

## Cuestiones

**Q1.** (1 punto) Los superconductores son conductores perfectos que tienen resistividad nula y pueden mantener una corriente de forma indefinida, sin pérdidas y sin necesidad de una fuente de f.e.m, siempre que se mantengan por debajo de una temperatura crítica, generalmente muy baja. Por un solenoide de este material circula una corriente de 50 A; el solenoide tiene una autoinducción de 0,8 H. Por un error del sistema criogénico el solenoide deja de ser superconductor y adquiere una resistencia de  $1 \Omega$ .

¿Cuánta energía se disipa en el solenoide desde que deja de ser superconductor hasta que se extingue la corriente?

**Solución:**

Sólo se puede disipar la energía previamente almacenada en forma de energía magnética:

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2 = (0,5)(0,8)(50)^2 = 1 \text{ kJ}$$

Por tanto la respuesta es 1 kJ.

**Q2.** (1 punto) Demuestre que en un material superconductor no puede haber campos magnéticos variables.

**Solución:**

Ya sabemos que en un conductor normal el campo electrostático es nulo; sólo la presencia de una fuerza electromotriz externa puede mantener un campo eléctrico que es proporcional a la corriente según la ley de Ohm,  $\mathbf{E} = \rho\mathbf{J}$ . En el caso de un superconductor esa corriente se mantiene por sí misma sin necesidad de campo electromotriz; otra forma de verlo: a resistividad nula ( $\rho = 0$ ) ocurre que  $\mathbf{E} = 0$ . Aplicando la tercera ley de Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$  deducimos que  $\partial\mathbf{B}/\partial t = 0$  por tanto  $\mathbf{B} = \text{cte}$ .

**Q3.** (1 punto) Para una línea de transmisión sin pérdidas, obtenga la expresión para: la constante de propagación  $\kappa$ , la impedancia característica de la línea, la velocidad de fase y el coeficiente de reflexión en función de los parámetros de la línea. ¿Es constante el coeficiente de reflexión a lo largo de la línea?

**Q4.** (1 punto) La expresión general del factor de agrupación para una agrupación lineal de antenas viene dado por

$$f(\theta) = \sum_{m=0}^{m=N} e^{jm\Psi} = 1 + e^{j\Psi} + e^{j2\Psi} + \dots$$

con  $\Psi = \delta + kd \cos \theta$ .

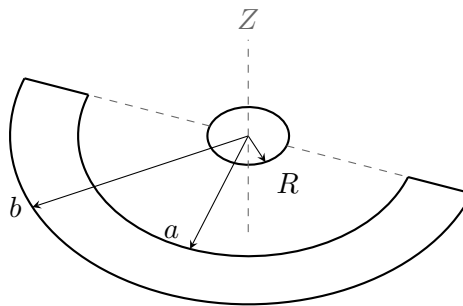
Demuestre que el factor de agrupación normalizado se puede expresar como

$$F(\theta) = \frac{1}{N} \frac{\text{sen}(N\Psi/2)}{\text{sen}(\Psi/2)}$$

## Ejercicios

**E1.** (3 puntos) Calcule el coeficiente de inducción mutua de los siguientes conductores:

1. Una espira circular de radio  $R$ .
2. El formado por dos arcos semicirculares, coplanarios y concéntricos con la anterior, de radios  $a, b \gg R$ , y los segmentos rectos que unen ambos arcos como se muestra en la figura.



### Solución:

Seguimos el procedimiento de asignar una corriente virtual a uno de los conductores,  $I_1$ , y calcular el flujo magnético que esta corriente crea en el otro conductor,  $\Phi_2$ . De esta forma  $M_{12} = \Phi_2/I_1$ .

Lo más sencillo es considerar la espira circular como conductor 1. Entonces cuando la recorre una corriente lo podemos considerar como un dipolo magnético de valor  $I \cdot S$ :

$$\mathbf{m} = \pi R^2 I_1 \mathbf{u}_z$$

Este dipolo crea un campo magnético que, en zonas alejadas del mismo, tiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi r^5} (3\mathbf{r}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{m} r^2)$$

Como sólo nos interesa el campo magnético en la zona del conductor 2, y éste se encuentra en el plano perpendicular al eje de la espira, entonces  $\mathbf{m} \cdot \mathbf{r} = 0$  y por tanto:

$$\mathbf{B} = -\frac{\mu_o}{4\pi r^3} \mathbf{m} = -\frac{\mu_o R^2 I_1}{4r^3} \mathbf{u}_z$$

El flujo magnético lo obtenemos integrando  $d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$  a toda la superficie ocupada por el conductor 2. Dada la simetría del sistema:

$$d\mathbf{S} = (rd\varphi)dr\mathbf{u}_z$$

con  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ ,  $a < r < b$ ; el sentido  $+\mathbf{u}_z$  se ha elegido recorriendo el circuito 2 en el mismo sentido asignado al recorrido del circuito 1. Dado que  $\mathbf{B}$  no depende del ángulo podemos integrar directamente esta variable:

$$d\mathbf{S} = \pi r dr \mathbf{u}_z$$

Por tanto

$$\Phi_2 = - \int_a^b \frac{\mu_o \pi R^2 I_1}{4r^2} dr$$

Operando:

$$\Phi_2 = - \frac{\mu_o \pi R^2 I_1}{4} \left[ -\frac{1}{r} \right]_a^b = - \frac{\mu_o \pi R^2 I_1}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Y finalmente:

$$M_{12} = \frac{\Phi_2}{I_1} = - \frac{\mu_o \pi R^2}{4} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

Otra forma de resolver ejercicio con herramientas aprendidas en *Electromagnetismo 1* es considerar el caso recíproco de analizar el flujo por el conductor 1 (espira) que provoca una corriente virtual  $I$  por el conductor 2,  $M_{12} = \Phi_1/I_2$ .

