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Entonces se tiene

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) d\mu = \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Aquí se permite que tanto las funciones f_n como la función f tomen el valor $+\infty$.

Demostración:

Observemos primero que $\int f_1 \leq \int f_2 \leq \int f_3 \leq \dots \leq \int f_n \leq \dots$, así que el límite de las integrales siempre existe (aunque podría valer $+\infty$). Además si $f_n \leq f$, entonces $\int f_n \leq \int f$ por lo que se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu \leq \int_X f d\mu,$$

Veamos la otra desigualdad, para ello seleccionamos una función simple arbitraria entre las que cumplen $0 \leq s(x) \leq f(x)$. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < 1$ (podemos imaginar " α " próximo a 1) definimos para cada n

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \geq \alpha s(x)\}.$$

Es fácil ver:

1. A_n es medible, (porque $A_n = (f_n - \alpha s)^{-1}([0, \infty))$). (Nótese que la función s solo toma valores finitos)
2. $\{A_n\}$ es creciente ($A_1 \subset A_2 \subset \dots$) y
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$.

Además

$$\int_{A_n} s(x) d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right) \leq \frac{1}{\alpha} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j(x) d\mu \right).$$

Usando el resultado de monotonía para conjuntos con respecto a la medida $\nu = s(x)d\mu$ obtenemos

$$\int_X s(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{A_n} s(x) d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j(x) d\mu \right).$$

Tomando el supremo sobre las funciones simples $s(x)$, con $0 \leq s(x) \leq f(x)$ queda

$$\int_X f(x) d\mu \leq \frac{1}{\alpha} \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j(x) d\mu \right).$$

Como además α es arbitrario (y próximo a 1) se deduce

$$\int_X f(x) d\mu \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X f_j(x) d\mu.$$

Q.E.D.

Notación y ejercicio: Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida y f es una función medible y positiva se define para cada $A \in \mathcal{A}$

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu.$$

Probar entonces que $\nu(A) = \int_A f d\mu$ define una medida sobre \mathcal{A} . Al igual que antes, escribiremos $d\nu = f d\mu$ (ó $d\nu = d\mu_f$).

Convergencia monótona para series

Del TCM deducimos un resultado que era uno de los objetivos presentados en la introducción:

COROLARIO 2.5 *Sea $\{g_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones medibles y positivas. Entonces:*

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x) d\mu \right).$$

(De forma análoga al TCM, se admite que la serie $\sum_{k=1}^{+\infty} g_n(x)$ tome el valor $+\infty$ para algunos valores de x .)

Demostración:

Definimos para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ $G_N(x) = \sum_{n=1}^N g_n(x)$. Por definición de serie, $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(x)$. Además $0 \leq G_1 \leq G_2 \leq \dots \leq G_n \leq \dots$, por ser las g_n positivas.

Si probamos que:

$$(\star) : \int G_N(x) d\mu = \sum_{n=1}^N \int g_n(x) d\mu,$$

(integral término a término, suma finita), entonces por el TCM

$$\begin{aligned} \int \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) d\mu &= \int \lim_{N \rightarrow \infty} G_N(x) d\mu = \lim_{N \rightarrow \infty} \int G_N(x) d\mu = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \int g_n(x) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int g_n(x) d\mu. \end{aligned}$$

Q.E.D.

Nos falta probar (\star) que dice que **la integral de una suma (finita) es igual a la suma de las integrales**, al menos, para funciones positivas. Por un sencillo proceso de inducción, es suficiente probarlo para el caso de dos funciones.

Para ello necesitamos el siguiente resultado técnico que nos será de utilidad en numerosas ocasiones.

2.5. Lema técnico

LEMA 2.6 *Sea f una función medible y positiva. Entonces existe una sucesión monótona creciente de funciones simples positivas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x), \quad \forall x.$$

Notas:

- Como consecuencia del TCM se deduce de lo anterior:

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) \right) d\mu = \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n(x) d\mu \right)$$

- Este resultado sirve además para dar otra demostración de que si f y g son medibles entonces $f + g$, $g \cdot f$, f/g (cuando esté bien definida) son medibles, por ser límites puntuales de funciones medibles.

Demstración del lema técnico:

La idea consiste en considerar los conjuntos de nivel de f en franjas de anchura $\frac{1}{2^n}$ y hacer $n \rightarrow \infty$.

Sea $n \in \mathbb{N}$; para $k = 1, 2, \dots, n2^n$ definimos

$$E_k^n = f^{-1} \left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) \right),$$

y

$$F^n = f^{-1}([n, \infty)).$$

Estos conjuntos son medibles (y de medida finita cuando $\int f d\mu < \infty$; ver ejercicio posterior). Así que

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n} + n \chi_{F^n}$$

es una función simple y positiva (para cada n).

Para probar la monotonía, observamos que

$$E_k^n = E_{2k-1}^{n+1} \uplus E_{2k}^{n+1}$$

porque

$$\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n} \right) = \left[\frac{2k-2}{2^{n+1}}, \frac{2k-1}{2^{n+1}} \right) \cup \left[\frac{2k-1}{2^{n+1}}, \frac{2k}{2^{n+1}} \right)$$

por tanto,

$$\frac{k-1}{2^n} \chi_{E_k^n} \leq \frac{2k-2}{2^{n+1}} \chi_{E_{2k-1}^{n+1}} + \frac{2k-1}{2^{n+1}} \chi_{E_{2k}^{n+1}}$$

y se sigue que $s_n \leq s_{n+1}$.

Finalmente, para probar la convergencia a $f(x)$, supongamos que $f(x) < \infty$, por ejemplo $f(x) \leq m$; entonces $\forall n \geq m, 0 \leq f(x) - s_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$ ("franjas de anchura $\frac{1}{2^n}$ "), esto implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = f(x).$$

Si por el contrario, $f(x) = \infty$, entonces $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ que nos da $s_n(x) \geq n, \forall n$ y eso implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x) = \infty$$

Q.E.D.

Ejercicio: Probar que si f es medible, positiva y su integral es finita entonces $\forall a > 0$ el conjunto $A = \{x \in X : f(x) \geq a\}$ tiene medida finita. ¿Que ocurriría si $a = 0$?

Integral de una suma

Estamos ya en condiciones de probar el siguiente resultado que quedaba pendiente.

PROPOSICIÓN 2.7 : Si $f, g \geq 0$ medibles, entonces:

$$\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu.$$

Demostración:

Si $\int f = \infty$ ó $\int g = \infty$, no hay nada que probar. En caso contrario, por el lema anterior, existen sucesiones de funciones simples $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots \rightarrow f$ y $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \leq t_{n+1} \leq \dots \rightarrow g$.

Como $0 \leq (s_1 + t_1) \leq (s_2 + t_2) \leq \dots \leq (s_n + t_n) \leq (s_{n+1} + t_{n+1}) \leq \dots \rightarrow (f + g)$, en particular $f + g$ es medible, y como el resultado que buscamos es cierto para simples, concluimos

$$\int_X (f + g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X (s_n + t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X s_n + \int_X t_n \right) = \int_X f + \int_X g$$

Q.E.D.

2.6. Lema de Fatou

LEMA 2.8 (Fatou) Dada una sucesión de funciones medibles y positivas, $\{f_n\}$, se tiene:

$$\int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) \right) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right).$$

Demostración: Es una consecuencia del Teorema de la Convergencia Monótona.

Sea $g_n(x) = \inf\{f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots\}$. Entonces $0 \leq g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = \liminf_{k \rightarrow \infty} f_k$ por definición de límite inferior. Además $g_n \leq f_n \forall n$. por tanto

$$\begin{aligned} \int_X \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) \right) d\mu &= \int_X \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) d\mu \stackrel{TCM}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right). \end{aligned}$$

Q.E.D.

2.7. Integral de una función medible arbitraria

Si $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ es medible, entonces se puede escribir $f = f^+ - f^-$ con f^+ , f^- funciones medibles positivas ($f^+ = \max(f, 0)$; $f^- = -\min(f, 0)$).

DEFINICIÓN 2.8 Se dice que f es integrable si $\int f^+ d\mu < \infty$ y $\int f^- d\mu < \infty$ y escribimos

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

NOTA IMPORTANTE: Si f es medible y $f = f^+ - f^-$ entonces $|f| = f^+ + f^-$ y se tiene $\int |f| = \int f^+ + \int f^-$. Por tanto, f es integrable $\iff \int |f| < \infty$. Además $|\int f| \leq \int |f|$.

Propiedades de la integral

1. La clase de las funciones integrables es un espacio vectorial.

Demostración:

Si f y g son medibles e integrables y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha f + \beta g$ es medible (¿por qué?) y además

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| |f| + |\beta| |g|.$$

Luego, $\int |\alpha f + \beta g| < \infty$.

2. La integral es una aplicación lineal sobre la clase anterior. Es decir, si f y g son integrables y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

e

$$\int (\alpha f) = \alpha \int f.$$

Demostración:

La primera igualdad es cierta para funciones positivas. Si f y g son arbitrarias, denotamos $f + g = h$, luego

$$f_+ - f_- + g_+ - g_- = h_+ - h_-, \quad \text{es decir,} \quad f_+ + g_+ + h_- = f_- + g_- + h_+.$$

Se sigue que

$$\int f_+ + \int g_+ + \int h_- = \int f_- + \int g_- + \int h_+,$$

lo que se reescribe como

$$\int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- = \int h_+ - \int h_-, \quad \text{por tanto,} \quad \int f + \int g = \int h.$$

Para obtener la segunda igualdad, basta considerar los casos $\alpha > 0$, $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ y aplicar la definición de $\int(\alpha f)$.

Nota: Es fácil ver que para cualquier función f integrable, solo uno de los conjuntos $\{x \in X : f(x) = -\infty\}$ y $\{x \in X : f(x) = +\infty\}$ puede tener medida positiva.

Integración para funciones a valores complejos

DEFINICIÓN 2.9 Si $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, podemos escribir $f = u + iv$, donde u y v son funciones reales ($u = \text{Re}(f)$, $v = \text{Im}(f)$).

Decimos que f es medible si u y v lo son, y que es integrable si u y v también lo son.

Escribiremos $\int f d\mu = \int u d\mu + i \int v d\mu$. (en este caso, no permitiremos que f tome valores infinitos).

NOTA: Las propiedades de la integral se conservan en este contexto y además f es integrable de nuevo si y solo si $|f|$ también lo es (porque $|f| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$ y $|u|, |v| \leq \sqrt{|u|^2 + |v|^2} \leq |u| + |v|$).

2.8. Teorema de la Convergencia Dominada

TEOREMA 2.9 En (X, \mathcal{A}, μ) , espacio de medida, si la sucesión de funciones medibles $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a una función $f(x)$ y además $|f_n(x)| \leq F(x) \forall n, \forall x$ con F medible, positiva y tal que $\int_X F(x) d\mu < \infty$, entonces $f(x)$ es integrable y se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu = 0. \quad (2.2)$$

En particular,

$$\int_X \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) d\mu = \int_X f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X f_n(x) d\mu \right). \quad (2.3)$$

Demostración (del TCD):

El que f sea integrable es inmediato porque $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ implica $|f(x)| \leq F(x)$, $\forall x$ también y F es integrable (finita). Veamos también que (1) \Rightarrow (2):

$$\left| \int_X f_n(x) d\mu - \int_X f(x) d\mu \right| = \left| \int_X (f_n(x) - f(x)) d\mu \right| \leq \int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \xrightarrow{n \uparrow \infty} 0.$$

y esto implica (2).

Sólo necesitamos probar (1). Veamos que es una consecuencia del Lema de Fatou:

Sean $h_n = 2F(x) - |f_n(x) - f(x)|$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Entonces $h_n \geq 0$ y $\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 2F(x)$. Por Fatou deducimos:

$$\begin{aligned} \int_X 2F(x)d\mu &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n d\mu = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\int_X 2F(x)d\mu - \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \right) = \\ &= \int_X 2F(x)d\mu - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu. \end{aligned}$$

Despejando queda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu \leq 0,$$

y, por tanto, lo anterior debe ser igual a 0. Es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|d\mu = 0.$$

Q.E.D.

COROLARIO 2.10 : Si $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, son medibles y $\sum_{k=1}^{\infty} \int |f_k(x)|d\mu < \infty$, entonces la serie $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ converge en c.t.p. y

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k(x)d\mu \right).$$

Demostración:

Si $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$, aplicamos el TCM para deducir que $\int_X F < \infty$ y, por tanto, $F(x) < \infty$ c.t.p. A continuación usamos el TCD sobre las sumas parciales de la serie.

Q.E.D.

2.9. ANEXO I: Sobre las funciones simples y su integral

Algunos libros exigen en la definición de función simple la condición adicional de que los conjuntos que la definen sean todos de medida finita. Para aclarar este punto y como motivación general, vamos a estudiar la siguiente situación en cierta forma “patológica”:

- Sea X un conjunto con más de un elemento y elijamos $A \in \mathcal{P}(X)$, con $\emptyset \subsetneq A \subsetneq X$.

Definimos la σ -álgebra $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, A^c, X\}$ y la medida $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ por $\mu(\emptyset) = 0$, $\mu(A^c) = 1$, $\mu(A) = \mu(X) = \infty$.

Sea $f = \chi_A$. Con la condición adicional, f no sería simple porque $\mu(A) = \infty$. Además la única función simple s con $0 \leq s \leq f$ sería $s = c\chi_\emptyset$, por lo que $\int s d\mu = 0$ y por tanto $\int f d\mu = \sup\{\int s d\mu : 0 \leq s \leq f\} = 0$. Esto crea el problema de desasociar la noción de integral con la de medida.

Lo cierto es que si la medida μ fuera σ -finita esta situación no se daría porque si $\exists X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ tales que

1. $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ (podemos suponer que la unión es disjunta)
2. $\mu(X_n) < \infty$,

entonces $\forall A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = \infty$ se tiene incluso en esta situación más restrictiva $\int \chi_A d\mu = \infty$.

Para probarlo, sean $A_n = A \cap X_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$ y $s_n = \sum_{j=1}^n \chi_{A_j}$, entonces cada s_n es simple en el sentido actual (porque $\mu(A_j) < \infty$) y $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \rightarrow \chi_A$, por tanto

$$\int_X \chi_A d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X s_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu \left(\bigcup_{j=1}^n A_j \right) = \mu(A) = \infty.$$

Q.E.D.

Aún admitiendo que las medidas σ -finitas son las que con más frecuencia aparecen, no debemos olvidar el caso, entre otros, de la medida de contar en un espacio no numerable que claramente no es σ -finita. Por ello, y para evitar la patología descrita, es conveniente dar la definición de función simple e integral que hemos introducido anteriormente.

Ya hemos visto que toda función medible y positiva tiene asociada en principio una integral. La clase más importante es de todas formas aquella de las funciones cuya integral es además finita.

DEFINICIÓN 2.10 Dado un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) se define la clase de funciones “integrables” como

$$L^1(d\mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : \text{medible y tal que } \int_X |f| d\mu < \infty\}.$$

2.10. Notas sobre los conjuntos de medida cero

1. Recordamos que en el espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) , se dice que una propiedad **P** se **cumple en casi todo punto (c.t.p.)** con respecto a la medida μ si el conjunto $A = \{x : x \text{ no cumple P}\}$ está en \mathcal{A} y $\mu(A) = 0$.

Por ejemplo, decimos que las funciones medibles f y g coinciden en c.t.p. si $\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0$.

Ejercicio: Probar que si f y g son integrables y $f = g$ c.t.p., entonces $\int f = \int g$; (por ello, en la clase de funciones integrables se suelen identificar las que coinciden c.t.p.)

2. En la definición de integral, podemos suponer funciones (medibles) con valores en la recta real ampliada $f : X \rightarrow [-\infty, \infty]$ (es decir, que pueden tomar el valor $-\infty$ ó ∞), pidiendo por ejemplo $f^{-1}((a, \infty]) \in \mathcal{A}$.

Ejercicio: Probar que si f es medible e integrable, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p., es decir, $\{x : |f(x)| = \infty\}$ tiene medida cero.

Ejercicios Probar:

- Si $f \in L^1(d\mu)$,

$$\mu(\{x : |f(x)| \geq a\}) \leq \frac{1}{a} \left(\int_X |f(x)| d\mu \right), \quad \forall a > 0.$$

(Desigualdad de Chebychev)

- Si $f \in L^1(d\mu)$, entonces $|f(x)| < \infty$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$, el conjunto $\{x : f(x) \neq 0\}$ es σ -finito
- Si $f \geq 0$ y $\int f d\mu = 0$, entonces $f=0$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ y $\int_E f d\mu = 0, \forall E \in \mathcal{A}$, entonces $f = 0$ c.t.p.
- Si $f \in L^1(d\mu)$ entonces

$$\int_X |f(x)| d\mu(x) = \int_0^\infty \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}) dt.$$

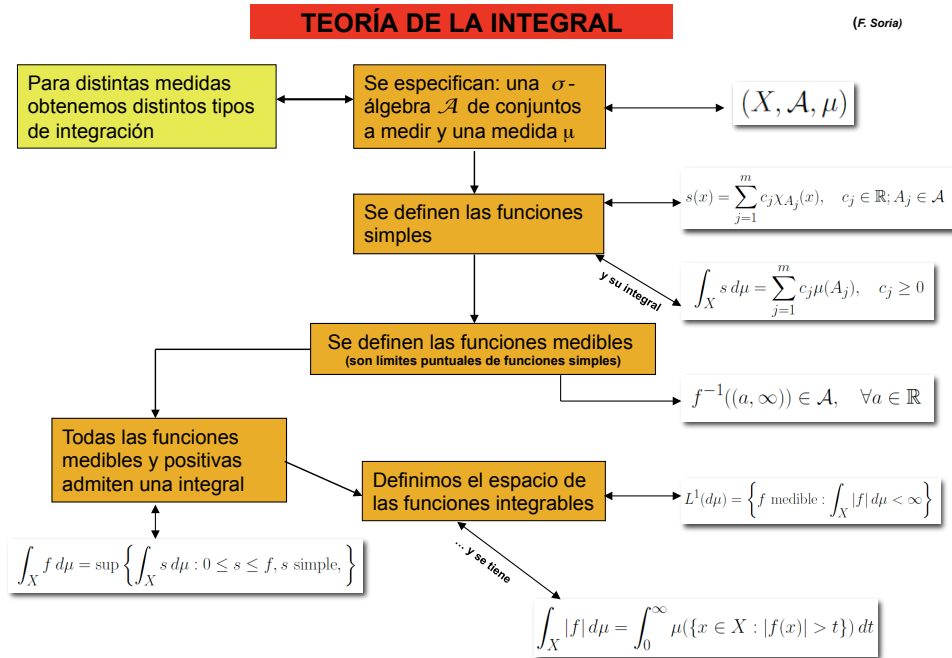
Indicación: Probarlo primero para funciones simples y usar luego el TCM.

