1) Una función muy utilizada para representar el tamaño de un cultivo de microbios a lo largo del tiempo es la llamada *función logística*:

$$y = f(t) = \frac{k}{1 + ae^{-bt}}, \qquad \text{para } t > 0 \qquad (a,\ k,\ \text{y } b \text{ son constantes positivas}).$$

a) Representa la función $y = \frac{100}{1+2e^{-t}}$, para $0 < t < 5$.

b) Halla el instante en que la velocidad de crecimiento es máxima.

c) ¿A qué tamaño tiende la población?

2) En una reacción bioquímica controlada por una enzima, la velocidad v de conversión de una sustancia (para una cantidad fija de enzima) viene dada por

$$v = f(s) = \frac{as}{k + s}, \qquad \text{para } s > 0, \qquad a \text{ y } k \text{ son constantes positivas,}$$

donde s es la concentración del sustrato que está siendo convertido. Esta función se conoce con el nombre de *función de Michaelis-Menten*.
a) Representa gráficamente la función en el intervalo $0 < s < 3k$.
b) Halla el límite cuando $s \to \infty$ de la velocidad de conversión y calcula cuál debe ser la concentración del sustrato para que la velocidad de conversión sea la mitad de este valor.

3) Calcula el polinomio de Taylor de órdenes 1, 2 y 3 de la función $f(x) = \ln(1 + x)$ respecto del punto $x_0 = 0$. Evalúa dichos polinomios en $x = 0.01$, y compara con $f(0.01)$.

4) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden n de la función $f(x) = \sin(x)$ respecto del punto $x_0 = 0$? ¿Y respecto de $x_0 = \pi/2$?

5) Halla el valor de a y b para que los coeficientes de los términos de grado 1 y 3 del polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = x\cos(ax) - be^x$ se anulen.

6) Estudia y representa gráficamente las funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)^2}$, (b) $f(x) = |\ln x|$, (c) $f(x) = \ln|x|$, (d) $f(x) = |\cos x|$,

(e) $f(x) = \begin{cases} 5 - x^2, & \text{si } x \le 2 \\ x - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$, (f) $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$, (h) $f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{si } |x-1| \le 1 \\ 1 & \text{si } |x-1| > 1. \end{cases}$

7) La concentración de oxígeno en un estanque contaminado con un residuo orgánico viene dada por la función:

$$y = f(t) = \frac{t^2 - t + 1}{t^2 + 1}, \text{ para } 0 \le t < \infty, \quad (t \text{ representa el tiempo en semanas}).$$

a) Haz un esbozo suficientemente detallado de la gráfica de f.
b) Halla los instantes en los que se alcanzan las concentraciones máxima y mínima.
c) ¿En qué instante la velocidad de crecimiento de la concentración de oxígeno es máxima?

8) Sea f una función definida en $\mathbb{R}$ tal que f' existe en todo punto y es continua. Se conoce que

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 2, \quad \text{y } f(1) = 0.$$

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones se verifica(n) siempre?

(i) Existe un $a \in [-1, 1]$ tal que $f'(a) = -2$;
(ii) Existe un $b \in [-1, 1]$ tal que $f'(b) = -1$;
(iii) Existe un $c \in [-1, 1]$ tal que $f'(c) = -3$.

9) Las granjas de patos contaminan el agua con nitrógeno en forma de ácido úrico. Se hace un seguimiento del nivel de ácido úrico y de un río, cerca de una de estas granjas, a lo largo del tiempo (en meses). Este nivel de ácido úrico se puede describir, durante un buen período de tiempo, mediante

$$y = f(t) = 4\ln(t+1) - 5\ln(t+2) + 10 \qquad \text{para } t \geq 0.$$

a) ¿Cuál es el nivel de ácido úrico al comenzar el seguimiento?
b) El nivel de ácido úrico, ¿crece o decrece en los primeros meses? ¿Cuándo alcanza su nivel máximo o mínimo? ¿Cuál es este nivel máximo o mínimo?
c) Realiza una representación aproximada y razonada de la evolución del nivel de ácido úrico durante el período $[0, 24]$ (los dos primeros años).

10) Dos especies de paramecios (*paramecium aurelia* y *paramecium caudata*) compiten en un nicho ecológico por los mismos recursos. El número N de individuos en un mililitro de *paramecium caudata* en este ecosistema viene dado aproximadamente por la función:

$$N(t) = 50(6t+1)e^{-2t} \qquad (t = \text{tiempo en días}).$$

a) ¿Cuál es el número de individuos de *paramecium caudata* al empezar el estudio?
b) Calcula el número máximo de individuos e indica justificadamente cuándo se alcanza.
c) ¿Qué ocurre con la población a largo plazo?