En este caso sólo contribuyen los campos de los sectores semicirculares, puesto que en los tramos rectos la corriente se dirige en la misma dirección que el vector  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  (ver ley de Biot-Savart). Por ejemplo, una espira circular de corriente de radio  $b$  produce en su centro un campo magnético:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o I_2}{2b} \mathbf{u}_z$$

pero puesto que es sólo media circunferencia tenemos que

$$\mathbf{B}' = \frac{\mu_o I_2}{4b} \mathbf{u}_z$$

En el caso del otro arco semicircular el campo se dirige en sentido opuesto

$$\mathbf{B}'' = - \frac{\mu_o I_2}{4a} \mathbf{u}_z$$

y por tanto

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' + \mathbf{B}'' = \frac{\mu_o I_2}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) \mathbf{u}_z$$

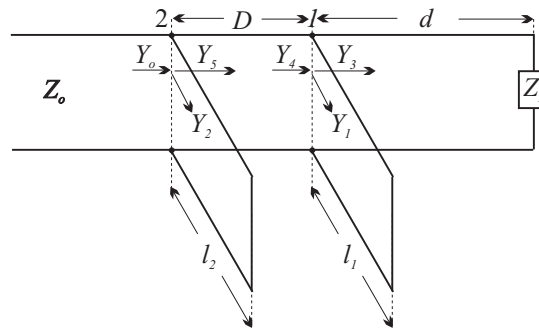
Para calcular  $\Phi_1$  suponemos que, puesto que  $a, b \gg R$ , el valor del campo en el centro de la espira es aproximadamente igual en toda el área que abarca la espira. Por tanto,

$$\Phi_1 \simeq \frac{\mu_o I_2}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) (\pi R^2)$$

de donde

$$M_{12} = \frac{\mu_o \pi R^2}{4} \left( \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

- E2.** (3 puntos) Una línea de transmisión de impedancia característica  $Z_o = 50\Omega$  se carga con una impedancia desconocida  $Z_L$ . Mediante un doble sintonizador de cortocircuitos móviles se logra una adaptación perfecta cuando las longitudes de los sintonizadores son  $l_1 = 0,114\lambda$  y  $l_2 = 0,414\lambda$ . La separación entre los sintonizadores es  $D = 0,375\lambda$  y la carga se halla a una distancia  $d = 0,2\lambda$  del doble sintonizador.



Determine el valor de la impedancia de carga.

### Solución:

En primer lugar, nos desplazamos desde la posición de admitancia en cortocircuito (Punto C) hacia el generador la longitud correspondiente al segundo sintonizador,  $0,414\lambda$ , hacia el generador para encontrar la admitancia de este sintonizador

$$jB_2 = j1,65$$

Puesto que la carga está adaptada, la admitancia de la otra rama debe de tener parte real igual a la unidad y parte imaginaria igual a  $jB_2$  pero de signo contrario. Es decir

$$Y_2 = 1 - j1,65 \quad \theta_2 = 0,320\lambda$$

A continuación, desplazamos  $Y_2$  hacia la carga (dirección antihoraria) una distancia igual a la separación entre los sintonizadores, y obtenemos  $Y_1$

$$Y_1 = 0,24 - j0,34 \quad \theta_1 = 0,445\lambda$$

Esta admitancia es el resultado de sumar la admitancia  $Y'_{LN}$  con el primer sintonizador. Para obtener la admitancia del primer sintonizador, procedemos igual que con el otro (partiendo del punto C y desplazándonos hacia el generador la longitud  $l_1$ ). Obtenemos la admitancia

$$jB_1 = -j1,15$$

Teniendo en cuenta que  $Y_1$  es la suma de la admitancia de la carga desplazada la distancia  $d$  y de la admitancia del primer sintonizador, podemos obtener  $Y'_{LN}$

$$Y_1 = jB_1 + Y'_{LN}$$

de donde

$$Y'_{LN} = +j1,15 + (0,24 - j0,34)$$

$$Y'_{LN} = 0,24 + j0,81 \quad \theta'_{LN} = 0,111\lambda$$

Por último, representamos esta admitancia en la carta y la desplazamos la distancia  $d$  hacia la carga, obteniendo finalmente  $Y_{LN}$ .

$$Y_{LN} = 0,2 - j0,61 \quad \theta_{LN} = 0,411\lambda$$

El punto simétrico en la carta nos proporciona la impedancia de carga normalizada

$$Z_{LN} = 0,49 + j1,48$$

Y la impedancia de carga, teniendo en cuenta la impedancia característica de la línea, es

$$Z_L = (24,5 + j74) \quad \Omega$$