Nota: Esta igualdad demuestra a las claras la relación existente entre integración y medida en la teoría de Lebesgue. Así, la integral de la función $|f|$ con respecto a la medida μ coincide con la integral de Riemann (!) sobre $(0, \infty)$ de la función decreciente

$$t \rightarrow \mu(\{x \in X : |f(x)| > t\}),$$

dada por la medida de los conjuntos de nivel de $|f|$ de altura t .

2.11. La integral de Lebesgue, un esquema



2.12. Estructura topológica del espacio $L^1(d\mu)$

Definimos la relación (de equivalencia) $f \mathcal{R} g \iff f = g$ c.t.p. De acuerdo a lo anterior, si $f \mathcal{R} g$ entonces $\int f = \int g$. Por abuso de notación llamamos $L^1(d\mu)$ también al espacio cociente $L^1(d\mu)/\mathcal{R}$. Entonces se tiene:

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio métrico**, con la métrica dada por:

$$d(f, g) = \int |f - g| d\mu, \quad f, g \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio normado**, con la norma dada por:

$$\|f\| = \int |f| d\mu, \quad f \in L^1(d\mu).$$

- El espacio $L^1(d\mu)$ es un **espacio de Banach**, es decir, toda sucesión de Cauchy de elementos de $L^1(d\mu)$ es convergente a un elemento de $L^1(d\mu)$.

Capítulo 3

Espacios de medida

DEFINICIÓN 3.1 Recordamos que un **espacio de medida** es una terna (X, \mathcal{A}, μ) , donde X es un conjunto, \mathcal{A} es una σ -álgebra y μ una medida. Un espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) se denomina **de Probabilidad** si se cumple $\mu(X) = 1$.

En este Capítulo vamos a dar ejemplos de las medidas más habituales y de sus propiedades, empezando por la medida original de Lebesgue definida en la recta real \mathbb{R} . Para ello utilizaremos argumentos que nos permitirán construir dichas medidas a partir de su definición sobre conjuntos simples, como son los intervalos.

Comenzamos estudiando el concepto de un tipo especial de medida, la que se denomina completa.

3.1. Medidas completas

DEFINICIÓN 3.2 Una medida μ sobre una σ -álgebra \mathcal{A} se dice que es una **medida completa** si \mathcal{A} contiene a todos los subconjuntos de conjuntos (de \mathcal{A}) con medida cero, es decir: Si $A \in \mathcal{A}$ con $\mu(A) = 0$, entonces $\forall E \subset A$, se tiene que $E \in \mathcal{A}$; obviamente se tiene además $\mu(E) = 0$.

Las medidas que hemos visto hasta ahora son todas completas (Delta de Dirac δ_0 , medida de contar en \mathbb{R} o en \mathbb{Z} , etc) porque en todos los casos se tenía $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. La medida de Lebesgue, como veremos, también es completa. Hay una forma directa de completar cualquier medida como vemos en el siguiente teorema.

TEOREMA 3.1 Sea (X, \mathcal{A}, μ) un espacio de medida, definimos:

- $\bar{\mathcal{A}} = \{E \subset X : \exists A, B \in \mathcal{A} \text{ con } A \subset E \subset B \text{ y } \mu(B \setminus A) = 0\}$
- si $E \in \bar{\mathcal{A}}$ con $A \subset E \subset B$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, definimos $\bar{\mu}(E) = \mu(A)$.

Entonces:

- (i) $\bar{\mathcal{A}}$ es una σ -álgebra (la más pequeña) que contiene a \mathcal{A}
- (ii) $\bar{\mu}$ es una medida completa que extiende a μ

Ejercicio: Probar que también se tiene:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup D : A \in \mathcal{A} \exists B \in \mathcal{A} \text{ tal que } \mu(B) = 0 \text{ y } D \subset B\}$$

Demostración del teorema:

i) Claramente $\mathcal{A} \subset \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \in \mathcal{A}$, entonces (!!!) $A \subset A \subset A$ y $\mu(A \setminus A) = 0$), en particular $X \in \mathcal{A}$.

Además si $E \in \overline{\mathcal{A}}$ entonces $E^c \in \overline{\mathcal{A}}$ (porque si $A \subset E \subset B$, con $A, B \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = 0$, se tiene $B^c \subset E^c \subset A^c$ y $A^c \setminus B^c = B \setminus A$, por tanto $\mu(A^c \setminus B^c) = 0$).

Si $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, $i = 1, 2, \dots$ entonces $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, porque si $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene $\bigcup_i A_i \subset \bigcup_i E_i \subset \bigcup_i B_i$ y $\mu(\bigcup_i B_i \setminus \bigcup_i A_i) \leq \mu(\bigcup_i (B_i \setminus A_i)) \leq \sum_i \mu(B_i \setminus A_i) = 0$.

ii) Para probar que $\bar{\mu}$ es una medida, veamos primero que está bien definida:

Si $A \subset E \subset B$ y $C \subset E \subset D$, con $A, B, C, D \in \mathcal{A}$ y $\mu(B \setminus A) = \mu(D \setminus C) = 0$ tenemos que ver que $\mu(A) = \mu(C)$, pero esto es fácil porque $\mu(A) = \mu(A \cap C) + \mu(A \setminus C)$ y $\mu(A \setminus C) \leq \mu(D \setminus C) = 0$, es decir, $\mu(A) = \mu(A \cap C)$ y de forma similar, $\mu(C) = \mu(A \cap C)$.

La σ -aditividad es similar a lo probado en i).

Sean $E_i \in \overline{\mathcal{A}}$, disjuntos, $A_i \subset E_i \subset B_i$, con $A_i, B_i \in \mathcal{A}$ y $\mu(B_i \setminus A_i) = 0$, se tiene

$$\bar{\mu} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mu}(E_i)$$

(Oserve que los A_i también son disjuntos).

Por último, $\bar{\mu}$ es completa porque si $A \in \overline{\mathcal{A}}$ es tal que $\bar{\mu}(A) = 0$ y $E \subset A$ como existen $A', B' \in \mathcal{A}$ con $A' \subset A \subset B'$ y $\mu(B' \setminus A') = 0$ y $\mu(A') = 0$, entonces $\mu(B') = \mu(A') + \mu(B' \setminus A') = 0$ también. Entonces $\emptyset \subset E \subset B'$ y se deduce que $E \in \overline{\mathcal{A}}$.

q.e.d.

Dos resultados que muestran la importancia de la completitud de una medida:

En el espacio de medida (X, \mathcal{A}, μ) si μ es completa, entonces

1. Si $f = g$ c.t.p. y f es medible entonces g es medible. *Dem.:* Sea $D = \{x : f(x) \neq g(x)\}$. Por hipótesis $\mu(D) = 0$. Dado $a \in \mathbb{R}$, sean $A = \{x : f(x) > a\}$ y $E = \{x : g(x) > a\}$. Sabemos que A es medible y queremos probar que E también es medible.

Se tiene que $E \subset A \cup D$ y $A \subset E \cup D$, y por tanto

$$B_1 = A \setminus D \subset E \subset A \cup D = B_2.$$

Claramente B_1 y B_2 son medibles y $B_2 \setminus B_1 = D$, por tanto $\mu(B_2 \setminus B_1) = \mu(D) = 0$. Por ser μ completa, se tiene que $E \in \mathcal{A}$.

q.e.d.

2. Si las f_n son medibles $\forall n$ y $f_n \rightarrow f$ c.t.p. entonces f es medible

Indicación: Si $g = \limsup f_n$, entonces g es medible y $g = f$ c.t.p.

Si μ no fuera completa, **los resultados anteriores podrían no ser ciertos**, como vemos en el siguiente ejemplo: Sean $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{3\}, X\}$ y $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty)$ con $\mu(\emptyset) = \mu(\{1, 2\}) = 0$ y $\mu(\{3\}) = \mu(X) = 1$. Definimos $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ con $f(1) = f(2) = f(3) = 3$ y $g(x) = x$, entonces

- f es medible
- $f = g$ c.t.p. porque $\{x : f \neq g\} = \{1, 2\}$
- g no es medible, porque $g^{-1}((0, 1]) = \{1\} \notin \mathcal{A}$

Ejercicio: Completar la σ -álgebra y la medida anteriores.

[*]

3.2. Medidas exteriores

Hay una segunda forma de encontrar medidas completas que también sirve para extender pre-medidas (es decir funciones σ -aditivas sobre álgebras) a medidas en el sentido habitual (Teorema de Caratheodory), para ello introducimos la siguiente

DEFINICIÓN 3.3 Se dice que $\mu^* : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ es **medida exterior** si cumple:

1. $\mu^*(\emptyset) = 0$.
2. Si $A \subset B$, $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.
3. $\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i)$.

Ejemplo: Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que $\emptyset, X \in \mathcal{D}$ y supongamos que $\rho : \mathcal{D} \rightarrow [0, \infty]$ cumple $\rho(\emptyset) = 0$. Entonces $\rho^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \rho(A_i) : A_i \in \mathcal{D} \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A \right\}$ es una medida exterior.

Demostración: 1) y 2) son elementales. Probemos 3). Sean $\{A_n\}_n \subset \mathcal{P}(X)$. Si $\sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n) = \infty$, no hay nada que probar. En caso contrario, $\forall \varepsilon \forall n$, existe $\{E_i^n\}_{i \geq 1} \subset \mathcal{D}$ tal que

$$A_n \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i^n \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i^n) \leq \rho^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Entonces,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (E_i^n) \right) \quad \text{y}$$

$$\rho^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \rho(E_i^n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n) + \varepsilon, \quad \forall \varepsilon,$$

luego

$$\rho^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \rho^*(A_n).$$

q.e.d.

Premedidas.

Un caso particular del ejemplo anterior viene dado por la noción de pre-medida.

DEFINICIÓN 3.4 Dada una álgebra $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{P}(X)$ se dice que $\mu_0 : \mathcal{B}_0 \rightarrow [0, \infty]$ es una **pre-medida** si verifica:

1. $\mu_0(\emptyset) = 0$

2. Si $B_i \in \mathcal{B}_0$ son disjuntos y $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}_0$ entonces, $\mu_0 \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(B_i)$.

(μ_0 sería de hecho una medida si supiéramos de antemano que \mathcal{B}_0 es σ -álgebra).
La medida exterior asociada es entonces:

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) : A_i \in \mathcal{B}_0 \text{ y } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \supset A \right\}$$

Conjuntos medibles (para una medida exterior).

DEFINICIÓN 3.5 Dada una medida exterior μ^* sobre X se dice que $A \subset X$ es μ^* -medible (o medible con respecto a μ^*) si

$$\mu^*(E) = \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \quad \forall E \subset X.$$

Notación: A la clase anterior la denotaremos por $\mathcal{A}^* = \{A \subset X : A \text{ es } \mu^*\text{-medible}\}$.

Observación: Como se cumple siempre que $\mu^*(E) \leq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$, entonces A es μ^* -medible $\iff \mu^*(E) \geq \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c)$ para todo E .

Ejercicio: Probar que $\mu^*(A) = 0 \implies A$ es μ^* -medible.

[*]

3.3. Teorema(s) de Caratheodory

TEOREMA 3.2 (de Caratheodory (I)) Si μ^* es una medida exterior sobre X y definimos \mathcal{A}^* como antes. Entonces \mathcal{A}^* es una σ -álgebra y $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ (restricción de μ^* a \mathcal{A}^*) es una medida completa.

TEOREMA 3.3 (de Caratheodory (II)) Sea μ_0 una pre-medida sobre \mathcal{B}_0 y definamos una medida exterior μ^* y la clase \mathcal{A}^* de los μ^* -medibles como antes. Entonces:

1. \mathcal{A}^* es una σ -álgebra que contiene a \mathcal{B}_0
2. $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida completa que extiende a μ_0

Construcción de medidas: Antes de la demostración, veamos algunos ejemplos clave:

1-La medida de Lebesgue: Sea el álgebra \mathcal{B}_0 generada por los intervalos de la forma $(a, b]$, ($a < b : a, b \in \mathbb{R}$). Es decir, \mathcal{B}_0 está formada por las uniones finitas de esos intervalos y sus complementarios. [*]

Definimos $\mu_0((a, b]) = b - a$ y extendemos la definición a \mathcal{B}_0 de manera obvia. Entonces se tiene:

- μ^* es la medida exterior de Lebesgue
- \mathcal{A}^* es la σ -álgebra de los conjuntos medibles de Lebesgue.
- $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es la medida de Lebesgue ($\mu(I) = \text{Longitud de } I, \forall I \text{ Intervalo}$).

2-Construcción de las medidas de Lebesgue-Stieltjes: Con más generalidad, tenemos la siguiente afirmación.

PROPOSICIÓN 3.4 Sea $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y continua por la derecha. Definimos $\mu_0 = \mu_F$ sobre el álgebra \mathcal{B}_0 , poniendo

$$\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a)$$

y extendiéndola a uniones finitas de intervalos semiabiertos de tipo $(a_j, b_j]$. Entonces $\mu_0 = \mu_F$ es una pre-medida sobre \mathcal{B}_0 .

Observación: La continuidad de F por la derecha es necesaria que μ_F sea una pre-medida. Esto se sigue de la fórmula $(a, b] = \cup_n (a + 1/n, b]$, luego se tiene que cumplir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_F((a + 1/n, b]) = \mu_F((a, b])$, lo que se traduce en

$$\lim_{x \rightarrow a^+} F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a + 1/n) = F(a).$$

Demostración de la Proposición 3.4: Como \mathcal{B}_0 consiste de uniones finitas de intervalos semi-abiertos $(a_j, b_j]$, hay que demostrar lo siguiente:

(*) Si $(c, d]$ es una unión disjunta de intervalos $(a_k, b_k]$, entonces

$$\mu_F((c, d]) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F(a_k, b_k].$$

Es fácil ver que para todo N , $\mu_F((c, d]) \geq \sum_{k=1}^N \mu_F((a_k, b_k])$, luego $\mu_F((c, d]) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, b_k])$.

Para demostrar la desigualdad contraria, utilizamos la compacticidad de intervalos finitos cerrados. Fijamos un $\varepsilon > 0$. Como F es continua por la derecha, existe un $\hat{c} \in (c, d]$ (cercano a c) tal que $\mu((\hat{c}, d]) > \mu((c, d]) - \varepsilon$. Escogemos también puntos $\hat{b}_k > b_k$, cercanos a b_k , de forma que $F(\hat{b}_k) \leq F(b_k) + 2^{-k-1}\varepsilon$. Luego

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, \hat{b}_k]) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_F((a_k, b_k]) + \varepsilon.$$

Los intervalos abiertos (a_k, \hat{b}_k) recubren el intervalo cerrado $[\hat{c}, d]$. Este recubrimiento tiene un subrecubrimiento finito, lo que nos da

$$\cup_{j=1}^N (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}) \supset \cup_{j=1}^N (a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}) \supset [\hat{c}, d] \supset (\hat{c}, d].$$

En esta situación, es fácil demostrar (y es obvio) que

$$\sum_{j=1}^N \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) \geq \mu_F((\hat{c}, d])$$

(se puede emplear la inducción en N). Luego

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu_F((a_{k_j}, b_{k_j}]) \geq \left(\sum_{j=1}^N \mu_F((a_{k_j}, \hat{b}_{k_j}]) \right) - \varepsilon \geq \mu_F((\hat{c}, d]) - \varepsilon \geq \mu_F((c, d]) - 2\varepsilon.$$

Esto termina la prueba, porque $\varepsilon > 0$ era arbitrario. **q.e.d.**

La medida dada por la extensión de Caratheodory se denota por $\mu = dF$. En particular si $F(x) = x$ estamos en el caso de la medida de Lebesgue que se denota por dx . [*]

Demostración del Teorema de Caratheodory (I):

a) \mathcal{A}^* es σ -álgebra: $\emptyset, X \in \mathcal{A}^*$ y si $A \in \mathcal{A}^*$, entonces $A^c \in \mathcal{A}^*$ trivialmente por simetría de la definición.