11) Una fábrica de bollería industrial determina, tras un estudio, que si y es el nivel de glucosa en sangre de un adulto normal (medido en miligramos por centímetro cúbico), la función $y = f(t) = 7 + 4te^{-\sqrt{t}}$ describe aproximadamente la evolución de dicho nivel de glucosa para tiempo $t > 0$ (medido en cuartos de hora) después de la ingesta de un bollo en el instante $t = 0$.
a) ¿Cuál era el nivel de glucosa inicial?
b) ¿En qué instante el nivel de glucosa en sangre alcanzará un máximo?
c) ¿Qué valor máximo de concentración de glucosa llegará a alcanzarse?
d) Una empresa farmacéutica está interesada en conocer también en qué instante el ritmo al que el organismo hace bajar el nivel de glucosa de la sangre es lo más veloz posible. ¿Cuál es este instante?
e) ¿Qué ocurre, según este modelo, con la concentración de glucosa en sangre si se deja pasar una cantidad muy grande de tiempo?
f) Dibuja del modo más preciso que te sea posible la gráfica de la función $y = f(t) = 7 + 4te^{-\sqrt{t}}$, definida en todo $\mathbb{R}$.

12) Aplicando los polinomios de Taylor, calcula los límites

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5t^2) - \cos(4t^2)}{(\sin t)^4}; \qquad \text{(b)} \quad \lim_{t\to 0} \frac{\log(1+t) + \log(1-t) + t^2}{t^2(1-\cos t)}.$$

En (a), utilizar la siguiente propiedad: si $g(x) = o(x^n)$ cuando $x \to 0$ y k es un entero positivo, entonces $g(x^k) = o(x^{nk})$, $x \to 0$.

Integración de funciones reales de una variable real

13) La velocidad de variación de una población de bacterias con recursos limitados viene dada por la ecuación

$$\frac{dx}{dt} = -2(x-5),$$

donde x es el "número de bacterias (en millones)" y t es el "tiempo transcurrido (en horas)". Inicialmente hay 1 millón de bacterias.

(a) Hallar la función que expresa x en función de t, resolviendo la ecuación diferencial.
(b) ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 2 horas? ¿Cuántas habrá a largo plazo?

14) Calcula las siguientes integrales indefinidas. Se trata de integrales inmediatas, es decir, se pueden calcular sin más que hacer alguna manipulación o ajustar alguna constante, o con un cambio de variables obvio.

(a) $\displaystyle\int (6\,x^2-8)^{25}\,x\,dx$ (b) $\displaystyle\int \frac{dx}{2\,x^2+8}$ (c) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x+2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{2\,e^x-1}\,dx$ (e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x+8}\,dx$ (f) $\displaystyle\int \frac{x}{x^4+4}\,dx$

(g) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+4}\,dx$ (h) $\displaystyle\int \frac{x}{(x^2-1)^2}\,dx$ (i) $\displaystyle\int x \operatorname{sen} x^2\,dx.$

15) Calcula las integrales indefinidas siguientes por el método de integración por partes:

(a) $\displaystyle\int x\,\ln x\,dx$ (b) $\displaystyle\int x^2\,\operatorname{sen} x\,dx$ (c) $\displaystyle\int s\,2^s\,ds$ (d) $\displaystyle\int \cos(2\,x)\,e^{3\,x}\,dx.$

16) Calcula la derivada de las funciones siguientes:

(a) $F(x)=\int_0^x (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$ (b) $G(x)=\int_0^{x^2} (\operatorname{sen} t^2)\,\ln(1+t^2)\,dt$

17) Calcula las siguientes integrales indefinidas de funciones trigonométricas:

(a) $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2(ax)\,dx$ (b) $\displaystyle\int \cos^5 x\,dx$ (c) $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x}$ (d) $\displaystyle\int \operatorname{tg}(2\,x)\,dx.$

18) Calcula las siguientes integrales indefinidas:

(a) $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[4]{x}}x^2\,dx$ (b) $\displaystyle\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (c) $\displaystyle\int t^2e^t\,dt$ (d) $\displaystyle\int e^{\cos t}\operatorname{sen} 2t\,dt$

(e) $\displaystyle\int \operatorname{arcsen} x\,dx$ (f) $\displaystyle\int \cos x\ln(\operatorname{sen} x)\,dx$ (g) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 t\,dt$ (h) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,dx.$

