Cuestiones

Q1. (1 punto) Describa las ventajas e inconvenientes de usar una aleación metálica ferromagnética como núcleo de un transformador.

Solución:

Usar un material ferromagnético como núcleo de un transformador aporta una permeabilidad magnética elevada, con lo que se disminuye la pérdida de flujo magnético entre primario y secundario por lo que el factor de acoplamiento, k, tiende a ± 1 y el transformador gana eficiencia. La mayor permeabilidad magnética redunda también en un mayor factor de conversión entre la intensidad del primario y el flujo magnético del secundario.

Por otro lado, los materiales ferromagnéticos presentan ciclos de histéresis, lo que lleva a pérdidas energéticas. Además, si el núcleo es conductor se producen corrientes parásitas (corrientes de Foucault), que también conllevan pérdida de eficiencia.

Q2. (1 punto) ¿Qué resultado refleja la siguiente expresión? Identifique cada término y analice razonadamente su significado.

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \left(\frac{1}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\frac{1}{2}\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) dv = \int_V \mathbf{E}\cdot\mathbf{J}\; dv + \int_S \mathbf{S}\cdot d\mathbf{s}$$

Q3. (1 punto) A partir de las ecuaciones del telegrafista

$$\begin{aligned} -\frac{d\widehat{V}(z)}{dz} &= (R+j\omega L)\widehat{I}(z) \\ -\frac{d\widehat{I}(z)}{dz} &= (G+j\omega C)\widehat{V}(z) \end{aligned}$$

Obtenga las soluciones para el voltaje y la corriente en una línea de transmisión y la expresión para la constante κ de propagación.

Q4. (1 punto) El potencial vector de un dipolo elemental viene dado por la expresión

$$\widehat{\mathbf{A}}(r) = \frac{\mu_o}{4\pi} l I_o \frac{e^{-jkr}}{r}\mathbf{u}_r$$

¿Qué hipótesis son las que han permitido llegar a esta expresión?

Ejercicios

E1. (3 puntos) Una guía de ondas rectangular ($a = 2b$) de dieléctrico aire conduce una onda progresiva TE_{10}. Se sabe que la longitud de onda en la guía es $\lambda' = 4{,}88$ cm y que la velocidad de fase es $v_{ph} = 4{,}39 \cdot 10^8$ m/s.

(a) Deduzca las dimensiones de la guía. Halle también la impedancia de onda intrínseca en la guía asociada a este modo y a la frecuencia obtenida.

(b) La componente H_z tiene un valor máximo de 19,3 A/m. Halle las amplitudes de las componentes transversales y las expresiones fasoriales para los campos.

(c) Determine las expresiones instantáneas para los campos y analice los desfases entre las distintas componentes.

Solución:

(a) A partir de los datos dados en el enunciado:

$$\beta_{10} = \frac{2\pi}{\lambda} = 40{,}98\pi \text{ m}^{-1}$$

$$\mathrm{v}_{ph} = \frac{\omega}{\beta_{10}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \mathrm{v}_{ph}\beta_{10} = 1{,}8\pi \cdot 10^{10} \text{ rad/s}$$

Por lo que la frecuencia de la señal es

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = 9 \text{ GHz}$$

Y por la relación de dispersión:

$$\omega^2\mu\varepsilon = \beta_{10}^2 + (k_c^{10})^2 \quad \Rightarrow \quad k_c^{10} = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \beta_{10}^2} = 43{,}83\pi \text{ m}^{-1}$$

Ahora bien:

$$k_c^{10} = \frac{\pi}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{\pi}{k_c^{10}} = 2{,}28 \text{ cm} \ ; \ \ b = \frac{a}{2} = 1{,}14 \text{ cm}$$

(b) Las expresiones de los campos para el modo TE_{10} de la guía rectangular son:

$$\widehat{H}_z = H_o \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$\widehat{H}_x = j\frac{\beta_{10}}{\pi/a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

$$\widehat{E}_y = -j\frac{\omega\mu_o}{\pi/a} H_o \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right) e^{-j\beta z}$$

A partir de los datos del enunciado sabemos que

$$H_o = 19{,}3 \text{ A/m}$$

La amplitud de la componente x del campo magnético será

$$H_{xo} = \frac{\beta_{10}}{k_c^{10}} H_o = 18 \text{ A/m}$$

Y el valor máximo de la amplitud para el campo eléctrico es

$$|E_y|_{máx} = \frac{\mu_o \omega}{k_c^{10}} H_o = 9960{,}2 \text{ V/m}$$

(c) Las expresiones para los campos en función del tiempo se obtienen mediante

$$H_z = \Re\left\{\widehat{H}_z e^{j\omega t}\right\}$$

Luego

$$H_z = 19{,}1 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - 40{,}98\pi z)$$

Y para las componentes transversales, si tenemos en cuenta que $\pm j = e^{\pm j\pi/2}$