Para la unión, veamos primero que si $A, B \in \mathcal{A}^*$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}^*$:

Dado $E \subset X$ se tiene

$$E \cap (A \cup B) = E \cap (A \cap B) \cup E \cap (A \cap B^c) \cup E \cap (A^c \cap B),$$

por tanto

$$\mu^*(E \cap (A \cup B)) + \mu^*(E \cap (A \cup B)^c) \leq \mu^*(E \cap A \cap B) + \mu^*(E \cap A \cap B^c) +$$

$$+\mu^*(E \cap A^c \cap B) + \mu^*(E \cap A^c \cap B^c) \stackrel{B \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \stackrel{A \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*(E).$$

Por inducción, la unión finita de elementos de \mathcal{A}^* está en \mathcal{A}^* y por tanto \mathcal{A}^* es una álgebra. Además μ^* es aditiva en \mathcal{A}^* , pues si $A, B \in \mathcal{A}^*$, y $A \cap B = \emptyset$, entonces

$$\mu^*(A \cup B) \stackrel{A \in \mathcal{A}^*}{=} \mu^*((A \cup B) \cap A) + \mu^*((A \cup B) \cap A^c) = \mu^*(A) + \mu^*(B).$$

Para probar que \mathcal{A}^* es σ -álgebra sólo tenemos que ver que si $\{A_j\}_j \subset \mathcal{A}^*$ son disjuntos, entonces $\bigcup_j A_j \in \mathcal{A}^*$. Además aprovecharemos para probar que

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j),$$

y por tanto que $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida sobre \mathcal{A}^* . Para ello sea

$$B_n = \bigcup_{j=1}^n A_j \quad y \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j,$$

tal que $B_n \in \mathcal{A}^*$. Sea $E \subset X$ arbitrario.

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B_n) &= \mu^*(E \cap B_n \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_n \cap A_n^c) = \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap B_{n-1}) = \\ &= \mu^*(E \cap A_n) + \mu^*(E \cap A_{n-1}) + \mu^*(E \cap B_{n-2}) = \dots = \sum_{j=1}^n \mu^*(E \cap A_j). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(E \cap B_n) \leq \mu^*(E \cap B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j).$$

De esto se deduce la igualdad $\forall E \subset X$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu^*(E \cap B_n) = \mu^*(E \cap B) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_j),$$

si $\{A_j\} \subset \mathcal{A}^*$ son disjuntos. Finalmente

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap B) + \mu^*(E \cap B^c) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c)] \leq \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} [\mu^*(E \cap B_n) + \mu^*(E \cap B_n^c)] = \mu^*(E) \implies B \in \mathcal{A}^*. \end{aligned}$$

Además, tomando $E = X$ se tiene

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j).$$

b) μ^* es completa: Sea $A \in \mathcal{A}^*$ con $\mu^*(A) = 0$. Entonces $\forall B \subset A$ también se tiene $\mu^*(B) = 0$ y por tanto (por el ejercicio propuesto) $B \in \mathcal{A}^*$

q.e.d.

Demostración del Teorema de Caratheodory (II):

Ya sabemos (por el Teorema (I) anterior) que \mathcal{A}^* es una σ -álgebra y que $\mu = \mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ es una medida completa sobre \mathcal{A}^* . Nos falta por probar:

- a') $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{A}^*$,
 b') $\mu(A) = \mu_0(A), \quad \forall A \in \mathcal{B}_0$.

Para ello,

- a') Sea $A \in \mathcal{B}_0$ y $E \subset X$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \{B_j\} \subset \mathcal{B}_0$ tal que $\bigcup B_j \supset E$ y

$$\sum \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon.$$

Como

$$\bigcup (B_j \cap A) \supset E \cap A \quad \text{y} \quad \bigcup (B_j \cap A^c) \supset E \cap A^c,$$

se tiene,

$$\begin{aligned} \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) &\leq \sum_j \mu_0(B_j \cap A) + \sum_j \mu_0(B_j \cap A^c) = \\ &= \sum_j \mu_0(B_j) \leq \mu^*(E) + \varepsilon \quad \forall \varepsilon. \end{aligned}$$

Luego

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E) \quad \text{y} \quad A \in \mathcal{A}^*.$$

- b') Si $A \in \mathcal{B}_0$, claramente $\mu(A) = \mu^*(A) \leq \mu_0(A)$. Para la otra desigualdad, si $\{B_j\} \subset \mathcal{B}_0$ y $\bigcup B_j \supset A$, entonces poniendo

$$\overline{B}_j = B_j \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} B_i,$$

$\{\overline{B}_j\}$ es una familia disjunta de \mathcal{B}_0 con $\bigcup_j \overline{B}_j = \bigcup_j B_j \supset A$. Como $A = \bigcup_j (A \cap \overline{B}_j)$, se tiene

$$\mu_0(A) = \sum_j \mu_0(A \cap \overline{B}_j) \leq \sum_j \mu_0(\overline{B}_j) \leq \sum_j \mu_0(B_j).$$

Tomando ínfimos, queda $\mu_0(A) \leq \mu^*(A) = \mu(A)$.

q.e.d.

Observaciones:

- Si (X, \mathcal{A}, μ) es un espacio de medida y μ no es completa, entonces hay dos formas, como hemos visto de completarla:
 - Por el primer Teorema de este capítulo, se obtiene $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$

- Por el Teorema de Caratheodory 2, se obtiene $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$, tomando a μ^* la medida exterior inducida por μ que, al ser medida, también es premedida.
2. La relación entre ambas formas de completar la medida es la siguiente:
- $\overline{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}^*$ y $\mu^*|_{\overline{\mathcal{A}}} = \overline{\mu}$. [*]
 - Si μ es σ -finita, entonces $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^*$ [*]
3. Si μ_0 es una pre-medida sobre \mathcal{B}_0 , y \mathcal{A} es la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{B}_0 entonces hay una extensión de μ_0 a una medida sobre \mathcal{A} . (Simplemente tomamos $\mu^*|_{\mathcal{A}}$ porque $\mathcal{A} \subset \mathcal{A}^*$). Si μ_0 es σ -finita, esta extensión es única.
4. Si μ^* es una medida exterior en X , que proviene de una pre-medida μ_0 , y $\mu^*(X) < \infty$, entonces también se tiene

$$\mathcal{A}^* = \{A \subset X : \mu^*(A) + \mu^*(A^c) = \mu^*(X)\}$$

(Recordar aquí la definición de subconjunto medible de $[0, 1]$ dada por Lebesgue: $A \subset [0, 1]$ es medible si y solo si $m^*(A) + m^*([0, 1] \setminus A) = 1$.)

[*]

Ejemplos de medidas de Lebesgue-Stieltjes:

1. $F(x) = x$; $\mu_F((a, b]) = b - a$; $dF = \mu^*|_{\mathcal{A}^*} = m$, medida de Lebesgue.
2. $F(x) = e^x$; $\mu_F((a, b]) = e^b - e^a$; $\forall A \in \mathcal{A}^*$, $dF(A) = \int_A e^x dm(x)$.
3. En general, si sabemos además que $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ y $f = F'$, $\forall A \in \mathcal{A}^*$ se tiene

$$dF(A) = \int_A f(x)dm(x) = \int_A F'(x)dm(x) \quad (dF = F' dx),$$

porque $\mu_F((a, b]) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

4. Función de Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \geq 0, \\ 0, & \text{si } x < 0. \end{cases}$
 $\mu_H((a, b]) = \begin{cases} 1, & \text{si } a < 0 \leq b, \\ 0, & \text{si } b < 0 \text{ ó } a \geq 0. \end{cases}$ La extensión es $\mu_H^* = \delta_0$ (Dirac en 0)
5. $F(x) = [x]$: parte entera de x ($= \sup\{k \in \mathbb{Z} : k \leq x\}$); $\mu_F((a, b]) = \#\{k : a < k \leq b\}$.
 $\mu_F^*(A) = dF(A) = \#(A \cap \mathbb{Z})$ es la medida de contar en \mathbb{Z} como subconjunto de \mathbb{R} .

3.4. Medidas de Borel

DEFINICIÓN 3.6 Se dice que μ es una **medida de Borel en \mathbb{R}** si está definida sobre la σ -álgebra de los conjuntos de Borel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

LEMA 3.5 Toda premedida μ_F definida como antes sobre \mathcal{B}_0 se puede extender (de forma única) a una medida de Borel.

Esto es inmediato porque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ es la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{B}_0 y por tanto

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}^*$$

La extensión viene dada por la restricción de $dF = \mu_F^*|_{\mathcal{A}^*}$ a $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

Recordatorio : Su extensión a todo \mathcal{A}^* se denomina la medida de Lebesgue-Stieltjes asociada, que hemos denotado por dF .

En general **no es cierto que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ y \mathcal{A}^* coincidan**. Así por ejemplo el caso 3 anterior (delta de Dirac) se tiene $\mathcal{A}^* = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y, como veremos, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$. De hecho, se tiene

LEMA 3.6 Si m es la medida de Lebesgue y denotamos por \mathcal{L} los conjuntos medibles de Lebesgue, entonces $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subsetneq \mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ (contenidos estrictos).

Demostración: La primera parte es una cuestión de cardinales porque $\text{card}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}}) = 2^{\aleph_0} = c$ (ya que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ está generada por la familia numerable $\{(a, \infty) : a \in \mathbb{Q}\}$), mientras que $\text{card}(\mathcal{L}) > c$ (puesto que el conjunto de Cantor $\mathcal{C} \in \mathcal{L}$ y como $m(\mathcal{C}) = 0$ y \mathcal{L} es completa, $\mathcal{P}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{L}$. Por otro lado, $\text{card}(\mathcal{C}) = c$ y por tanto $\text{card}(\mathcal{L}) \geq \text{card}(\mathcal{P}(\mathcal{C})) > c$).

Para ver que $\mathcal{L} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ basta recordar que, por el axioma de elección, encontramos un conjunto no medible de Lebesgue (para ello utilizamos la invarianza por traslación $m(x+A) = m(A)$ si $x \in \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, $A \in \mathcal{L}$, que veremos más adelante). **q.e.d.**

El recíproco a la nota es parcialmente cierto como se ve en la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.7 Si μ es una medida de Borel finita sobre conjuntos acotados, entonces μ proviene de cierta pre-medida μ_F sobre \mathcal{B}_0 .

Para verlo basta definir $F(x) = \begin{cases} \mu((0, x]), & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x = 0, \\ -\mu((x, 0]), & \text{si } x < 0. \end{cases}$

Claramente F es creciente, continua por la derecha y $\mu((a, b]) = F(b) - F(a)$. **[*]**

Ejemplos:

$$1. \mu = m_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, F(x) = \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ si } x > 0 \\ 0, \text{ si } x = 0 \\ -(-x), \text{ si } x < 0 \end{array} \right\} = x$$

$$2. \mu = \delta_0|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}, F(x) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{array} \right\} \text{ es decir, } F = H - 1, \text{ y es que...}^{(1)}$$

¹ **Ejercicio:** $\mu_F = \mu_G \iff F - G = \text{constante}$

No todas las medidas de Borel provienen de una pre-medida μ_F . Por ejemplo, si μ es la medida de contar sobre \mathbb{R} , su restricción $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ no viene de una μ_F porque $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R})}((a, b]) = \infty \forall a, b$.

3.4.1. Observaciones sobre las medidas de Lebesgue-Stieltjes

Sea F una función de distribución (i.e., creciente y continua por la derecha) y dF la correspondiente medida de Lebesgue-Stieltjes. Supongamos que existe un conjunto abierto A en donde F es derivable. Si $D = \mathbb{R} \setminus A$ entonces se tiene para toda función $f \in L^1(dF)$

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_A f(t) F'(t) dt + \int_D f dF.$$

Si D corresponde a los puntos de discontinuidad de F (y es por tanto numerable) entonces se tiene

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_A f(t) F'(t) dt + \sum_{z \in D} \int_{\{z\}} f dF = \int_A f(t) F'(t) dt + \sum_{z \in D} f(z) dF(\{z\}).$$

Este es el caso más frecuente que hemos visto hasta ahora ... pero no el único.

La función de Cantor (o escalera del diablo) Se define de la siguiente forma:

- $F(x) = 0$ si $x \leq 0$ y $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.
- Sea \mathcal{C} el conjunto de Cantor ternario. Si $x \in \mathcal{C}$ entonces podemos escribir x de forma única como $\sum_{k \geq 1} b_k 3^{-k}$, con $b_k = 0, 2$. Para este x definimos

$$F(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2} 2^{-k} = \sum_{k \geq 1} \frac{b_k}{2^{k+1}}.$$

- Para el resto de puntos en el abierto $[0, 1] \setminus \mathcal{C}$ definimos F de forma constante, simplemente por interpolación.

Entonces, F es una distribución de Probabilidad continua. Además es derivable en el abierto $\mathbb{R} \setminus \mathcal{C}$, con derivada 0. Por lo tanto, si $\int |f| dF < \infty$,

$$\int_{\mathbb{R}} f dF = \int_{\mathcal{C}} f dF.$$

Obsérvese que el conjunto de Cantor, \mathcal{C} , NO es numerable, y por tanto no se puede continuar expandiendo la integral como una suma.

La función de Cantor también se puede construir por aproximaciones sucesivas de la manera siguiente: Consideramos el complementario en $[0, 1]$ del conjunto de Cantor $\mathcal{O} =$

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{2^{n-1}} I_{n,k}.$$

- En el primer paso, $n = 1$, $f_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x \geq 1, \\ 1/2, & \text{si } x \in I_{1,1}, \\ --, & \text{interpolación lineal en el resto.} \end{cases}$

Por inducción, para $n \geq 2$,

- En el paso n , $f_n(x) = \begin{cases} f_{n-1}(x), & \text{si } x \in \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{k=1}^{2^{j-1}} I_{j,k} \cup (-\infty, 0] \cup [1, \infty), \\ f_{n-1}(c_{n,k}), & \text{si } x \in I_{n,k}, c_{n,k} \text{ es el punto central de } I_{n,k}, \\ & k = 1, \dots, 2^{n-1}. \\ --, & \text{interpolación lineal en el resto.} \end{cases}$

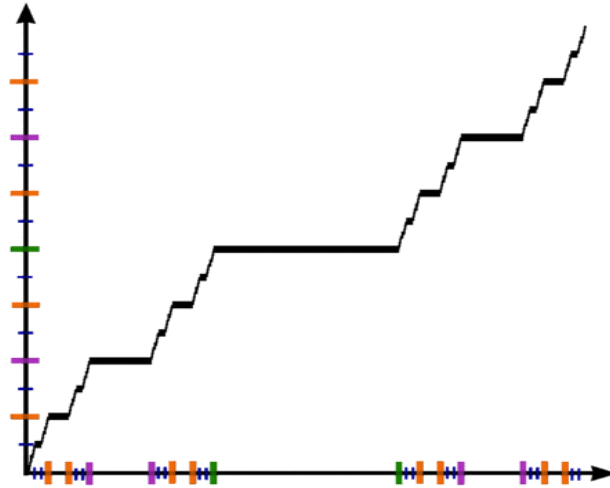


Figura 3.1: Función de Cantor en el paso $n = 6$

Con la sucesión de funciones, $\{f_n\}_n$, así construida se tiene que

$$|f_n(x) - f_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n, \forall x.$$

Por lo tanto, la sucesión converge uniformemente a cierta función $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \forall x$. Claramente F es continua (porque las f_n lo son) y no decreciente (porque las f_n también lo son).

3.5. Medidas regulares en \mathbb{R}

DEFINICIÓN 3.7 Dado $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida se dice que μ es **regular** (en \mathbb{R}) si verifica:

- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$
- Regularidad exterior, esto es:

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ abierto}\}$$

- Regularidad interior, esto es:

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$$

PROPOSICIÓN 3.8 La medida de Lebesgue, m , es regular.

Ejercicio: Probar lo mismo para cualquier medida de Lebesgue-Stieltjes.

Demostración de la proposición:

Regularidad exterior:

Sabemos, por la construcción de m , que

$$m(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) : \bigcup_{j=1}^{\infty} (a_j, b_j] \supset A \right\}, \quad \forall A \in \mathcal{L}.$$

Dados $\varepsilon > 0$, $A \in \mathcal{A}$ y un recubrimiento arbitrario $\{(a_j, b_j]\}_j$ de A sea

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \left(a_j, b_j + \frac{\varepsilon}{2^j} \right).$$

Entonces U es abierto, $U \supset A$ y

$$m(A) \leq m(U) \leq \sum_{j=1}^{\infty} (b_j - a_j) + \varepsilon.$$

Tomando ínfimos, queda $m(A) \leq \inf\{m(U) : U \supset A, \text{abierto}\} \leq m(A) + \varepsilon$. Como ε es arbitrario, la primera desigualdad es realmente una igualdad.

Regularidad interior:

Para probar la regularidad interior supongamos primero que A es acotado (por ejemplo $A \subset [-N, N]$). Sea $A' = [-N, N] \setminus A$. Por el apartado anterior, dado $\varepsilon > 0$, $\exists U$ abierto tal que $U \supset A'$ y $m(U) \leq m(A') + \varepsilon$. Entonces $K = [-N, N] \setminus U$ es compacto, $K \subset A$ y además

$$m(K) \leq m(A) = m([-N, N]) - m(A') \leq m([-N, N]) - m(U) + \varepsilon \leq m(K) + \varepsilon.$$

Tomando supremos queda $m(A) = \sup\{m(K) : K \subset A \text{ compacto}\}$.

Si A no es acotado, aplicamos el resultado a cada conjunto $A_N = [-N, N] \cap A$ y usamos que $m(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} m(A_N)$

q.e.d.

COROLARIO 3.9 : Si A es medible Lebesgue ($A \in \mathcal{L}$), existen dos conjuntos de Borel $U, V \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ tales que $U \subset A \subset V$ y $m(U) = m(A) = m(V)$. De hecho se tiene que V es la intersección numerable de abiertos y U es una unión numerable de compactos.

Dos resultados sobre la medida e integral de Lebesgue:

TEOREMA 3.10 (Invarianza por traslaciones y dilataciones) Dado $E \subset \mathbb{R}$, definimos para $x_0 \in \mathbb{R}$, $r > 0$, $x_0 + E = \{x_0 + y : y \in E\}$ y $r \cdot E = \{r \cdot y : y \in E\}$. Entonces si $E \in \mathcal{L}$ se tiene $x_0 + E \in \mathcal{A}$, $r \cdot E \in \mathcal{A}$ y $m(x_0 + E) = m(E)$, $m(r \cdot E) = r \cdot m(E)$.

