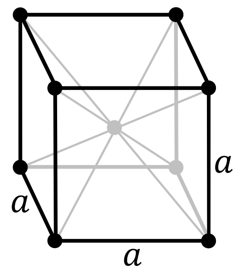
Cuestiones

Q1. (1 punto) El hierro cristaliza en el sistema cúbico centrado en el cuerpo como se ve en la figura adjunta.



El parámetro de red es $a = 0{,}287$ nm. En todos los puntos de la celda hay un átomo de hierro de momento dipolar $m_o = 1{,}8 \times 10^{-23}$ A m^2. Si todos los dipolos se orientan en la misma dirección y sentido calcule la magnetización de saturación de un dominio de hierro formado por la réplica de la celda unidad en todas las direcciones.

Solución:

Veamos primero el momento dipolar total de una única celda. Cada dipolo de los vértices está compartido por 8 celdas, por tanto contribuye con $m_o/8$. Como hay 8 vértices el total es, contando el dipolo del centro de la celda:

$$m = 8\frac{m_o}{8} + m_o = 2m_o$$

Si la muestra está compuesta por N celdas entonces su momento dipolar es $2Nm_o$ y su volumen Na^3. Por tanto la magnetización —momento dipolar por unidad de volumen— es:

$$M = \frac{2Nm_o}{Na^3} = \frac{2m_o}{a^3} = \frac{3{,}6 \times 10^{-23}}{\left(0{,}287 \times 10^{-9}\right)^3} = 1{,}5 \times 10^6 \text{ A/m}$$

Q2. (1 punto) Tenemos el siguiente campo vectorial expresado en coordenadas cilíndricas:

$$\mathbf{A}(\rho, z, \varphi) = A_o \left(\left(\frac{z \operatorname{sen} \varphi}{h} - 1 \right) \mathbf{u}_\rho + \frac{z + \rho}{\rho} \mathbf{u}_z + \left(\frac{z \cos \varphi}{h} - \frac{\rho^2}{\sqrt{R^2 + h^2}} \right) \mathbf{u}_\varphi \right)$$

donde A_o, h y R son constantes. ¿Puede representar este campo un campo magnético, $\mathbf{B}$? Razone la respuesta.

Solución:

Hay que comprobar que cumple la correspondiente ec. de Maxwell (4.5, pág 159) que es $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Obsérvese que hay que usar **coordenadas cilíndricas** y que en ningún momento se afirma que $\mathbf{A}$ sea un potencial vector.

La respuesta es sí.

Q3. (1 punto) Analice las diferencias en la propagación de una señal electromagnética en un cable coaxial y en una guía de ondas. ¿Que limitaciones presenta uno y otro sistema de transmisión?

Q4. (1 punto) A partir de las expresiones para **E** y **H** de una antena lineal, deduzca las propiedades de los campos de radiación y defina lo que se entiende por factor de antena. Particularice para una antena de media longitud de onda.

Ejercicios

E1. (3 puntos) Una esfera de radio a presenta la siguiente imanación:

$$\mathbf{M}(r) = M_o\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)\mathbf{u}_z$$

donde r es la distancia al centro de la esfera.

(a) Calcule el momento magnético total de la esfera.

(b) Calcule las corrientes de imanación $\mathbf{J}_m$ y $\mathbf{K}_m$.

(c) Calcule el potencial escalar magnético, ϕ_m, en puntos del eje z alejados de la esfera ($|z| \gg a$).

Solución:

En el enunciado de examen faltaba el factor M_o en la magnetización.

El momento magnético se obtiene integrando la magnetización a todo el volumen:

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{M} dv$$

con dv dado en coordenadas esféricas $dv = (r \operatorname{sen}\theta d\varphi)(rd\theta)(dr)$,

$$\mathbf{m} = M_o\,\mathbf{u}_z \int \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 \operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr$$

Integrando en las variables angulares:

$$\mathbf{m} = 4\pi M_o\,\mathbf{u}_z \int_0^a \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) r^2 dr$$

Y el resultado:

$$\mathbf{m} = 4\pi M_o\,\mathbf{u}_z \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^5}{5a^2}\right) = \frac{8\pi}{15} M_o\, a^3 \mathbf{u}_z$$

Las corrientes superficiales de imanación se obtienen evaluando $\mathbf{M}$ en las fronteras del material; en este caso:

$$\mathbf{M}(a) = M_o\left(1 - \frac{a^2}{a^2}\right) = 0$$

por tanto:

$$\mathbf{K}_m = \mathbf{M}(a) \times \mathbf{n} = 0$$

La densidad de corriente de imanación es $\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M}$. Podemos realizar la operación en coordenadas esféricas, transformando $\mathbf{u}_z = \cos\theta\,\mathbf{u}_r - \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\theta$. Pero por simplicidad elegimos hacerlo en coordenadas cilíndras, tomando $r^2 = \rho^2 + z^2$; en este caso sólo hay una derivada distinta de 0:

$$\mathbf{J}_m = \nabla \times \mathbf{M} = -\frac{\partial M_z}{\partial \rho}\mathbf{u}_\varphi = \frac{2M_o}{a^2}\rho\,\mathbf{u}_\varphi = \frac{2M_o}{a^2} r\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi$$

