1) Encuentra el dominio de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \dfrac{1}{x - \sqrt{1-x^2}}$, (b) $f(x) = \dfrac{1}{1 - \ln x}$, (c) $f(x) = \ln(x - x^2)$, (d) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$,

(e) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 2x + 1}$, (f) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$, (g) $f(x) = \dfrac{3-x}{\operatorname{sen} x}$ (h) $f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^x$.

2) Halla el conjunto imagen de las siguientes funciones:
(a) $f(x) = x^2 - 3x$, (b) $f(x) = e^{2x}$, (c) $f(x) = \tan x$, (d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Además, razona si son inyectivas y, para cada una de ellas, calcula la preimagen de $y = 0$, si existe. Interpreta geométricamente la inyectividad, así como la existencia de la preimagen de $y = 0$.

3) La gráfica de una función $f(x) = 2x^2 - bx + 1$ contiene el punto de coordenadas $(1, 7)$. Halla el valor de b.

4) Esboza la gráfica de una función con dominio $(-\infty, -2) \cup [0, \infty)$ que sea decreciente en $(-\infty, -2)$, convexa en $(-4, -2)$, tenga un punto de inflexión en $x = -4$, un máximo absoluto en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 4$.

5) Razona si son inyectivas, periódicas, pares o impares las siguientes funciones:
(a) $f(x) = |x - 1|$, $f(x) = \operatorname{sen}|x|$, $f(x) = 2\cos^2 x - 3\cos x - 1$, $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$.

6) Sean $f(x) = 3x - 9$ y $g(x) = \frac{5}{x-3}$.
(a) Hallar $g \circ f$ y $f \circ g$.
(b) Observar que $(g \circ f)(4)$ no está definido y explicar por qué. Hacer lo mismo con $(f \circ g)(3)$.
(c) Hallar el dominio de $g \circ f$ y de $f \circ g$.

7) Dadas las funciones $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = 3x - 2$ y $h(x) = x^2$, calcular $h \circ (g \circ f)$ y $(h \circ g) \circ f$, y comprobar que ambas composiciones son iguales.

8) Si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ y $g(x) = 1 - x^2$, entonces una de las dos posibles composiciones $f \circ g$ ó $g \circ f$ coincide con la función $h(x) = \cos^2(x)$. ¿Cuál de ellas es?

9) Para cada apartado, decide si existe la función inversa de f y, en caso afirmativo, calcula esa función e indica su dominio de definición.

(a) $f(x) = \tan^2(x)$, $\operatorname{Dom}(f) = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. (b) $f(x) = \tan^2(x)$, $\operatorname{Dom}(f) = \left(-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$.

(c) $f(x) = x - x^2$, $\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, -1)$. (d) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $\operatorname{Dom}(f) = \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

10) Calcula los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\cos \pi x}{x^2 - 4 + \log(x)}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 2}{x - 1}$,

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{2x^3 - 2x^2 + x + 3}$, (d) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^3 + 2x}$.

11) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+4x-7}{7x^2-\sqrt{2x^6+x^5}}$, (b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{(3x^2-1)^2(x+7)^3}{x^7+6}$, (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{x^2-7}$,

(d) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right)$, (e) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$, (f) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{e^x-1}$,

(g) $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{1/x}$, (h) $\lim\limits_{x\to 0^-} e^{1/x}$, (i) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$,

(j) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (k) $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x}{x^2-4}$, (l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}$,

(m) $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, (n) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (o) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(x)}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{3}}$,

(p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{1/x}}{1+e^{1/x}}$, (q) $\lim\limits_{x\to 0} e^{1/x}$, (r) $\lim\limits_{x\to 0} e^{(-1/x^2)}$,

(s) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x/2}}{x^{10}+48}$, (t) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{x^{18}+1}}$ (u) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log^2 x}{\sqrt{x+3}}$.

12) Encontrar un ejemplo de funciones f, g, definidas en $\mathbb{R}$, tales que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty,$$

y para las que, sin embargo, $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(f(x)+g(x)\big)$ no existe.
Indicación: Piensa primero en una función h que no tenga límite cuando $x\to+\infty$, y encuentra f y g en las condiciones anteriores de modo que $f+g=h$.

13) Calcula cuánto valen los límites siguientes:

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}, \quad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{3-\sqrt{x^2+8}}.$$

Ayuda: Simplifica factores comunes.

14) Estudia el dominio y los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x)=\frac{5x-10}{x^2-2x}$, (b) $f(x)=\frac{x+1}{x}$, (c) $f(x)=\ln|x|$, (d) $f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0 \end{cases}$,

(e) $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, (f) $f(x)=\frac{x^2-x}{\sin(\pi x)}$, (g) $f(x)=\frac{x^4-4}{x^2+4x+4}$, (h) $f(x)=\begin{cases} -1 & \text{si } x<0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } x>0 \end{cases}$.

15) Calcula qué valor debe tener c para que la función $f(x)=\begin{cases} \arctan x, & \text{para } x\leq 1 \\ \ln x + c, & \text{para } x>1 \end{cases}$ sea continua, y dibuja la gráfica de f para ese valor.

16) Se considera la función $f(x)=x^3-3\,x^2-9\,x+1$ en el intervalo cerrado $[-2,6]$. ¿Cuáles son los valores máximo y mínimo que alcanza f en dicho intervalo? Responde a la misma pregunta para las funciones $g(x)=x^4+3x^2$ y $h(x)=e^x$.

17) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

(a) $y=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, (b) $y=\mathrm{sen}(\ln x)$, (c) $y=\ln(x^2\ln^3 x)$,

(d) $y=2^x$ (Ayuda: usar $a^b=e^{b\ln a}$), (e) $y=x^x$, (f) $y=\mathrm{sen}^4 x-3x^4\tan^2 x$,

(g) $y=\frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, (h) $y=\frac{3x+\sqrt[3]{7x^2+1}}{e^{x^2}}$, (i) $y=e^{\sqrt{\ln x}}$.

18) Demuestra que la ecuación $6\,x^5+13\,x+1=0$ tiene exactamente una raíz real.

19) (a) Da un ejemplo de una función continua f, definida en el intervalo $[0,+\infty)$, tal que $f\big([0,+\infty)\big)=\mathbb{R}$.
(b) Da un ejemplo de una función continua f, definida en el intervalo $[0,+\infty)$, que no alcanza ni máximo ni mínimo global en este intervalo y satisface $|f(x)|<1$ para todo $x\in[0,+\infty)$.

20) Discute la existencia de los límites siguientes y calcula su valor cuando sea posible:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{x^2-3}{2x-2\sqrt{3}}$, (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$, (c) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \left(2\operatorname{sen}^2 x - 1\right) \arctan(2x)$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{e^x+x}{e^x-x}}$, (e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan^3 x}{x^4+x^3}$, (f) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2\,\operatorname{sen}^2 x}{\tan^3 x}$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x + x^2}{2\,x^2}$, (h) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{x}$, (i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+3}{2x-3}\right)^x$,

(j) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} (e^x+2x)^{3/x}$, (k) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$, (l) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x}$,

(m) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan 5x}{\tan 3x}$, (n) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$, (o) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x+2^x}{e^x-2^x}$.