Demostración: Esto se deduce de que m es invariante en la clase \mathcal{B}_0 , puesto que si $E = (a, b]$, $x_0 + E = (x_0 + a, x_0 + b]$ y $m(x_0 + E) = b - a = m(E)$, análogamente, $r \cdot E = (r \cdot a, r \cdot b]$ y $m(r \cdot E) = r \cdot b - r \cdot a = r \cdot m(E)$

q.e.d.

TEOREMA 3.11 Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann, entonces f es medible Lebesgue y por tanto es integrable Lebesgue y además

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dm.$$

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$ encontramos una partición P_n del intervalo $[a, b]$ tal que $U_f(P_n) - L_f(P_n) \leq \frac{1}{n}$. Podemos suponer que $P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \dots$ (o si no, tomar particiones más finas).

Si $\{I_j^n\}_{j \geq 1}$ son los intervalos asociados a la partición P_n definimos:

$$s_n(x) = \sum_{j \geq 1} \inf_{I_j^n} (f) \cdot \chi_{I_j^n}(x) \quad , \quad S_n(x) = \sum_{j \geq 1} \sup_{I_j^n} (f) \cdot \chi_{I_j^n}(x).$$

Entonces $\{s_n\}$ y $\{S_n\}$ son funciones simples (en el sentido Lebesgue). Además

$$s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots \leq f(x) \leq \dots \leq S_{N+1} \leq S_N \leq \dots \leq S_2 \leq S_1.$$

Sean $g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(x)$ y $G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x)$. Se tiene que g y G son medibles (porque son límite de funciones simples). Además $g(x) \leq f(x) \leq G(x)$ y, como

$$\int (G - g) dm \leq \int (S_n - s_n) dm = U_f(P_n) - L_f(P_n) \leq \frac{1}{n} \quad \forall n,$$

concluimos $\int (G - g)dm = 0$. Por tanto $G - g = 0$ c.t.p. Luego $f = g = G$ c.t.p.
 f es medible Lebesgue y

$$\int f dm = \int G dm = \lim_{n \rightarrow \infty} \int S_n dm = \int_a^b f(x) dx.$$

q.e.d.

Capítulo 4

Medidas producto y el Teorema del cambio de variable

4.1. La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n como modelo

DEFINICIÓN 4.1 *Dados intervalos $J_1, J_2, J_3, \dots, J_n$ de \mathbb{R} (finitos o no), al producto cartesiano $R = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ lo denominaremos **rectángulo** en \mathbb{R}^n .*

DEFINICIÓN 4.2 *Si $|J_1|_1, \dots, |J_n|_1 \neq 0$, se define el **volumen** n -dimensional del rectángulo R como*

$$|R|_n = |J_1|_1 \cdot |J_2|_1 \cdot \dots \cdot |J_n|_1,$$

donde $|\cdot|_1$ denota la longitud en \mathbb{R} (Si no hay problema de confusión, escribiremos $|\cdot|$ en lugar de $|\cdot|_1$). Si se tuviera $|J_k|_1 = 0$ para algún k , entonces se define $|R|_n = 0$ incluso si alguna de las otras coordenadas fuera infinita.

LEMA 4.1 *La intersección de dos rectángulos es un rectángulo.*

Demostración:

Sean los rectángulos

$$R = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \quad R' = J'_1 \times J'_2 \times \dots \times J'_n,$$

entonces

$$R \cap R' = (J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n) \cap (J'_1 \times J'_2 \times \dots \times J'_n) = (J_1 \cap J'_1) \times (J_2 \cap J'_2) \times \dots \times (J_n \cap J'_n)$$

Q.E.D.

LEMA 4.2 *La unión finita de rectángulos se puede escribir como unión disjunta y finita de rectángulos.*

Demostración:

Basta hacerlo con dos y luego usamos inducción. Sea

$$R = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n \quad R' = J'_1 \times J'_2 \times \dots \times J'_n$$

$R = [(J_1 \setminus J'_1) \cup (J_1 \cap J'_1)] \times \dots \times [(J_n \setminus J'_n) \cup (J_n \cap J'_n)] \equiv$ unión disjunta de, como mucho, 3^n rectángulos

$R' = [(J'_1 \setminus J_1) \cup (J'_1 \cap J_1)] \times \dots \times [(J'_n \setminus J_n) \cup (J'_n \cap J_n)] \equiv$ unión disjunta de rectángulos disjuntos a su vez de los anteriores de R , salvo por $R \cap R'$

Q.E.D.

LEMA 4.3 *La clase $\mathcal{B}_0 = \{ \text{Uniones finitas de rectángulos} \}$ es una álgebra.*

Demostración:

Basta probar que \mathcal{B}_0 es cerrado por complementos y, como $(\bigcup R_j)^c = \bigcap R_j^c$, basta probarlo con un rectángulo por el Lema 4.1.

Si $R = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ entonces

$$R^c = \left(\bigcup K_1 \times \dots \times K_n \right) \setminus R$$

donde K_i es J_i o su complementario J_i^c (que es la unión, como mucho, de dos intervalos)

Q.E.D.

DEFINICIÓN 4.3 *Definimos el volumen de un elemento $B \in \mathcal{B}_0$ escribiendo B como la unión disjunta de rectángulos, $B = \bigcup_{j=1}^m R_j$, (que podemos por el Lema 4.2) y poniendo $|B| = \sum_{j=1}^m |R_j|$*

LEMA 4.4 $|\cdot|$ es una premedida en \mathcal{B}_0

Sólo hay que comprobar que si $B_j \in \mathcal{B}_0$ (disjuntos) y $\biguplus_{j=1}^{\infty} B_j = B$ con $B \in \mathcal{B}_0$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} |B_j| = |B|$$

La prueba de esto último es semejante a la de una dimensión. (Primero se ve para una unión finita y luego, si B es acotado, se usa la caracterización de compactos de Borel).

DEFINICIÓN 4.4 (Medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n) *La extensión de Caratheodory de la terna $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_0, |\cdot|_n)$, nos da un espacio de medida completa $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}_n, m_n)$ con $m_n(R) = |R| \forall R$ rectángulo. Por ser $|\cdot|_n$ σ -finita, esta extensión es única sobre la mínima σ -álgebra que contiene a \mathcal{B}_0 que, como veremos, coincide con la clase de los Borel en \mathbb{R}^n . La clase \mathcal{L}_n es la σ -álgebra de Lebesgue en \mathbb{R}^n y $m_n = m = dx$ la medida de Lebesgue.*

4.2. Propiedades de la σ -álgebra y de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n

- (a) \mathcal{L}_n contiene a los abiertos de \mathbb{R}^n .

(y por tanto a la σ -álgebra de Borel, \mathcal{B}_n) de hecho se tiene:

LEMA 4.5 *Todo abierto es unión numerable casi disjunta de cubos de \mathbb{R}^n , es decir, dado U abierto, $\exists\{Q_j\}$ cubos con interiores disjuntos, tales que $U = \bigcup_i Q_i$. Eligiendo cubos de la forma $Q = J_1 \times J_2 \times \dots \times J_n$ con $J_k = (a_k, a_k + h]$, la unión es, de hecho, disjunta.*

Demostración:

Dado $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ sea D_k la colección de cubos de \mathbb{R}^n de lado 2^{-k} y vértices de coordenadas $(m_1 2^{-k}, m_2 2^{-k}, \dots, m_n 2^{-k})$ con $m_1, m_2, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$. Estos cubos se llaman **diádicos** y tienen la propiedad de que si $Q, Q' \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$ entonces o bien son casi disjuntos o bien uno está contenido en el otro. (Basta probarlo para Q, Q' en el mismo D_k y luego observar que si $Q' \in D_{k+1}$, Q es uno de los 2^n cubos iguales en que se divide cierto cubo de D_k).

Dado el abierto U , elegimos los cubos de D_0 contenidos en U , a continuación los de D_1 contenidos en U pero no en la unión de los ya elegidos y así sucesivamente. La colección elegida es la que buscamos

1. Es numerable (porque cada D_k lo es)
2. Es casi-disjunta
3. Su unión es U , porque si $x \in U$ existe un cubo diádico Q con $x \in Q \subset U$, ya que si $\text{dist}(x, U^c) = \delta > 0$ y tomando $k \in \mathbb{N}$ con $2^{-k} < \delta/\sqrt{n}$, entonces x está en una celda de D_k contenida en U .

Q.E.D.

- (b) $\forall A \in \mathcal{L}_n, \quad m(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |R_i| : R_i \text{ rectángulos, } \bigcup_{i=1}^{\infty} R_i \supset A \right\}.$

- (c) La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es regular (misma demostración que en \mathbb{R}):

$$m(A) = \inf \{ m(U) : A \subset U, U \text{ abierto} \}$$

$$m(A) = \sup \{ m(K) : K \subset A, K \text{ compacto} \}.$$

- (d) La medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n es invariante por traslaciones:

TEOREMA 4.6 -

1. Si $A \in \mathcal{L}_n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ entonces $x_0 + A \in \mathcal{L}_n$ y $m(x_0 + A) = m(A)$
2. Sea f medible $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, si $f \geq 0$ ó $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\int f(x_0 + x)dm = \int f(x)dm$$

Demostración:

1. Por la construcción de m , basta suponer que A es un rectángulo y en ese caso, el resultado es trivial.
2. Basta suponer que $f \geq 0$ y, por un paso al límite, podemos suponer que f es además simple. Ahora bien, si $f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{A_j}(x)$ entonces $f(x+x_0) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{(-x_0+A_j)}(x)$, y por tanto

$$\int f(x+x_0)dm(x) = \sum_{j=1}^N c_j m(-x_0 + A_j) = \sum_{j=1}^N c_j m(A_j) = \int f(x)dm(x)$$

q.e.d.

TEOREMA 4.7 -

1. Si $A \in \mathcal{L}_n$, $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entonces $c \cdot A \in \mathcal{L}_n$ y $m(c \cdot A) = |c|^n \cdot m(A)$
2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Si $f \geq 0$ ó $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene $\forall c \neq 0$

$$\int f(c \cdot x)dm(x) = \frac{1}{|c|^n} \int f(x)dm(x)$$

Demostración:

La demostración es semejante a la anterior.

1. Si A es un rectángulo, $c \cdot A$ también lo es y $|c \cdot A| = |c|^n \cdot |A|$. De aquí se extiende a abiertos y, por regularidad de m , a todo $A \in \mathcal{L}_n$.
2. Basta suponer que s es simple y positiva, y observar que $\chi_A(c \cdot x) = \chi_{\frac{1}{c}A}(x)$ y por tanto

$$\int \chi_A(c \cdot x)dm(x) = m\left(\frac{1}{c}A\right) = \frac{1}{|c|^n}m(A)$$

q.e.d.

4.3. Teorema del cambio de variable (I)

TEOREMA 4.8 (Fórmula del cambio de variable para aplicaciones lineales) Sea T una aplicación $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ lineal y regular ($\det(T) \neq 0$, i.e., la matriz que define a T pertenece a $GL(n, \mathbb{R})$). Entonces:

1. Si $A \in \mathcal{L}_n$, $T(A) \in \mathcal{L}_n$, y $m(T(A)) = |\det(T)|m(A)$
2. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ medible. Si $f \geq 0$ ó $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dm)$ se tiene

$$\int f(x)dm = |\det(T)| \int f(T(x))dm$$

COROLARIO 4.9 (Invarianza por rotaciones) Si T es una rotación (de forma que $|\det T| = 1$) se tiene

$$m(T(A)) = m(A), \quad \forall A \in \mathcal{L}_n$$

Demostración del teorema:

1. Lo probamos primero para cubos, usando que si Q es un cubo arbitrario, existen $c > 0$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Q = c \cdot Q_0 + b$, y que además $m(T(Q_0)) = |\det T|$.

De esto deducimos el resultado para abiertos, y por la regularidad exterior para cualquier conjunto medible.

2. Como siempre, basta suponer que f es simple y positiva

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{A_j}(x), \quad \text{y observar que} \quad f(T(x)) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{T^{-1}(A_j)}(x),$$

de forma que

$$\begin{aligned} \int f(T(x)) dm(x) &= \sum_{j=1}^N c_j m(T^{-1}(A_j)) = \frac{1}{|\det T|} \sum_{j=1}^N c_j m(A_j) = \\ &= \frac{1}{|\det T|} \int f(x) dm(x), \end{aligned}$$

Luego usamos el TCM para el caso general.

q.e.d.

COROLARIO 4.10 Si D es un conjunto medible y f, T son como en el teorema anterior, entonces se tiene:

$$\int_{T(D)} f(y)dm = |\det(T)| \int_D f(T(x))dm$$

Demostración:

Sea $B = T(D)$ y $g = f\chi_B$. Entonces

$$g(T(x)) = f(T(x)) \cdot \chi_D(x)$$

y por el teorema se tiene:

$$\int_{T(D)} f(x) dm = \int g(x) dm = |\det T| \int g(T(x)) dm = |\det(T)| \int_D f(T(x)) dm$$

Q.E.D.

4.4. Medidas inducidas

El **Teorema del cambio de variable** permite sustituir la aplicación T por cualquier difeomorfismo φ , de forma que si $J(x) = \det D_\varphi(x)$ (Jacobiano de φ en x) entonces

$$\int_{\varphi(D)} f(y) dy = \int_D f(\varphi(x)) |J(x)| dx.$$

(Como en dimensión $n = 1$, dx representa la medida de Lebesgue).

Antes introduciremos un caso especial:

Definiciones:

1. Dados dos espacios X e Y dotados de ciertas σ -álgebras \mathcal{A}_X y \mathcal{A}_Y respectivamente, se dice que $\varphi : X \rightarrow Y$ es **medible** (con respecto a \mathcal{A}_X y \mathcal{A}_Y) si $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{A}_X \quad \forall B \in \mathcal{A}_Y$
2. Si μ es una medida sobre la σ -álgebra \mathcal{A}_X entonces φ **induce una medida** sobre \mathcal{A}_Y de la siguiente forma:

$$\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$$

Ejercicio: Comprobar que μ_φ es en efecto una medida. (Ver hoja 2, ejercicio 14)

TEOREMA 4.11 Sean \mathcal{A}_X , \mathcal{A}_Y , μ y μ_φ como la definición anterior. Si $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y $f \geq 0$ ó $f \in L^1(d\mu_\varphi)$ entonces

$$\int_Y f(y) d\mu_\varphi(y) = \int_X f(\varphi(x)) d\mu(x)$$

Demostración:

Basta observar que dado cualquier $B \in \mathcal{A}_Y$ la identidad se cumple para $f = \chi_B$ (porque $f \circ \varphi(x) = \chi_B(\varphi(x)) = \chi_{\varphi^{-1}(B)}$ y $\int_Y f d\mu_\varphi = \mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)) = \int f \circ \varphi d\mu$).

Luego la identidad se cumple para f simple y de aquí para funciones positivas pasando al límite, etc.

Q.E.D.

Este resultado es un teorema de cambio de variables donde la parte “más difícil”, la identidad $\mu_\varphi(B) = \mu(\varphi^{-1}(B))$ se cumple por definición de la medida inducida μ_φ .

4.5. Teorema del cambio de variable (II)

Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^n y $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo regular; es decir $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, es inyectivo, y su inversa, $\varphi^{-1} \in C^1(\varphi(\Omega))$. Si $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ son sus funciones coordenadas, entonces su diferencial en el punto x , $D_\varphi(x)$ es una aplicación lineal dada por la matriz jacobiana

$$A_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

Se denomina **jacobiano** de φ en x al determinante de esta matriz

$$J(x) = \det A_x = \det D_\varphi(x)$$

Notas:

1. Si φ es una aplicación lineal regular entonces $D_\varphi(x) = T$, $\forall x$, y $J(x) = \det T$
2. Como $\varphi \circ \varphi^{-1} = \text{Identidad}$, se tiene $D_\varphi(x) \circ D_{\varphi^{-1}}\varphi(x) = I$, y por tanto $\det(D_\varphi(x)) \cdot \det(D_{\varphi^{-1}}\varphi(x)) = 1$, es decir, $J_\varphi(x) \cdot J_{\varphi^{-1}}(\varphi(x)) = 1$, y también $J_{\varphi^{-1}}(x) \cdot J_\varphi(\varphi^{-1}(x)) = 1$

TEOREMA 4.12 (Teorema del cambio de variable) *Sea $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo regular C^1 sobre el abierto Ω , y sea $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ medible (Lebesgue). Si $f \geq 0$ ó $f \in L^1(dx)$. Entonces:*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \cdot |J(x)|dx$$

Observación: Llamando $d\mu(x) = |J(x)|dx$, lo que queremos probar es que $d\mu_\varphi(y) = dy$, es decir, que dy es la medida inducida por φ . Para ello, como en los casos anteriores, basta probar $m(\varphi(B)) = \int_B |J(x)|dx$, $\forall B \subset \Omega$, medible. La clave radica en demostrar el siguiente

LEMA 4.13 *Si Q es un cubo de Ω entonces*

$$m(\varphi(Q)) \leq \int_Q |J(x)|dx$$

Antes de probarlo, veamos que este lema es lo único que necesitamos para dar una demostración del teorema.