19) Calcula las siguientes integrales definidas:

(a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (x-2|x|)$ (b) $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen} x}{1+x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_0^{T/2} \operatorname{sen}(2\pi t/T-\alpha)\,dt$ (f) $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x^2\operatorname{sen} x}{1+x^6}\,dx.$

20) Calcula el área delimitada por las curvas siguientes:

(a) $y=\operatorname{sen} x,\ x=\dfrac{\pi}{3},\ x=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$ (b) $y=5-x^2,\ y=3-x$

(c) $y=6x-x^2,\ y=x^2-2x$ (d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1.$

21) La región (infinita) encerrada entre $y=0$ y la gráfica de la función $y=1/x^2$ entre $x=1$ e infinito tiene área finita. ¿Cuánto vale dicha área?

Ayuda. Calcula el área entre $x=1$ y $x=N$ y luego haz el límite cuando $N\to\infty$.

22) ¿Es finita el área de la región comprendida entre $y=0$ e $y=1/x$ de $x=1$ en adelante? ¿Y si se cambia $1/x$ por e^{-x}?

23) Un objeto se mueve a lo largo de un eje de coordenadas con velocidad $v(t)=t(1-t)$ unidades por segundo. Su posición inicial es 2 unidades a la izquierda del origen.

(a) Halla la posición del objeto 10 segundos más tarde.
(b) Halla la distancia total recorrida por el objeto en esos 10 segundos.

24) Una partícula se mueve a lo largo del eje x con velocidad $v(t) = At^2 + 1$, expresada en metros por segundo. Calcula A sabiendo que $x(1) = x(0)$. Halla la distancia total recorrida por la partícula durante el primer segundo.

25) El tamaño $N(t)$ de una población varía a lo largo del tiempo. Su velocidad de variación viene dada por:

$$v(t) = \frac{30\, e^{-0.1\, t}}{(1 + 3\, e^{-0.1\, t})^2} \qquad (t = \text{tiempo en años}).$$

a) Calcula la variación de la población entre $t = 0$ y $t = 20$.
b) Si $N(0) = 25$, ¿cuál es el tamaño de la población al cabo de 20 años?

26) La densidad lineal de una varilla de 8 m de longitud es $12/\sqrt{x+1}$ kg/m, donde x se mide en metros desde un extremo de la varilla. Calcula la densidad promedio de la varilla.

27) Se observa que la velocidad de variación del número de individuos de una población viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{100}(x - 100)(200 - x).$$

Inicialmente hay $x(0) = 180$ individuos.
a) Hallar la función $x(t)$.
b) Calcular en qué valor tiende a estabilizarse la población cuando el tiempo crece.

28) Un tanque contiene inicialmente 100 litros de agua con sal. El contenido total de sal es de 1 kg. En un determinado momento, se comienza a sacar líquido del tanque, a razón de 3 litros por minuto (con lo cual, cada minuto, se pierde un 3 % de sal). Para que la cantidad total de líquido se mantenga constante, cada minuto se añaden 3 litros de otra solución salina cuyo contenido en sal es de 250 gramos por litro (con lo cual, cada minuto, se añaden 750 g de sal).
a) Hallar la cantidad de sal en el tanque, $S(t)$, en función del tiempo, a partir de la ecuación diferencial correspondiente.
b) Determinar el momento en que la solución del tanque contiene 13 kg de sal.
c) Calcular la cantidad de sal que habrá a largo plazo.

29) Durante una epidemia de gripe en una población, la velocidad de propagación de la enfermedad, es decir, la velocidad de variación del número de enfermos es (aproximadamente):

$$v(t) = 1000\ t\ e^{-0.5\, t}$$

donde t es el número de días desde el inicio de la epidemia.

(a) Calcula el número de individuos que se ponen enfermos durante los cuatro primeros días.
(b) ¿En qué momento es máxima la velocidad de propagación de la gripe?

30) Una piscifactoría coloca a los alevines de 1 centímetro de longitud en tanques especiales. Se estima que la velocidad de crecimiento de un alevín desde el instante en que se instala en dicho tanque viene dada, en tiempo t (meses) por $v(t) = \dfrac{16t}{(t^2+1)^2}$ (velocidad dada en centímetros por mes). ¿Qué tamaño tendrán los peces 3 meses después de ingresar en los tanques?

31) ¿Para qué valores de b el promedio de $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ es igual a 3?