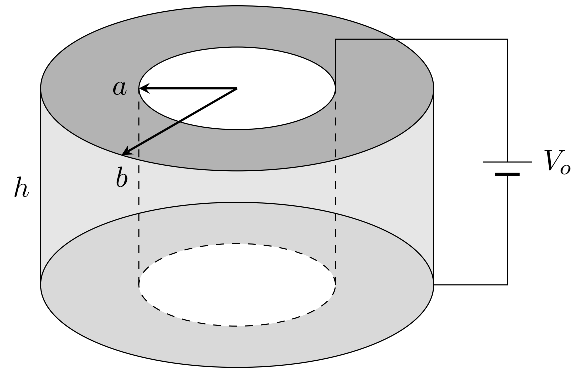
$$\begin{aligned} H_x &= 18 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - 40{,}98\pi z + \pi/2) \\ &= -18 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - 40{,}98\pi z + \pi/2) \\ &= 18 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - 40{,}98\pi z + \pi) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} E_y &= 9960{,}2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\cos(\omega t - 40{,}98\pi z - \pi/2) \\ &= 9960{,}2 \cos\left(\frac{\pi}{a}x\right)\operatorname{sen}(\omega t - 40{,}98\pi z) \end{aligned}$$

A la vista de las expresiones de estas componentes se infiere que E_y y H_x están en oposición de fase entre sí y desfasadas ambas respecto a H_z en $\pi/2$.

E2. (3 puntos) Un cilindro metálico de conductividad γ tiene un radio exterior b, un hueco cilíndrico de radio a y una altura h como se ve en la figura; la movilidad de sus portadores de carga libre es ν. Aplicamos una diferencia de potencial V_o entre la pared externa y el hueco interior y se establece una corriente eléctrica.



(a) Calcule los campos **E**, **J** en el interior del metal. Calcule la intensidad de corriente, I, y la resistencia del cilindro, R (suponga que la permitividad dieléctrica es la misma que en el vacío).

(b) Establecemos ahora un campo magnético uniforme en la dirección del eje del cilindro, $\mathbf{B} = B_o\,\mathbf{u}_z$. Calcule la densidad de corriente **J**', la corriente I' y la resistencia R' en esta nueva situación. Calcule explícitamente el cociente $|J'_\varphi/J'_\rho|$.

Solución:

(a) Los campos tiene dirección radial; a partir de la Ley de Gauss, tomando una superficie gaussiana cilíndrica, sabemos que $E(2\pi\rho h) = Q/\varepsilon_o$ donde Q es la carga en la superficie interna. De aquí tenemos:

$$V_o = \int_a^b E d\rho = \int_a^b \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o h\rho} d\rho = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_o h} \ln\frac{b}{a}$$

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon_o h}{\ln\frac{b}{a}} V_o$$

por tanto

$$\mathbf{E} = \frac{V_o}{\rho\ln\frac{b}{a}}\mathbf{u}_\rho$$

A partir de la Ley de Ohm

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} = \frac{\gamma V_o}{\rho\ln\frac{b}{a}}\mathbf{u}_\rho$$

La corriente I es el flujo de **J** a través de cualquier superficie cilíndrica $\mathbf{S} = (2\pi\rho h)\mathbf{u}_\rho$

$$I = \mathbf{J}\cdot\mathbf{S} = \frac{2\pi h\gamma V_o}{\ln\frac{b}{a}}$$

Y la resistencia es $R = V_o/I$:

$$R = \frac{1}{2\pi h\gamma}\ln\frac{b}{a}$$

(b) Consideramos ahora la presencia del campo magnético lo que provoca que, por la acción de la fuerza de Lorentz, los portadores se desvíen de la dirección radial y adquieran una cierta velocidad transversal que se traduce en una componente J'_φ de la densidad de corriente. Partimos de la ecuación (1.9) del texto base:

$$\mathbf{J}' = \gamma \mathbf{E} + \nu \mathbf{J}' \times \mathbf{B}$$

y consideramos que $\mathbf{J}' = J'_\rho \, \mathbf{u}_\rho + J'_\varphi \, \mathbf{u}_\varphi$. Sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned} J'_\rho &= \frac{\gamma V_o}{\rho \ln \frac{b}{a}} + \nu J'_\varphi B_o \\ J'_\varphi &= -\nu J'_\rho B_o \end{aligned}$$

donde hemos tomado $\mathbf{u}_\rho \times \mathbf{u}_z = -\mathbf{u}_\varphi$ y $\mathbf{u}_\varphi \times \mathbf{u}_z = \mathbf{u}_\rho$. A partir de la segunda ecuación ya tenemos directamente el cociente que nos piden en el enunciado:

$$\left| \frac{J'_\varphi}{J'_\rho} \right| = \nu B_o$$

Sustituimos y desarrollamos:

$$J'_\rho = \frac{\gamma V_o}{\rho \ln \frac{b}{a}} - \nu^2 B_o^2 J'_\rho \quad \longrightarrow \quad J'_\rho = \left(\frac{\gamma}{1 + \nu^2 B_o^2} \right) \frac{V_o}{\rho \ln \frac{b}{a}}$$

y la cantidad entre paréntesis actúa como la conductividad efectiva del medio cuando hay un campo magnético. Finalmente la densidad de corriente es:

$$\mathbf{J}' = \left(\frac{\gamma}{1 + \nu^2 B_o^2} \right) \frac{V_o}{\rho \ln \frac{b}{a}} \left(\mathbf{u}_\rho - \nu B_o \mathbf{u}_\varphi \right)$$

La intensidad:

$$I' = \mathbf{J}' \cdot \mathbf{S} = \left(\frac{\gamma}{1 + \nu^2 B_o^2} \right) \frac{2\pi h V_o}{\ln \frac{b}{a}}$$

y la resistencia:

$$R' = \frac{V_o}{I'} = \frac{1 + \nu^2 B_o^2}{2\pi h \gamma} \ln \frac{b}{a}$$