Demostración del teorema (a partir del lema):

El caso de $f \in L^1(dx)$ se reduce al caso de f positiva, escribiendo $f = f^+ - f^-$. Por tanto, suponemos que $f \geq 0$. En primer lugar observamos que si $\forall \varphi$ probamos la desigualdad

$$(\star) \quad \int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy \leq \int_{\Omega} f \circ \varphi(x)|J_{\varphi}(x)|dx$$

entonces la otra es inmediata aplicando el resultado a φ^{-1} pues, si $g(x) = f \circ \varphi(x)|J_{\varphi}(x)|$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f \circ \varphi(x)|J_{\varphi}(x)|dx &= \int_{\varphi^{-1}(\varphi(\Omega))} g(x)dx \\ &\stackrel{(\star)}{\leq} \int_{\varphi(\Omega)} g \circ \varphi^{-1}(y)|J_{\varphi^{-1}}(y)|dy = \int_{\varphi(\Omega)} f(y)dy. \end{aligned}$$

Para probar ahora (\star) basta como siempre hacerlo para funciones simples positivas

$$f(y) = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{A_j}(y), \quad A_j \subset \varphi(\Omega) \text{ medible.}$$

Por linealidad de la integral, basta suponer que $f = \chi_A$, con $A \subset \varphi(\Omega)$ medible. Es decir, tomando $B = \varphi^{-1}(A)$, el teorema se reduce a probar

$$(\star\star) \quad m(\varphi(B)) \leq \int_B |J_{\varphi}(x)|dx, \quad \forall B \subset \Omega, \quad \text{medible}$$

Por el lema sabemos que el resultado $(\star\star)$ es cierto para cubos. De ahí lo deducimos para abiertos, porque todo abierto U es unión disjunta de cubos $U = \bigcup_j Q_j$ y por tanto

$$m(\varphi(U)) \leq \sum_j m(\varphi(Q_j)) \leq \sum_j \int_{Q_j} |J_{\varphi}(x)|dx = \int_U |J_{\varphi}(x)|dx$$

Para probarlo en general para un $B \subset \Omega$ medible arbitrario podemos suponer que B es acotado y que $\overline{B} \subset \Omega$ (en caso contrario, si escribimos Ω como unión casi-disjunta de cubos cerrados $\Omega = \bigcup_j Q_j$ se tiene

$$B = \bigcup_j (B \cap Q_j)$$

cada $B_j = B \cap Q_j$ es acotado, $\overline{B_j} \subset Q_j \subset \Omega$ y si lo probamos para B_j , el argumento anterior lo da para B)

Si B es acotado, existe una cadena decreciente de abiertos

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_m \supset \dots \supset B$$

tal que

$$m(B) = \lim_{m \rightarrow \infty} m(U_m).$$

Podemos suponer que U_1 es acotado y $\overline{U_1} \subset \Omega$. La función $|J_\varphi(x)|$ es acotada en U_1 por tanto, y el T.C.D. nos da

$$m(\varphi(B)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} m(\varphi(U_m)) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U_m} |J_\varphi(x)| dx = \int_B |J_\varphi(x)| dx.$$

q.e.d.

Demostración del Lema

Utilizaremos la norma $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_j |x_j|$, $x \in \mathbb{R}^n$, y la correspondiente norma matricial

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Como $\varphi \in C^1$, $\max_{x \in Q} \|(D_\varphi(x))^{-1}\| \leq C < \infty$.

Sea $1 \leq j \leq n$, y sean $x, x+u \in Q$. Aplicamos el teorema de Lagrange y la regla de cadena a la función $f_j(t) = \varphi_j(x+tu)$:

$$f_j(1) = f_j(0) + f'_j(\xi_j), \quad 0 \leq \xi_j \leq 1,$$

luego

$$\varphi_j(x+u) = \varphi_j(x) + \sum_{k=1}^n \varphi'_{jx_k}(x + \xi_j u) u_k.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(x+u) = \varphi(x) + \tilde{D}(x, u)u, \quad (*)$$

donde $\tilde{D}(x, u) = (\varphi'_{jx_k}(x + \xi_j u))_{j,k=1}^n$. Las funciones φ'_{jx_k} son continuas en Q y por tanto son uniformemente continuas. Se sigue que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \|u\|_\infty < \delta, x, x+u \in Q \implies \|\tilde{D}(x, u) - D_\varphi(x)\| < \varepsilon/C.$$

Ponemos $\tilde{D} = \tilde{D}(x, u)$, $D = D_\varphi(x)$. Según (*),

$$\begin{aligned} \varphi(x+u) &= \varphi(x) + \tilde{D}u \\ &= \varphi(x) + Du + (\tilde{D} - D)u \\ &= \varphi(x) + D[u + D^{-1}(\tilde{D} - D)u]. \end{aligned}$$

Utilizaremos la notación $Q(\delta) = \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_\infty \leq \delta\}$. Observamos que si $u \in Q(\delta)$, entonces

$$\|u + D^{-1}(\tilde{D} - D)u\| \leq \|u\| + \|D^{-1}\| \|(\tilde{D} - D)u\| \leq \|u\|(1 + C \frac{\varepsilon}{C}) = (1 + \varepsilon)\|u\|.$$

Se sigue que $0 < \delta_1 \leq \delta$, $u \in Q(\delta_1)$, $x, x+u \in Q \implies$

$$\varphi(x+u) \in \varphi(x) + (1 + \varepsilon)(D_\varphi(x)) \cdot Q(\delta_1). \quad (**)$$

Dividimos Q en cubos casi-disjuntos Q^j

$$Q = \bigcup_{j=1}^{k^n} Q^j,$$

de lado $2\delta_1 < 2\delta$. Sea x^j el centro de Q^j . Entonces $Q^j - x^j = Q(\delta_1)$. Según (**),

$$\varphi(Q^j) \subset \varphi(x^j) + (1 + \varepsilon)(D_\varphi(x^j)) \cdot (Q^j - x^j).$$

Luego

$$m(\varphi(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n \sum_{j=1}^{k^n} |J(x_j)| \cdot |Q_j|.$$

La parte de la derecha es la suma de Riemann asociada a la partición $\{Q_j\}_{j=1}^{k^n}$ de $|J(x)|$. Tomando particiones mas finas queda

$$m(\varphi(Q)) \leq (1 + \varepsilon)^n \int_Q |J(x)| dx;$$

como ε es arbitrario, obtenemos

$$m(\varphi(Q)) \leq \int_Q |J(x)| dx$$

Q.E.D.

4.6. Ejemplos del Teorema del cambio de variable

Nota: Todavía no hemos visto que $dm(x, y) = dx dy$ iterado (Teorema de Fubini), aunque lo usaremos eventualmente en estos ejemplos.

Coordenadas polares

Cambio de variables en coordenadas polares:

$$\varphi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

φ transforma el rectángulo $(0, \infty) \times (0, 2\pi)$ en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x > 0\}$.

Como $J_\varphi(r, \theta) = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right|$, se tiene $|J_\varphi(r, \theta)| = r$.

Por tanto, para f medible, $f \geq 0$ ó $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dm(x, y) = \int_{(0, \infty) \times (0, 2\pi)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \cdot r dm(r, \theta)$$

Ejemplos para los cuales es muy útil el cambio de coordenadas polares:

1. **Dominios circulares.****Ejemplo:**

Sea el dominio $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < R^2, x, y \geq 0\}$ y la función $f(x, y) = xy$.
Calculamos su integral en el dominio D :

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dx dy &= \int_{(0, R) \times (0, \frac{\pi}{2})} (r \cos \theta) \cdot (r \sin \theta) \cdot r dr d\theta \stackrel{Tma. Fubini}{=} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r^3 \cos \theta \sin \theta dr d\theta = \frac{R^4}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \sin \theta d\theta = \frac{R^4}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{R^4}{8} \end{aligned}$$

2. **Funciones circulares.****Ejemplo:**

Sea el dominio $D = \mathbb{R}^2$ y la función $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$. Calculamos su integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy &= \int_{(0, \infty) \times (0, 2\pi)} e^{-r^2} r dr d\theta \stackrel{Tma. Fubini}{=} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} d\theta = \pi. \end{aligned}$$

Coordenadas esféricas

Cambio de variables en coordenadas esféricas:

$$\varphi(\rho, \alpha, \beta) = \begin{cases} x = \rho \sin \beta \cos \alpha \\ y = \rho \sin \beta \sin \alpha \\ z = \rho \cos \beta \end{cases}$$

φ transforma el rectángulo $(0, \infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{conjunto de medida cero}\}$.

$$\text{Como } J_\varphi(\rho, \alpha, \beta) = \left| \begin{pmatrix} \sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \\ -\rho \sin \beta \sin \alpha & \rho \sin \beta \cos \alpha & 0 \\ \rho \cos \beta \cos \alpha & \rho \cos \beta \sin \alpha & -\rho \sin \beta \end{pmatrix} \right|, \text{ se tiene}$$

$$|J_\varphi(\rho, \alpha, \beta)| = |-(\rho^2 \cos^2 \beta \sin \beta + \rho^2 \sin^3 \beta)| = \rho^2 \sin \beta.$$

Por tanto, para f medible, $f \geq 0$ ó $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, el teorema nos dice entonces:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(\rho, \alpha, \beta) \cdot (\rho^2 \sin \beta) \, d\rho d\alpha d\beta$$

El cambio es útil de nuevo para funciones esféricas o regiones esféricas.

4.7. Medidas producto en general

En este apartado extendemos el caso particular de la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n a cualquier par de medidas. Sean (X, \mathcal{A}, μ) y (Y, \mathcal{B}, ν) dos espacios de medida. Dados $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{B}$, definimos el **rectángulo medible**

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

(convenio: $A \times \emptyset = \emptyset \times B = \emptyset$)

Al igual que en el caso de la medida de Lebesgue, se tiene:

LEMA 4.14 *La intersección de rectángulos es un rectángulo.*

Demostración:

Sean $A, A' \in \mathcal{A}$, $B, B' \in \mathcal{B}$, entonces

$$(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$$

Q.E.D.

LEMA 4.15 *La unión de un número finito de rectángulos medibles se puede escribir como la unión disjunta y finita de rectángulos medibles.*

Demostración:

Observamos primero que la diferencia de dos rectángulos es una unión finita disjunta de tres rectángulos:

$$(A \times B) \setminus (A' \times B') = (A \setminus A') \times (B \setminus B') \bigsqcup (A \cap A') \times (B \setminus B') \bigsqcup (A \setminus A') \times (B \cap B').$$

Ahora podemos aplicar inducción. La base de inducción (la afirmación para un rectángulo medible) es obvia. Hacemos el paso inductivo. Supongamos que la afirmación es cierta para $n - 1$ rectángulos y que tenemos n rectángulos R_1, \dots, R_{n-1}, R_n . Por la hipótesis inductiva, podemos encontrar una representación

$$R_1 \cup \dots \cup R_{n-1} = G_1 \cup \dots \cup G_m,$$

donde G_j son rectángulos. Luego

$$R_1 \cup \dots \cup R_n = (G_1 \setminus R_n) \bigsqcup (G_2 \setminus R_n) \bigsqcup \dots \bigsqcup (G_m \setminus R_n) \bigsqcup R_n.$$

Escribiendo cada uno de los conjuntos $G_j \setminus R_n$ como una unión disjunta de tres rectángulos, obtenemos la representación de $R_1 \cup \dots \cup R_n$ como unión de $3m + 1$ rectángulos disjuntos.

Q.E.D.**LEMA 4.16** *La familia*

$$\Pi_0 = \left\{ \bigcup_{j=1}^N (A_j \times B_j) : A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B} \right\}$$

es una Álgebra.

Demostración:

Solo hay que probar que Π_0 es cerrada por complementarios y como

$$\left(\bigcup_{j=1}^N A_j \times B_j \right)^c = \bigcap_{j=1}^N (A_j \times B_j)^c$$

por el lema 4.7 basta probarlo para un rectángulo $A \times B$:

$$\begin{aligned} (A \times B)^c &= (X \times Y) \setminus (A \times B) = (A \cup A^c) \times (B \cup B^c) \setminus (A \times B) = \\ &= (A \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A^c \times B^c) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Definición: Definimos, para un rectángulo medible, $R = A \times B$, $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$

$$\pi_0(R) = \pi_0(A \times B) = \mu(A)\nu(B),$$

si tanto $\mu(A)$ como $\nu(B)$ no son 0, y $\pi_0(R) = 0$ en caso contrario. Dado un elemento $U \in \Pi_0$, lo escribimos como unión disjunta de rectángulos (por el lema 4.8)

$$U = \bigsqcup_{j=1}^N (A_j \times B_j) \quad A_j \in \mathcal{A}, B_j \in \mathcal{B}$$

y definimos

$$\pi_0(U) = \sum_{j=1}^N \mu(A_j)\nu(B_j)$$

LEMA 4.17 π_0 está bien definida y es una premedida en Π_0

Demostración:

Solo hace falta probar si $A_j \in \mathcal{A}$ y $B_j \in \mathcal{B}$, con $j = 1, 2, \dots$ y se cumple

$$A \times B = \bigsqcup_{j \geq 1} (A_j \times B_j)$$

entonces

$$\pi_0(A \times B) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

A diferencia del caso de la medida de Lebesgue, aqui no podemos usar el Lema de Borel sobre compactos. En su lugar usaremos una versión débil de lo que luego será el Teorema de Fubini.

Primero observamos que:

$$\chi_A(x)\chi_B(y) = \chi_{A \times B}(x, y) = \sum_{j \geq 1} \chi_{A_j \times B_j}(x, y) = \sum_{j \geq 1} \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)$$

Fijamos $y \in B$ e integramos la función resultante (que depende de x) en μ . Por el corolario al Teorema de la Convergencia Monótona (para series positivas)

$$\mu(A)\chi_B(y) = \sum_{j \geq 1} \int_X \chi_{A_j}(x)\chi_{B_j}(y)d\mu(x) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)\chi_{B_j}(y)$$

Integrando ahora en $d\nu(y)$ y usando el mismo corolario

$$\mu(A)\nu(B) = \sum_{j \geq 1} \int \mu(A_j)\chi_{B_j}(y)d\nu(y) = \sum_{j \geq 1} \mu(A_j)\nu(B_j)$$

Q.E.D.

Notación: La mínima σ -álgebra que contiene a Π_0 , se denota por $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$.

Definición: El Teorema de Caratheodory nos permite extender $(X \times Y, \Pi_0, \pi_0)$ a un espacio de medida completo $(X \times Y, \Pi_0^*, \pi_0^* |_{\Pi_0^*})$.

En principio sólo estamos interesados en la σ -álgebra: $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ que es la σ -álgebra producto, y la extensión de π_0 a dicha σ -álgebra se denota por $d\mu \otimes d\nu$, medida producto.

Observación: Claramente se tiene:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} \subset \Pi_0 \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$$

pero, en general, $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ es MUCHO MAS GRANDE que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.

Nota: Algunos libros escriben $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ para denotar a la σ -álgebra producto pero esto es sólo por convenio. También se suele escribir $d\mu \times d\nu$ en vez de $d\mu \otimes d\nu$, o también $d(\mu \times \nu)$.

Producto de n medidas

Al igual que en el caso de la medida de Lebesgue n -dimensional, dados n espacios de medida $(X_1, \mathcal{A}_1, \mu_1), (X_2, \mathcal{A}_2, \mu_2), \dots, (X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)$ podemos definir la σ -álgebra producto $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ y la medida producto $d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes \dots \otimes d\mu_n$ como la extensión de Caratheodory de la premedida π_0 definida sobre el álgebra Π_0 de uniones finitas de rectángulos medibles

$$R = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \quad A_j \in \mathcal{A}_j \quad j = 1, 2, \dots, n$$

por

$$\pi_0(R) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2)\dots\mu_n(A_n)$$

Nota: En el caso en que $d\mu_1, \dots, d\mu_n$ sean todas σ -finitas, $d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes \dots \otimes d\mu_n$ también se puede definir por inducción de forma que

$$d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes d\mu_3 = (d\mu_1 \otimes d\mu_2) \otimes d\mu_3 = d\mu_1 \otimes (d\mu_2 \otimes d\mu_3)$$

y

$$d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes \dots \otimes d\mu_n = (d\mu_1 \otimes d\mu_2 \otimes \dots \otimes d\mu_{n-1}) \otimes d\mu_n$$

(Esto se sigue de que coinciden sobre el álgebra Π_0 .)

Capítulo 5

El Teorema de Fubini

Como en la demostración del Lema 410 sobre medidas producto queremos demostrar que la integral en el caso de medidas de este tipo se puede calcular como la iteración de las sucesivas integrales sobre cada variable. Para ello definimos antes la noción de sección:

Definición: Dado $E \subset X \times Y$ y fijado $x \in X$ se define la **x-sección de E** como

$$E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$$

De la misma forma, fijado $y \in Y$ se define la **y-sección de E** como

$$E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$$

Para una función $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ se define la **x-sección de f** , fijado $x \in X$,

$$\begin{aligned} f_x : Y &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longrightarrow f_x(y) = f(x, y) \end{aligned}$$

Análogamente se define la **y-sección de f** , fijado $y \in Y$,

$$\begin{aligned} f^y : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f^y(x) = f(x, y) \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 5.1 Sean (X, \mathcal{A}, μ) y (Y, \mathcal{B}, ν) dos espacios de medida,

1. Si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ y $x \in X$, $y \in Y$, entonces $E_x \in \mathcal{B}$, $E^y \in \mathcal{A}$.
2. Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ medible, entonces f_x es \mathcal{B} -medible y f^y es \mathcal{A} -medible, $\forall x \in X$ y $\forall y \in Y$.

Demostración:

(1) Definimos

$$\mathcal{R} = \{E \subset X \times Y : E_x \in \mathcal{B}, E^y \in \mathcal{A} \forall x \in X, \forall y \in Y\}$$

\mathcal{R} contiene a los rectángulos porque si $E = A \times B$

$$E_x = \begin{cases} B, & \text{si } x \in A \\ \emptyset, & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad E^y = \begin{cases} A, & \text{si } y \in B \\ \emptyset, & \text{si } y \notin B \end{cases}$$

Además \mathcal{R} es una σ -álgebra porque

$$\left(\bigcup_j E_j \right)_x = \bigcup_j (E_j)_x, \quad \left(\bigcup_j E_j \right)^y = \bigcup_j (E_j)^y$$

y (**Ejercicio**):

$$(E^c)_x = (E_x)^c, \quad (E^c)^y = (E^y)^c$$

Lo que implica que si $E_j \in \mathcal{R} \forall j$ entonces $\cup E_j \in \mathcal{R}$ y si $E \in \mathcal{R}$, $E^c \in \mathcal{R}$. Así que se tiene

$$\mathcal{R} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B},$$

por ser la mínima σ -álgebra que contiene a los rectángulos.

(2) Si observamos que (**Ejercicio**)

$$(f_x)^{-1}([a, b]) = (f^{-1}([a, b]))_x, \quad (f^y)^{-1}([a, b]) = (f^{-1}([a, b]))^y$$

el resultado se sigue del apartado (1).

Q.E.D.

Nota: Supongamos que $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es medible y positiva. La proposición nos dice que f_x es medible y, como sigue siendo positiva, la podemos integrar en $y(d\nu)$, podemos definir

$$g(x) = \int_Y f_x(y) d\nu(y)$$

De la misma forma f^y es medible y positiva, así, podemos definir

$$h(y) = \int_X f^y(x) d\mu(x)$$

El siguiente resultado nos dirá que tanto g como h son medibles (y positivas) y además

$$\int_X g(x) d\mu(x) = \int_Y h(y) d\nu(y) = \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y)$$

si μ y ν son σ -finitas.

5.1. Teorema de Fubini

TEOREMA 5.2 Sea (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) dos espacios de medida σ -finitos

1. Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es medible, y positiva, entonces las funciones:

$$x \rightarrow g(x) = \int_Y f_x d\nu$$

$$y \rightarrow h(y) = \int_X f^y d\mu$$

son medibles y además se tiene:

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

2. Si $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es integrable (i.e., $f \in L^1(d(\mu \times \nu))$) entonces $f_x \in L^1(d\nu)$ c.t.p. $x \in X$, $f^y \in L^1(d\mu)$ c.t.p. $y \in Y$, las funciones $g(x)$ y $h(y)$ se pueden definir en c.t.p. $x \in X$, c.t.p. $y \in Y$ y son integrables ($g \in L^1(d\mu)$, $h \in L^1(d\nu)$). Además se cumple

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

Demostración del teorema de Fubini:

Como en ocasiones anteriores, veamos que el resultado se deduce del caso particular en que $f = \chi_E$ para algún $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Es decir, se tiene la siguiente proposición:

PROPOSICIÓN 5.3 Sea (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) dos espacios de medida σ -finitos y si $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, entonces las funciones :

$$x \rightarrow \nu(E_x)$$

$$y \rightarrow \mu(E^y)$$

son medibles en X e Y respectivamente y además se tiene:

$$\mu \times \nu(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y).$$

Supuesta cierta la proposición, tenemos que

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

es cierto para $f = \chi_E$, $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$. Por linealidad es cierto para funciones simples positivas. Para una f medible positiva elegimos una sucesión creciente de funciones simples

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq \dots \rightarrow f$$

Sean

$$g_n(x) = \int s_n(x, y) d\nu(y), \quad h_n(y) = \int s_n(x, y) d\mu(x)$$

Cada g_n y h_n es medible; $\dots \leq g_n \leq g_{n+1} \leq \dots$; $\dots \leq h_n \leq h_{n+1} \leq \dots$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x), \quad \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(y) = h(y)$$

Luego g, h son medibles por ser el límite de medibles; por el T.C.M, finalmente se tiene

$$\begin{aligned} \int g(x) d\mu(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(\mu \times \nu) = \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \int h(y) d\nu(y) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n(y) d\nu(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} s_n(x, y) d(\mu \times \nu) = \\ &= \int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu) \end{aligned}$$

Esto nos da el apartado 1.

Además si la integral de f es finita entonces $g(x) < \infty$ c.t.p. x , y $h(y) < \infty$ c.t.p. y . Por tanto $f_x \in L^1(d\nu)$ c.t.p. x , $f^y \in L^1(d\mu)$ c.t.p. y .

El apartado (2) se deduce de aplicar el apartado anterior a las funciones positivas e integrables f^+, f^- (con $f = f^+ - f^-$)

Q.E.D.

Demostración de la proposición (Fubini para $f = \chi_E$):

Antes necesitamos la siguiente definición ...

5.2. Clases monótonas

Definición: Se dice que $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$ es una **clase monótona** si es cerrada por uniones crecientes y por intersecciones decrecientes, esto es

$$E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_m \subset \dots \in \mathcal{C} \implies \bigcup_{m \geq 1} E_m \in \mathcal{C},$$

$$E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_m \supset \dots \in \mathcal{C} \implies \bigcap_{m \geq 1} E_m \in \mathcal{C},$$

... y el siguiente lema

LEMA 5.4 Si Π_0 es una álgebra y \mathcal{C} es una clase monótona con $\Pi_0 \subset \mathcal{C}$, entonces, la mínima σ -álgebra que contiene a Π_0 ($\sigma(\Pi_0)$) está contenida en \mathcal{C} .

Por ser medidas σ -finitas, $\exists X_1 \subset \dots \subset X_m \subset X_{m+1} \subset \dots$; $X_m \in \mathcal{A} \forall m$ con

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m = X \quad y \quad \mu(X_m) < \infty$$

$\exists Y_1 \subset \dots \subset Y_m \subset Y_{m+1} \subset \dots$; $Y_m \in \mathcal{B} \forall m$ con

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m = Y \quad y \quad \nu(Y_m) < \infty$$

Entonces $X_1 \times Y_1 \subset \dots \subset X_m \times Y_m \subset X_{m+1} \times Y_{m+1} \subset \dots$; $X_m \times Y_m \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \forall m$ con

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m \times Y_m = X \times Y \quad y \quad d(\mu \times \nu)(X_m \times Y_m) = \mu(X_m)\nu(Y_m) < \infty$$

Basta demostrar el resultado para $E \subset X_m \times Y_m$ (para un cierto m) o, si no lo son, aplicarlo a $E \cap (X_m \times Y_m)$ y luego usar el T.C.M.

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\mu(X) < \infty$ y $\nu(Y) < \infty$.

Sea \mathcal{C} la clase de subconjuntos medibles (de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$) que cumplen el resultado de la proposición. Es decir, dado $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ se tiene :

$E \in \mathcal{C} \iff x \longrightarrow \nu(E_x)$ e $y \longrightarrow \mu(E^y)$ son medibles y

$$d(\mu \times \nu)(E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

Se tiene entonces :

1. \mathcal{C} contiene a los rectángulos medibles:

$$E = A \times B, \quad A \in \mathcal{A}, \quad B \in \mathcal{B};$$

$$E_x = \begin{cases} B, & x \in A \\ \emptyset, & x \notin A \end{cases}, \quad E^y = \begin{cases} A, & y \in B \\ \emptyset, & y \notin B \end{cases}$$

$$\nu(E_x) = \nu(B)\chi_A(x) \quad \mu(E^y) = \mu(A)\chi_B(y)$$

$$\int \nu(E_x) d\mu(x) = \nu(B)\mu(A), \quad \int \mu(E^y) d\nu(y) = \mu(A)\nu(B)$$

2. Por aditividad, \mathcal{C} contiene al álgebra Π_0 de uniones disjuntas finitas de rectángulos medibles.

3. \mathcal{C} es una clase monótona (*este es el único lugar donde se utiliza la σ -finitud*).

CONCLUSIÓN: $\mathcal{C} \supset \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (y por tanto se cumple la proposición).

Solo falta por probar 3.

Sean $E_1 \subset E_2 \subset \dots \subset E_n \subset E_{n+1} \subset \dots$; $E_n \in \mathcal{C} \forall n$. Queremos ver que

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{C}$$

Se tiene

$$E_x = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)_x \quad y \quad E^y = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E_n)^y$$

Como la unión es creciente, por el T.C.M.

$$\nu(E_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \nu[(E_n)_x] \quad y \quad \mu(E^y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu[(E_n)^y]$$

Como cada función

$$x \longrightarrow \nu[(E_n)_x], \quad y \quad y \longrightarrow \mu[(E_n)^y]$$

es medible por hipótesis, las funciones

$$x \longrightarrow \nu(E_x), \quad y \quad y \longrightarrow \mu(E^y)$$

también son medibles, por ser límite de medibles. Además, como el límite es creciente, el T.C.M. nos da de nuevo

$$\int_X \nu(E_x) d\mu(x) =_{\star_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \nu[(E_n)_x] d\mu(x) =_{\star_2} \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu \times \nu)(E_n) =_{\star_3} d(\mu \times \nu)(E)$$

de forma semejante

$$\int_Y \mu(E^y) d\nu(y) =_{\star_1} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_Y \mu[(E_n)^y] d\nu(y) =_{\star_2} \lim_{n \rightarrow \infty} d(\mu \times \nu)(E_n) =_{\star_3} d(\mu \times \nu)(E)$$

donde: $\star_1, \star_3 =$ por el T.C.M.; $\star_2 =$ porque $E_n \in \mathcal{C}$.

Obsérvese que hasta ahora no hemos usado el que las medidas μ y ν son finitas. Lo usaremos a continuación.

Sean $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \dots$, $F_n \in \mathcal{C}$, $\forall n$. queremos ver ahora que

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{C}$$

El argumento es el mismo que en el caso anterior:

$$F_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)_x \quad y \quad F^y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (F_n)^y$$

con intersecciones decrecientes en ambos casos.

La única diferencia es que para usar el T.C.M. "decreciente" debemos asegurarnos de que el primer término en cada caso es finito, lo cual se sigue de

$$\nu(F_1)_x \leq \nu(Y) < \infty \quad ; \quad \mu[(F_1)^y] \leq \mu(X) < \infty$$

y

$$\int_X \nu[(F_1)_x] d\mu(x) \leq \int_X \nu(Y) d\mu(x) \leq \nu(Y)\mu(X) < \infty$$

$$\int_Y \mu[(F_1)^y] d\nu(y) \leq \int_Y \mu(X) d\nu(y) \leq \mu(X)\nu(Y) < \infty$$

Q.E.D.

Para concluir la demostración del Teorema de Fubini, solo falta dar la demostración del Lema de Clases monótonas.

Demostración del Lema de las Clases monótonas:

Es fácil ver que "la intersección de las clases monótonas es una clase monótona", por tanto, podemos hablar de la clase monótona más pequeña que continene a Π_0 , que la denotamos por \mathcal{C}_0 .

$$\Pi_0 \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$$

Probamos que \mathcal{C}_0 es una álgebra y, por ser cerrada por uniones crecientes es por tanto una σ -álgebra; de donde se deduce

$$\sigma(\Pi_0) \subset \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}$$

Ejercicio: Probar que $\sigma(\Pi_0) = \mathcal{C}_0$.

Dado $A \in \mathcal{C}_0$ sea $\mathcal{C}_0(A) = \{B \in \mathcal{C}_0 : A \cup B \text{ y } (A \cup B)^c \text{ están en } \mathcal{C}_0\}$ se tiene entonces:

1. $B \in \mathcal{C}_0(A) \iff A \in \mathcal{C}_0(B)$ (Obvio)
2. $\mathcal{C}_0(A)$ es una clase monótona. **Ejercicio**
3. Si $A \in \Pi_0$, $\Pi_0 \subset \mathcal{C}_0(A)$ (Obvio por ser Π_0 una álgebra) Por 2 y 3 se sigue que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0(A) \forall A \in \Pi_0$, es decir
4. $\forall B \in \mathcal{C}_0, \forall A \in \Pi_0, B \in \mathcal{C}_0(A)$ y por el apartado 1 esto es equivalente a $\forall B \in \mathcal{C}_0, \forall A \in \Pi_0$ se tiene $A \in \mathcal{C}_0(B)$ o lo que es lo mismo, $\forall B \in \mathcal{C}_0, \Pi_0 \subset \mathcal{C}_0(B)$

De 4. se deduce que $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_0(B), \forall B \in \mathcal{C}_0$ y por tanto \mathcal{C}_0 es una álgebra porque

- Si $A, B \in \mathcal{C}_0, A \in \mathcal{C}_0(B)$ y por tanto $A \cup B \in \mathcal{C}_0$
- Si $A \in \mathcal{C}_0, A \in \mathcal{C}_0(X)$ y por tanto $A^c \in \mathcal{C}_0$

Q.E.D.

5.3. Algunas observaciones y aplicaciones del Teorema de Fubini

- Podemos usarlo para determinar que una función no es integrable (integrales iteradas distintas, implica que la función $\notin L^1$).

Ejemplo: $X = Y = [0, 1]$, $d\mu = d\nu = dx$ (medida de Lebesgue)

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad 0 \leq x, y \leq 1.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \frac{1}{x^2} \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^2} dy \stackrel{\frac{y}{x} = \tan u}{=} \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} \frac{1 - \tan^2 u}{(1 + \tan^2 u)^2} \frac{du}{\cos^2 u} \\ &= \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} (\cos^2 u - \sin^2 u) du = \frac{1}{x} \int_0^{\arctan(\frac{1}{x})} \cos 2u du = \frac{\sin(2 \arctan(\frac{1}{x}))}{2x} = \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

(Basta poner $z = 2 \arctan(\frac{1}{x})$ y observar que

$$\sin z = 2 \frac{\tan(z/2)}{1 + \tan^2(z/2)} = 2 \frac{\frac{1}{x}}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

Por simetría obtenemos

$$\int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 -f(y, x) dx = \frac{-1}{1 - y^2}.$$

Por tanto,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{4},$$

mientras que,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \frac{-1}{1 + x^2} dx = \frac{-\pi}{4}.$$

- Podemos usarlo para aprovechar simetrías e integrar fácilmente.

Ejemplo: $X = Y = [0, 1]$, $d\mu = d\nu = dx$

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq f(x, y) \leq 1.$$

f es positiva, luego, se puede integrar.

Además,

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{y^2}{x^2 + y^2} = 1 - f(y, x),$$

por tanto

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy = \int_0^1 \int_0^1 1 dx dy - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(y, x) dx \right) dy = \\ &= 1 - \int_0^1 \left(\int_0^1 f(y, x) dy \right) dx = 1 - I. \end{aligned}$$

Luego $I = 1 - I$ (I no puede ser ∞ claramente).

Despejando queda

$$2I = 1 \implies \iint_{[0,1] \times [0,1]} f(x, y) dx dy = \frac{1}{2}.$$

3. Otro ejemplo más sencillo es calcular la integral de $f(x, y) = e^{-x^2}$ en el triángulo D de vértices $(0, 0); (1, 0); (1, 1)$.

Esto nos dice que $\chi_D(x, y) = \chi_{[0,1]}(y) \cdot \chi_{[y,1]}(x)$

$$\begin{aligned} \int_D \int f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \left(\int_y^1 e^{-x^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{-x^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{e} \right). \end{aligned}$$

4. El T.C.M., en un espacio σ -finito, es un caso particular del Teorema de Fubini:

Sean $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$ medibles y sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Queremos probar

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Llamando $g_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ y con $f_0(x) = 0$, se tiene

$$\sum_{n=1}^N g_n(x) = f_N(x),$$

y, por tanto

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) = f(x) \quad \forall x.$$

De aquí se deduce que $\int_X f(x)d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x)d\mu(x)$ es equivalente a probar

$$\begin{aligned} \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_X \left(\sum_{n=1}^N g_n(x) \right) d\mu(x) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \left(\int_X g_n(x)d\mu(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x)d\mu(x) \right), \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x)d\mu(x) \right).$$

Esto es el Teorema de Fubini en el espacio producto $(X \times \mathbb{N}; d(\mu \times \nu))$ con $d\nu \equiv$ medida de contar en \mathbb{N} , definiendo,

$$G(x, n) = g_n(x), \quad x \in X;$$

y observando que las integrales iteradas de G son

$$\int_X \left(\int_{\mathbb{N}} G(x, n)d\nu(n) \right) d\mu(x) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} G(x, n) \right) d\mu(x) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu(x),$$

y

$$\int_{\mathbb{N}} \left(\int_X G(x, n)d\mu(x) \right) d\nu(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X G(x, n)d\mu(x) \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x)d\mu(x) \right).$$

Ambas integrales coinciden por ser G medible y positiva :

$$G(x, n) = f_n(x) - f_{n-1}(x) \geq 0.$$

5. El T.C.D. para series también es consecuencia del Teorema de Fubini:

Sean $g_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ medibles, tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| \in L^1(d\mu(x)).$$

Entonces

$$\int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x) \right) d\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_X g_n(x)d\mu(x) \right).$$

El argumento es similar al anterior, observando ahora que las integrales iteradas coinciden porque

$$G(x, n) = g_n(x) \in L^1(d(\mu \times \nu)),$$

ya que

$$\int_{X \times \mathbb{N}} |G(x, n)| d(\mu \times \nu) = \int_X \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(x)| d\mu(x) \right) < \infty.$$

Capítulo 6

Medidas y derivadas

En este capítulo estudiaremos la relación que existe entre integración y derivación y determinaremos en qué sentido una operación es la inversa de la otra.

Recordamos primero algunos resultados clásicos de la integración Riemann:

- Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ acotada e integrable Riemann. Entonces, la función

$$F(x) = \int_a^x f(u)du \quad \text{es continua.}$$

TEOREMA 6.1 (Teorema Fundamental del cálculo, Newton-Leibniz) -

1. Sean f y F como en el apartado 1. Si f es continua en x_0 , entonces F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

2. Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, de clase C^1 . Entonces se tiene: $F(a) + \int_a^x F'(u)du = F(x)$.

6.1. Derivación dentro del signo integral

TEOREMA 6.2 Sean (X, \mathcal{M}, μ) un espacio de medida y $f : X \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Supongamos que $f^t \in L^1(d\mu) \forall t$ y definamos

$$F(t) = \int_X f^t(x)d\mu(x) = \int_X f(x, t)d\mu(x).$$

1. Si f_x es continua en $t_0 \forall x$, y $\exists g \in L^1(d\mu)$ tal que $|f^t(x)| \leq g(x), \forall x, \forall t$, entonces F es continua en t_0 .
2. Si $\exists \frac{\partial f}{\partial t} \forall t$ y $\exists g \in L^1(d\mu)$ con $|\frac{\partial f}{\partial t}| \leq g(x) \forall t, \forall x$, entonces $\exists F'(t)$ y se tiene:

$$F'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_X f(x, t)d\mu(x) \right) = \int_X \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} d\mu(x).$$

La demostración en ambos casos es una consecuencia del T.C.D.

Demostración:

1. Sea $\{t_n\}$ una sucesión arbitraria que converge a t_0 . Definimos $g_n(x) = f^{t_n}(x)$. Si f_x es continua en t_0 , $\forall x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x, t_n) = f(x, t_0) \quad \forall x$$

Como además $|g_n(x)| \leq g(x) \in L^1(d\mu)$, $\forall n$, por el TCD,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X g_n(x) d\mu(x) \stackrel{T.C.D.}{=} \int_X f(x, t_0) d\mu(x) = F(t_0)$$

luego F es continua en t_0 .

2. Sea de nuevo $t_n \rightarrow t_0$ arbitraria ($t_n \neq t_0$), definimos:

$$h_n(x) = \frac{f(x, t_n) - f(x, t_0)}{t_n - t_0}$$

h_n es medible y $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$, que es medible.

Por el teorema del valor medio, $\forall x$, $\exists s$ tal que $h_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, s)$ y, por hipótesis, deducimos $|h_n(x)| \leq g(x) \quad \forall n \forall x$.

Aplicando de nuevo el TCD, concluimos,

$$F'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X h_n(x) d\mu(x) \stackrel{T.C.D.}{=} \int_X \frac{\partial}{\partial t} f(x, t_0) d\mu(x).$$

Q.E.D.

6.2. El Teorema de diferenciación de Lebesgue

Veamos a continuación la extensión natural del apartado 1 del Teorema Fundamental del Cálculo

TEOREMA 6.3 (Teorema de diferenciación de Lebesgue) *Si $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ y definimos $F(x) = \int_a^x f(u) du$, entonces F es diferenciable en casi todo punto con respecto a la medida de Lebesgue [escribimos c.t.p. (dx)] y además $F'(x) = f(x)$ en c.t.p. (dx) .*

DEFINICIÓN 6.1 *Dada $f \in L^1(d\mu)$ se define el conjunto de puntos de Lebesgue de f , denotado \mathcal{L}_f , como:*

$$\mathcal{L}_f = \left\{ x_0 \in \mathbb{R} : \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} |f(u) - f(x_0)| du = 0 \right\}$$

Ejercicio: Probar que si f es continua entonces $\mathcal{L}_f = \mathbb{R}$ (es decir, todo $x_0 \in \mathbb{R}$ es punto de Lebesgue de una función continua).

Demostración del Teorema de diferenciación de Lebesgue.

Se trata de probar que

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(u) du = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x f(u) du = f(x) \quad \text{c.t.p. } (dx),$$

pero esto es lo mismo que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x)) du = 0 \quad \text{c.t.p. } (dx),$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_{x-h}^x (f(u) - f(x)) du = 0 \quad \text{c.t.p. } (dx).$$

Como

$$\left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} (f(u) - f(x)) du \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du,$$

$$\left| \frac{1}{h} \int_{x-h}^x (f(u) - f(x)) du \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du,$$

el resultado se sigue de probar que la medida de Lebesgue de \mathcal{L}_f^c es cero ($|\mathcal{L}_f^c| = 0$); es decir, que c.t.p. x es punto de Lebesgue de f .

Sea, para $h > 0$,

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

Queremos ver que

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) = 0, \quad \text{c.t.p. } x$$

(y el resultado es cierto, por el ejercicio anterior, para funciones continuas, $\forall x$.)

Como

$$\left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \frac{1}{n} \right\},$$

basta probar que dado $\lambda > 0$ cualquiera, el conjunto

$$A_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R} : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > \lambda \right\},$$

tiene medida cero.

Para ello definimos el siguiente **Operador de Hardy-Littlewood**:

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{h>0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u)| du,$$

y usaremos los siguientes resultados:

TEOREMA 6.4 (Desigualdad de Hardy-Littlewood) Si $f \in L^1$ y $\lambda > 0$, se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{2}{\lambda} \int |f(x)| dx.$$

LEMA 6.5 (Aproximación por funciones continuas) Si $f \in L^1(\mathbb{R}, dx)$, dado $\varepsilon > 0$, $\exists g \in L^1(\mathbb{R}, dx)$ continua, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Para terminar con la demostración del teorema de diferenciación de Lebesgue, tomamos una función continua (e integrable) g cualquiera. Se tiene

$$m_h(f)(x) \leq \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - g(u)| du + \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |g(u) - g(x)| du + |g(x) - f(x)|.$$

Tomando límites

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) \leq \mathcal{M}(f - g)(x) + |f(x) - g(x)|.$$

Por tanto

$$A_\lambda \subset \left\{ x \in \mathbb{R} : \mathcal{M}(f - g) > \frac{\lambda}{2} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} : |f(x) - g(x)| > \frac{\lambda}{2} \right\}.$$

Usando las desigualdades de Hardy-Littlewood y Chebychev

$$|A_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda/2} \int |f - g| dx + \frac{1}{\lambda/2} \int |f - g| dx = \frac{6}{\lambda} \int |f - g| dx$$

y esto para cualquier función g continua e integrable. Usando ahora el lema de aproximación, dado $\varepsilon > 0$, elegimos g continua e integrable tal que

$$\int |f - g| dx \leq \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{6}$$

De esta forma obtenemos $|A_\lambda| \leq \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, y por tanto $|A_\lambda| = 0$.

Q.E.D.

Demostración de la desigualdad de Hardy-Littlewood.

Si $\mathcal{M}f(x) > \lambda$, entonces existe un intervalo abierto I centrado en x ($I = (x - h, x + h)$) tal que

$$(\star) \quad \frac{1}{|I|} \int_I |f| du > \lambda.$$

(En particular $|I| < \frac{1}{\lambda} \int_I |f| du$).

Por tanto

$$\{x : \mathcal{M}f(x) > \lambda\} \subset \bigcup \left\{ I : \frac{1}{|I|} \int_I |f| du > \lambda \right\} = D_\lambda,$$

y basta probar $|D_\lambda| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du$.

Como la medida de Lebesgue es regular, es suficiente probar que para todo K , compacto, $K \subset D_\lambda$, se tiene

$$|K| \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du.$$

Pero si $K \subset D_\lambda$ es compacto, existe un número finito de intervalos I_1, I_2, \dots, I_N que cumplen (\star) y tales que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^N I_j.$$

Podemos suponer que ningún I_j está contenido en la unión de los otros. Además los ordenamos de forma que si $I_j = (a_j, b_j)$ entonces $a_1 < a_2 < \dots < a_N$.

Es fácil ver que en esta situación las familias $\{I_j\}_j$, j par e $\{I_j\}_j$, j impar, son de intervalos disjuntos. Deducimos entonces que cada punto $x \in \mathbb{R}$ está como mucho en dos intervalos I_j , es decir $\sum_{j=1}^N \chi_{I_j}(x) \leq 2$

Finalmente

$$|K| \leq \sum_{j=1}^N |I_j| \leq \sum_{j=1}^N \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| du = \frac{1}{\lambda} \int_{I_j} |f| \sum_{j=1}^N \chi_{I_j}(u) du \leq \frac{2}{\lambda} \int_{\mathbb{R}} |f| du, \quad \mathbf{q.e.d.}$$

Demostración del lema de aproximación por funciones continuas.

Sea $f \in L^1(dx)$. Podemos suponer que $f \geq 0$ (en caso contrario, aplicamos el resultado a cada una de las funciones f^+ , f^-).

Sabemos que entonces f es un límite de funciones simples positivas $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \dots \leq s_n \leq s_{n+1} \leq \dots \rightarrow f$ de forma que $\int f dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int s_n dx$ y por tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe una función simple $0 \leq s \leq f$ tal que

$$\int |f - s| dx = \int (f - s) dx = \int f dx - \int s dx < \varepsilon.$$

Así que basta aproximar funciones simples por continuas y, por consiguiente, basta aproximar funciones características de medibles por funciones continuas porque si $s = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{A_j}$ es simple, con χ_{A_j} integrable ($|A_j| < \infty$) y g_j es una función continua que aproxima bien a χ_{A_j} entonces $\sum_{j=1}^N c_j g_j(x)$ es una función que aproxima bien a s .

Queremos probar entonces que si A es medible Lebesgue, $|A| < \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe una función continua g tal que

$$\int |\chi_A(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Como la medida de Lebesgue es regular, para cada $\varepsilon > 0$, $\exists U$ abierto, K compacto, tales que $K \subset A \subset U$ y $|U \setminus K| < \varepsilon$. Veamos que existe una función continua g tal que

$$\begin{cases} 0 \leq g(x) \leq 1, & \forall x \\ g(x) = 1, & x \in K \\ g(x) = 0, & x \in U \end{cases}$$

es decir, $\chi_K(x) \leq g(x) \leq \chi_U(x)$. De aquí se deduce $|\chi_A(x) - g(x)| \leq \chi_U(x) - \chi_K(x)$ y por tanto

$$\int |\chi_A(x) - g(x)| dx \leq |U \setminus K| < \varepsilon.$$

Para construir g , observamos que K está contenido en un número finito de componentes conexas de U ; digamos

$$K \subset \bigcup_{l=1}^m J_l$$

J_l intervalo abierto. Elegimos entonces intervalos cerrados K_l tales que $K \cap J_l \subset K_l \subset J_l$, $\forall l = 1, 2, 3, \dots$. Basta definir entonces

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \bigcup_{l=1}^m K_l \\ 0, & x \notin \bigcup_{l=1}^m J_l \\ \text{interpolación lineal en el resto} \end{cases}$$

Q.E.D.

Comentarios al Teorema de diferenciación de Lebesgue

DEFINICIÓN 6.2 Se dice que una función medible, $f(x)$ es **Localmente integrable** si para todo conjunto acotado D , $f\chi_D$ (la restricción de f a D) es integrable. Escribiremos $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dx)$.

Ejemplo: $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ son funciones localmente integrables pero no integrables.

Observación: El teorema de diferenciación de Lebesgue es cierto también para funciones localmente integrables.

Demostración:

Basta probar que si $f \in L^1_{loc}$, $\forall R$ el conjunto

$$\left\{ x \in (-R, R) : \limsup_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) > 0 \right\},$$

tiene medida cero, donde

$$m_h(f)(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} |f(u) - f(x)| du.$$

Si llamamos $\tilde{f} = f\chi_{[-2R, 2R]}$, entonces $\tilde{f} \in L^1$ y $\forall x \in (-R, R)$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m_h(f)(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} m_h(\tilde{f})(x) = 0 \quad \text{c.t.p.}$$

por el teorema habitual.

Q.E.D.

TEOREMA 6.6 (Teorema de diferenciación en \mathbb{R}^n) Si $f \in L^1(\mathbb{R}^n, dx)$ entonces

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} f(y) dy = f(x) \quad \text{c.t.p.}$$

donde $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$ (bola de radio r centrada en x).

La demostración sigue los mismos pasos que en dimensión $n = 1$, incluida la

Desigualdad de Hardy-Littlewood en \mathbb{R}^n :

Sea

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{B_r(x)} |f(u)| du.$$

Entonces $\forall \lambda > 0$ se tiene

$$|\{x \in \mathbb{R}^n : \mathcal{M}f(x) > \lambda\}| \leq \frac{3^n}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx.$$

6.3. 2º Teorema Fundamental del Cálculo

Recordemos que el 2º Teorema Fundamental del Cálculo para la integral de Riemann (ver Spivak, Cap. 14) dice lo siguiente

TEOREMA 6.7 Sea $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable $\forall x \in [a, b]$. Si F' es integrable Riemann, entonces

$$(*) \quad F(x) = F(a) + \int_a^x F'(u) du.$$

Observación: Si F' existe $\forall x$, entonces F es continua $\forall x$. En el Teorema sólo es necesario que $F'(x)$ exista $\forall x \in (a, b)$ y que sea continua en a y b (para usar el Teorema del Valor Medio).

Es importante que $F'(x)$ exista $\forall x$ y no salvo algún punto. Por ejemplo

$$H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

cumple $H'(x) = 0 \forall x \neq 0$ pero $H(x) - H(a) \neq \int_a^x H'(y) dy$ si, por ejemplo, $a < 0 < x$.

Las funciones que cumplen el cometido (*) de este 2º Teorema Fundamental del Cálculo en la integral de Lebesgue son las siguientes:

DEFINICIÓN 6.3 Se dice que F es **Absolutamente continua**, escribimos $F \in AC$; si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que toda colección de intervalos disjuntos $\{I_j\}_{j \geq 1}$, $I_j = (a_j, b_j)$ con $\sum_{j \geq 1} |I_j| < \delta$, cumple

$$\sum_{j \geq 1} |F(b_j) - F(a_j)| < \varepsilon.$$

Se dice que F es **Localmente absolutamente continua**, escribimos $F \in AC_{loc}$ si $F \chi_D \in AC \forall D$ conjunto medible acotado.

Ejemplos:

1. Si F tiene derivada $\forall x$, acotada ($|F'(\xi)| \leq C \forall \xi$) entonces $F \in AC$ por el Teorema del Valor Medio $|F(b_j) - F(a_j)| \leq C|b_j - a_j|$.
2. Si F es AC, entonces F es uniformemente continua (i.e., $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, tal que $\forall x, y$ con $|x - y| < \delta$, se tiene $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$). Basta coger un intervalo solo $I_1 = (x, y)$ en la definición de AC.
3. $F(x) = x^2$ no es uniformemente continua en \mathbb{R} , luego tampoco es AC. Sin embargo $F \in AC_{loc}$ (porque $F'(x) = 2x$ está localmente acotada).
4. Construimos una función $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua (por tanto, uniformemente continua, por ser $[0, 1]$ compacto) pero tal que $F \notin AC_{loc}$. Para ello sea

$$F\left(\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ par} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ impar.} \end{cases}$$

con $n = 1, 2, 3, \dots$, y se define $F(x)$ por interpolación a partir de estos puntos. Tomando $I_j = (\frac{1}{j+1}, \frac{1}{j})$ se tiene $\forall N$

$$\sum_{j=N}^{\infty} |I_j| = \frac{1}{N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

pero

$$\sum_{j=N}^{\infty} \left| F\left(\frac{1}{j}\right) - F\left(\frac{1}{j+1}\right) \right| = \sum_{m=N}^{\infty} \frac{1}{m} = \infty$$

con m par y $\forall N$.

Ejercicio: Probar que $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = 0$, que $F'(x)$ existe $\forall x \neq \frac{1}{n}, 0$ y que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |F'(x)| = \infty,$$

tomando en el límite $x \neq \frac{1}{n}$.

5. Función de Cantor - Lebesgue

Como ya hemos visto, se trata de una función como la anterior, $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, que es continua, que además cumple F creciente y $F'(x)$ existe c.t.p. y vale 0 pero $F \notin AC$. **Ejercicio:** Probar la afirmación $F \notin AC$.

6. Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ entonces $F \in AC_{loc}$.

Este es el ejemplo clave para entender cuándo una función F es (localmente) absolutamente continua. De hecho es el único ejemplo, como nos muestra el siguiente Teorema

TEOREMA 6.8 (2º Tma. Fundamental del Cálculo para la Teoría de Lebesgue)

Las afirmaciones siguientes son equivalentes

(a) $F \in AC_{loc}$

(b) $\exists f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt, \forall x, a \in \mathbb{R}$. Además, en cualquiera de las dos situaciones anteriores, se tiene

(c) F tiene derivada en c.t.p. $F' \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ y $F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt, \forall x, a$

Demostración:

La implicación $b \Rightarrow c$ se sigue del teorema de diferenciación de Lebesgue, porque si $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces F es derivable c.t.p. y $F'(x) = f(x)$ c.t.p. por tanto $F' \in L^1_{loc}$. Como claramente $c \Rightarrow b$, sólo necesitamos probar $a \Leftrightarrow b$.

Probaremos primero la afirmación del ejemplo 6 (que corresponde a la implicación $b \Rightarrow a$).

Demostración de $b \Rightarrow a$:

Si $F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$ entonces dada una colección de intervalos disjuntos $\{I_j\}$, $I_j = (a_j, b_j)$ con $\cup I_j \subset [-R, R]$ se tiene

$$\sum_{j \geq 1} |F(b_j) - F(a_j)| = \sum_{j \geq 1} \left| \int_{a_j}^{b_j} f(t)dt \right| \leq \sum_{j \geq 1} \int_{a_j}^{b_j} |f(t)|dt = \int_{\cup I_j} |f(t)|dt.$$

Necesitamos entonces probar el siguiente resultado para terminar la demostración:

(*) Si $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$, entonces $\forall R \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si E es medible, $E \subset [-R, R]$ y $|E| < \delta$, se tiene $\int_E |f(t)|dt < \varepsilon$.

DEFINICIÓN 6.4 Dadas dos medidas, ν y μ definidas sobre una misma σ -álgebra, \mathcal{M} , decimos que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ (escribimos $\nu \ll \mu$) si $\forall E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) = 0$, se tiene $\nu(E) = 0$.

Ejemplo: Si $g \in L^1(d\mu)$ y $\nu = |g|d\mu$ (es decir $\nu(A) = \int_A |g|d\mu, \forall A \in \mathcal{M}$) entonces ν es una medida (finita) absolutamente continua con respecto a μ (porque $\mu(E) = 0 \implies \int_E |g|d\mu = 0$).

PROPOSICIÓN 6.9 Si μ y ν son medidas en \mathcal{M} , $\nu \ll \mu$ y ν es finita entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{M}$ y $\mu(E) < \delta$, se tiene $\nu(E) < \varepsilon$.

Para terminar la demostración de que $b \Rightarrow a$ en el teorema, basta coger $g = |f|\chi_{[-R,R]}$. Entonces $g \in L^1(\mathbb{R}, dt)$ (porque $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}, dt)$) y por el ejemplo anterior $\nu = gdt \ll dt$; (*) sigue entonces de la proposición.

Q.E.D.

Demostración de la proposición:

Supongamos lo contrario; es decir que $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}, \exists E_n \in \mathcal{M}$ con $\mu(E_n) < \frac{1}{2^n}$ pero $\nu(E) \geq \varepsilon$.

Sea $F_n = \cup_{k=n}^{\infty} E_k$ y $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} E_n$. Entonces $F_1 \supset F_2 \supset \dots$ y

$$\mu(F) \leq \mu(F_n) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \mu(E_k) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}} \quad \forall n$$

Luego $\mu(F) = 0$ pero $\nu(F) = \lim \nu(F_n) \geq \lim \nu(E_n) \geq \varepsilon$. ¡Contradicción!

Q.E.D.

Comenzamos ahora con la **Demostración de $a \Rightarrow b$:**

Supongamos primero que F es además creciente. Fijado un intervalo $[a, b]$ definamos

$$\tilde{F}(x) = \begin{cases} F(a), & x \leq a \\ F(x), & a \leq x \leq b \\ F(b), & b \leq x \end{cases}$$

Entonces claramente, $\tilde{F}(x)$ es también creciente, acotada y $|\tilde{F}| \in AC$ (Globalmente). Usaremos el siguiente

LEMA 6.10 *Si F es creciente, acotada y AC , entonces dF es finita y absolutamente continua respecto a la medida de Lebesgue.*

Demostración del lema 6.10: dF es finita porque $dF(\mathbb{R}) = F(+\infty) - F(-\infty) < \infty$ (por ser acotada). Para probar que $dF \ll dt$, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$ tal que si $\{I_j\}$ son intervalos con $\sum_j |I_j| < \delta$ se tiene $\sum_j |F(I_j)| < \varepsilon$ (por ser AC). Sea E medible con medida $|E| = 0$. Por ser dt regular, existe abierto $U = \biguplus_j I_j$ tal que $U \supset E$ y $|U| = \sum |I_j| < \delta$. Por tanto $dF(E) \leq dF(U) \leq \sum_j dF(I_j) = \sum_j |F(I_j)| < \varepsilon, \forall \varepsilon$, y se sigue $dF(E) = 0$.

Q.E.D.

TEOREMA 6.11 (Teorema de Radon-Nikodym, versión preliminar) *Sean μ y ν dos medidas definidas en cierto σ -álgebra \mathcal{M} , con μ σ -finita y ν finita. Si $\nu \ll \mu$ entonces $\exists f \in L^1(\mu)$ tal que $d\nu = f d\mu$ (es decir $\nu(E) = \int_E f d\mu \forall E \in \mathcal{M}$).*

Para terminar la demostración de $a \implies b$ (caso F creciente) definimos la función \tilde{F} asociada al intervalo $[-N, N]$. Por el lema, $d\tilde{F}$ es finita y $d\tilde{F} \ll dt$ y por el Teorema de Radon-Nikodym $\exists f \in L^1(dt)$ tal que

$$d\tilde{F}((a, x]) = F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{si} \quad -N < a < x < N,$$

en particular $\exists F'(x) = f(x)$ c.t.p. $x \in [-N, N]$ y $F'(x) \in L^1([-N, N], dx)$. Es decir,

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)dt, \quad \text{si} \quad -N < a < x < N.$$

Haciendo tender $N \rightarrow \infty$, obtenemos el resultado $\forall a, x$ con $a < x$ y $F'_{loc}(\mathbb{R}, dt)$. (De forma que $dF = F' dt$)

El caso mas general de $a \implies b$ (es decir cuando F no es creciente) se deduce del siguiente

LEMA 6.12 *Si F es AC en el intervalo, $[a, b]$, entonces podemos escribir F como la diferencia de dos funciones, $F = F_1 - F_2$ con $F_1, F_2 \in AC$ y crecientes en $[a, b]$.*

Aplicando el resultado anterior a F_1 y F_2 por separado, se tiene que F'_1 y F'_2 existen en c.t.p. en el interior de $[a, b]$, son integrables, y

$$F_j(x) = F_j(a) + \int_a^x F'_j(t)dt, \quad j = 1, 2.$$

Por tanto, $\exists F' = F'_1 - F'_2$ c.t.p. y $F'(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)dt$.

Q.E.D.

Demostración del lema 6.12:

Definimos para $a \leq x \leq b$ la función

$$T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^n |F(x_j) - F(x_{j-1})| : a = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = x \right\}$$

T_F tiene las siguientes propiedades:

1. $T_F(a) = 0$.
2. $T_F(x)$ es creciente ($\Rightarrow 0 \leq T_F(x) \leq T_F(b)$).
- 3.

$$T_F(y) - T_F(x) = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m |F(x_j) - F(x_{j-1})| : x = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_m = y \right\} \quad \text{si } x \leq y$$

4. T_F es AC en $[a, b]$:

Dado $\varepsilon > 0$, usando que F es AC en $[a, b]$, $\exists \delta > 0$ de forma que si $\{I_k\}$ es una colección de intervalos disjuntos en $[a, b]$ $I_k = (a_k, b_k)$ tales que $\sum |I_k| < \delta$ entonces $\sum |F(b_k) - F(a_k)| < \varepsilon$.

Por 3. para cada k , $\exists a_k = x_0^k < x_1^k < \dots < x_{m_k}^k = b_k$ tal que

$$T_F(b_k) - T_F(a_k) \leq \sum_{j=1}^{m_k} |F(x_j^k) - F(x_{j-1}^k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}$$

Llamando $I_k^j = (x_{j-1}^k, x_j^k)$ se tiene

$$\biguplus_k \biguplus_{j=1}^{m_k} I_j^k = \biguplus_k I_k$$

Por tanto $s = \sum_k \sum_{j=1}^{m_k} |F(I_j^k)| < \varepsilon$ (ya que $\sum_k \sum_{j=1}^{m_k} |I_j^k| < \delta$) y así

$$\sum_k |T_F(b_k) - T_F(a_k)| \leq \sum_k \left(\sum_{j=1}^{m_k} |F(x_j^k) - F(x_{j-1}^k)| + \frac{\varepsilon}{2^k} \right) = s + \sum_k \frac{\varepsilon}{2^k} < 2\varepsilon.$$

5. $\frac{1}{2}(T_F + F)$ y $\frac{1}{2}(T_F - F)$ son AC y crecientes (**ejercicio**).
6. Como $F = \frac{1}{2}(T_F + F) - \frac{1}{2}(T_F - F) = F_1 - F_2$ con $F_1 = \frac{1}{2}(T_F + F)$, $F_2 = \frac{1}{2}(T_F - F)$. Por 5 F_1 y F_2 son AC (en $[a, b]$) y crecientes.

Q.E.D.

6.4. El teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue

Debido a sus múltiples aplicaciones, lo presentamos en un contexto mas general. Observemos primero que si $f \in L^1(d\mu)$ y se define $\nu(A) = \int_A f d\mu$, entonces

- $\nu(\emptyset) = 0$
- Si $\{A_j\}$ son medibles y disjuntos,

$$\nu\left(\bigcup_j A_j\right) = \int_{\bigcup_j A_j} f d\mu = \sum_j \int_{A_j} f d\mu = \sum_j \nu(A_j)$$

Pero ν no es medida a menos que $f \geq 0$.

DEFINICIÓN 6.5 Dada una σ -álgebra \mathcal{M} , decimos que la función $\nu : \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ es una **medida con signo** si verifica:

1. $\nu(\emptyset) = 0$.
2. $\nu(A) < \infty \quad \forall A \in \mathcal{M}$, ó $\nu(A) > -\infty \quad \forall A \in \mathcal{M}$.
3. $\nu(\biguplus A_j) = \sum_j \nu(A_j)$, $\forall \{A_j\} \subset \mathcal{M}$, familia disjunta.

Ejemplos:

1. Sean f y g funciones positivas y medibles en (X, \mathcal{M}, μ) tales que bien $\int f d\mu < \infty$ o bien $\int g d\mu < \infty$. Entonces $\nu(A) = \int_A f d\mu - \int_A g d\mu$ es una medida con signo en \mathcal{M} .
2. Sean ν_1, ν_2 dos medidas en \mathcal{M} de forma que al menos una de ellas es finita. Entonces $\nu = \nu_1 - \nu_2$ es una medida con signo en \mathcal{M} .

DEFINICIÓN 6.6 Sea ν una medida con signo en \mathcal{M} . Se dice que $A \in \mathcal{M}$ es un conjunto:

$$\begin{cases} \textbf{Positivo}, & \text{si } \nu(A \cap E) \geq 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \\ \textbf{nulo}, & \text{si } \nu(A \cap E) = 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \\ \textbf{negativo}, & \text{si } \nu(A \cap E) \leq 0, \quad \forall E \in \mathcal{M} \end{cases}$$

En el ejemplo 1 anterior se tiene

$A = \{x : f(x) \geq g(x)\}$ es positivo para ν .

$B = \{x : f(x) < g(x)\}$ es negativo para ν .

$C = \{x : f(x) = g(x)\}$ es nulo para ν .

TEOREMA 6.13 (Teorema de descomposición de Hahn y Jordan) :

- a) **Hahn** Si ν es una medida con signo sobre la σ -álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\exists P, N \in \mathcal{M}$ disjuntos, con $X = P \cup N$ tales que P es un conjunto positivo para ν y N es negativo para ν .

b) **Jordan** Si definimos $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$, $\nu^-(A) = \nu(A \cap N)$, entonces ν^+ y ν^- son medidas positivas y $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Demostración de b) (Jordan):

1. $\nu^+(\emptyset) = \nu^-(\emptyset) = 0$.
2. $\{A_j\} \subset \mathcal{M}$ disjuntos,

$$\nu^+ \left(\bigcup_j A_j \right) = \nu \left(\bigcup_j (A_j \cap P) \right) = \sum_j \nu(A_j \cap P) = \sum_j \nu^+(A_j)$$

(y lo mismo para ν^-)

Además $\nu(A) = \nu(A \cap P) + \nu(A \cap N) = \nu^+(A) - \nu^-(A)$, luego $\nu = \nu^+ - \nu^-$.

Q.E.D.

DEFINICIÓN 6.7 ν^+ y ν^- , se denominan la **variación positiva y negativa** (respectivamente) de ν . Si definimos la medida $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$ es decir, $|\nu|(A) = \nu^+(A) + \nu^-(A)$ $A \in \mathcal{M}$ entonces $|\nu|$ se denomina la **variación total de ν** .

DEFINICIÓN 6.8 Dos medidas con signo λ y μ definidas sobre la misma σ -álgebra \mathcal{M} se dicen que son **mutuamente singulares** (escribiremos $\lambda \perp \mu$ para denotarlo) si existe una descomposición $X = E \cup F$, $E \cap F = \emptyset$ tal que E es un conjunto nulo para μ y F es nulo para λ . Informalmente diremos que λ “vive” en E y que μ “vive” en F .

Ejemplos:

1. En la descomposición de Jordan de ν , $\nu^+ \perp \nu^-$.
2. Si $X = [0, 1]$ y F es la función de Cantor-Lebesgue, entonces $dF \perp dt$ en X . Esto es porque si \mathcal{C} es el conjunto de Cantor y $U = [0, 1] \setminus \mathcal{C}$, se tiene $X = \mathcal{C} \cup U$. \mathcal{C} es nulo para dt y U lo es para dF (porque U está formado por intervalos abiertos y dF es constante en cada uno de ellos).

DEFINICIÓN 6.9 Dada μ medida (positiva) y ν medida con signo, se dice que ν es **absolutamente continua** con respecto a μ ($\nu \ll \mu$) si dado $A \in \mathcal{M}$ con $\mu(A) = 0$, se tiene $\nu(A) = 0$.

Ejercicios: Probar

$$\nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu \iff \nu^+ \ll \mu \text{ y } \nu^- \ll \mu$$

Si $\nu \perp \mu$ y $\nu \ll \mu$, entonces $\nu \equiv 0$.

Sea μ una medida positiva. Entonces $\nu \perp \mu \iff \nu^+ \perp \mu \text{ y } \nu^- \perp \mu$.

PROPOSICIÓN 6.14 (ya vista): $\nu \ll \mu \iff, \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que $\mu(A) < \delta$, entonces se tiene $|\nu(A)| \leq |\nu|(A) < \varepsilon$, $A \in \mathcal{M}$.

LEMA 6.15 Si ν y μ son medidas finitas en \mathcal{M} , entonces bien $\nu \perp \mu$. o bien $\exists \varepsilon > 0$, $\exists E \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(E) > 0$ y $\nu(A) \geq \varepsilon \mu(A)$, $\forall A \subset E$, (es decir, E es un conjunto positivo para $d\nu - \varepsilon d\mu$).

Demostración: Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\nu_n = \nu - \frac{1}{n}\mu$ es una medida con signo. Por la descomposición de Hahn, $X = P_n \uplus N_n$. P_n positivo para ν_n y N_n negativo. Sean $P = \cup P_n$ y $N = \cap N_n$. Entonces $X = P \uplus N$ y $\nu(A) - \frac{1}{n}\mu(A) \leq 0$, $\forall A \subset N$, $\forall n$ ($A \in \mathcal{M}$). En particular $\nu(N) \leq \frac{1}{n}\mu(N) \forall n$. Luego $\nu(N) = 0$ (N es nulo para ν).

Hay ahora dos posibilidades: bien $\mu(P) = 0$, en cuyo caso $\nu \perp \mu$ o bien $\mu(P_{n_0}) > 0$ para algún n_0 . En este caso, el Lema sa sigue tomando $E = P_{n_0}$ y $\varepsilon = 1/n_0$.

Q.E.D.

TEOREMA 6.16 (Teorema de Radon-Nikodym-Lebesgue) Sea μ una medida σ -finita y ν una medida con signo, finita, ambas definidas sobre una σ -álgebra $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$. Entonces ν se puede descomponer como $\nu = \lambda + \rho$, λ y ρ son medidas finitas con signo y $\lambda \perp \mu$ y $\rho \ll \mu$.

Además, $\exists f_0 \in L^1(d\mu)$ tal que $d\rho = f_0 d\mu$, de forma que $d\nu = d\lambda + f_0 d\mu$.

DEFINICIÓN 6.10 La función anterior f_0 se denomina **derivada de Radon-Nikodym** de ν respecto a μ y se denota $f_0 = d\nu/d\mu$.

Demostración:

Podemos suponer que ν es medida positiva (o, si no, considerar ν^+ , ν^- por separado, también supondremos μ finita o nos restringimos a $X = \cup X_n$, $\mu(X_n) < \infty$).

Sea $\mathcal{F} = \{f : X \rightarrow [0, +\infty] : \int_E f d\mu \leq \nu(E), \forall E \in \mathcal{M}\}$. Es decir, $f \in \mathcal{F} \iff d\nu - f d\mu$ es una medida positiva en \mathcal{M} .

Observamos que si $f, g \in \mathcal{F}$, entonces $h = \max(f, g) \in \mathcal{F}$, porque si $D = \{x : f(x) > g(x)\}$,

$$\int_A h d\mu = \int_{A \cap D} f d\mu + \int_{A \cap D^c} g d\mu \leq \nu(A \cap D) + \nu(A \cap D^c) = \nu(A).$$

Sea $a = \sup\{\int_X f d\mu : f \in \mathcal{F}\}$. Se tiene $a \leq \nu(X) < \infty$. Afirmamos que $\exists f_0 \in \mathcal{F}$ extremal, es decir, tal que $a = \int_X f_0 d\mu$ (en particular $f_0 \geq 0$ y $f_0 \in L^1(d\mu)$). Esto es porque $\exists f_n \in \mathcal{F}$ tal que $\int_X f_n d\mu \rightarrow a$, por definición de supremo.

Si $g_n = \max(f_1, \dots, f_n)$, entonces $g_1 \leq g_2 \leq \dots \leq g_n \leq \dots$, $g_n \in \mathcal{F}$ y $\int_X g_n d\mu \rightarrow a$. Definiendo $f_0(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$, el T.C.M. prueba la afirmación.

Sea $d\lambda = d\nu - f_0 d\mu$. λ es una medida positiva, porque $f_0 \in \mathcal{F}$. Sólo hace falta ver que $d\lambda \perp d\mu$. Pero si no lo fuera, por el lema anterior, $\exists \varepsilon > 0$, $E \in \mathcal{M}$ con $\mu(E) > 0$ tal que E es positivo para $d\lambda - \varepsilon d\mu$. En particular, $d\lambda - \varepsilon \chi_E d\mu = d\nu - (f_0 + \varepsilon \chi_E) d\mu$ es una medida positiva. Pero entonces $f_0 + \varepsilon \chi_E \in \mathcal{F}$, lo cual es absurdo porque

$$\int_X (f_0 + \varepsilon \chi_E) d\mu = a + \varepsilon \mu(E) > a.$$

q.e.d.