El potencial escalar se obtiene a partir de la ec. (1.42):

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_o} \frac{\mathbf{M}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}ds' - \frac{1}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

El primer término es el término superficial y ya sabemos que es nulo porque la magnetización se anula en la superficie de la esfera. Por tanto queda,

$$\phi_m = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_o}\frac{\nabla'\cdot\mathbf{M}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}dv'$$

Para resolver la integral tenemos primero que calcular la divergencia de la magnetización; elegimos de nuevo las coordenadas cilíndricas para realizar esta operación.

$$\nabla\cdot\mathbf{M} = \frac{\partial M_z}{\partial z} = -\frac{2M_o}{a^2}z = -\frac{2M_o}{a^2}r\cos\theta$$

Y sustituiremos en la integral la forma en coordenadas esféricas puesto que la integral es más cómodo realizarla en ese sistema de coordenadas. Los otros elementos son:

$$dv' = r^2\operatorname{sen}\theta d\varphi d\theta dr$$

$$\mathbf{r} = z\mathbf{u}_z, \quad \mathbf{r}' = r\mathbf{u}_r$$

(omitimos las $'$ en las coordenadas de fuente porque no hay riesgo de confusión y la escritura es más clara)

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + z^2 - 2zr\cos\theta}$$

Sustituimos todo y realizamos ya la integral en φ:

$$\phi_m = \frac{M_o}{a^2}\int \frac{r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}{\sqrt{r^2+z^2-2zr\cos\theta}}d\theta dr$$

Desarrollamos el denominador aprovechando que, en todo el intervalo de integración, $|z| \gg r$:

$$\left(r^2+z^2-2zr\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq z^{-1}\left(1-\frac{2r}{z}\cos\theta\right)^{-1/2} \simeq \frac{1}{z}\left(1+\frac{r}{z}\cos\theta\right)$$

Sustituyendo:

$$\phi_m = \frac{M_o}{za^2}\int r^3\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\left(1+\frac{r}{z}\cos\theta\right)d\theta dr$$

Realizamos las integrales angulares:

$$\int_0^\pi \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \left[-\frac{\cos^2\theta}{2}\right]_0^\pi = -\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right) = 0$$
$$\int_0^\pi \cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = -\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

Ahora sólo queda:

$$\phi_m = \frac{2M_o}{3z^2a^2}\int_0^a r^4 dr = \frac{2M_o\,a^3}{15z^2}$$

Algunos han intentado el ejercicio a partir de la expresión nativa del potencial escalar (1.41):

$$\begin{aligned}
\phi_m &= \frac{1}{4\pi}\int_{V_o}\left(\mathbf{M}\cdot\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3}\right)dv' \\
&= \frac{M_o}{4\pi}\int\frac{\mathbf{u}_z\cdot(z\mathbf{u}_z - r\mathbf{u}_r)}{|z\mathbf{u}_z - r\mathbf{u}_r|^3}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2\,\mathrm{sen}\,\theta dr d\theta d\varphi \\
&= \frac{M_o}{2}\int\frac{z-r\cos\theta}{(z^2+r^2-2zr\cos\theta)^{3/2}}\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2\,\mathrm{sen}\,\theta dr d\theta
\end{aligned}$$

Esto es posible, pero hay que tener un poco de cuidado con la aproximación del denominador; no se debería tomar $(z^2+r^2-2zr\cos\theta)^{-3/2} \simeq z^{-3}$ porque si la integral es nula por el factor angular entonces habría que tomar un término más en $\cos\theta$. Lo más adecuado es:

$$\left(z^2+r^2-2zr\cos\theta\right)^{-3/2} \simeq z^{-3}\left(1+\frac{3r}{z}\cos\theta\right)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}\phi_m &= \frac{M_o}{2z^2}\int\left(1-\frac{r}{z}\cos\theta\right)\left(1+\frac{3r}{z}\cos\theta\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta\\ &\simeq \frac{M_o}{2z^2}\int\left(1+\frac{2r}{z}\cos\theta\right)\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2\operatorname{sen}\theta dr d\theta\end{aligned}$$

Al hacer la integral angular se ve que el término principal no se anula (la integral vale 2) y sí lo hace el primer término en (r/z); pero podría haber sido al revés.

$$\phi_m = \frac{M_o}{z^2}\int_0^a\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)r^2 dr = \frac{2M_o\,a^3}{15z^2}$$

E2. (3 puntos) Una onda plana linealmente polarizada en el eje X se propaga en el aire en la dirección del eje Z. La frecuencia de la onda es de 1,5 GHz y la amplitud del campo magnético H_o es de 0,32 A/m. La onda incide normalmente en $z = 0$ en un medio dieléctrico semiinfinito no magnético con $\varepsilon_r = 9$. Determine:

(a) La expresión fasorial del campo eléctrico incidente

(b) Los coeficientes de reflexión y transmisión

(c) Las expresiones fasoriales de los campos eléctricos reflejado y transmitido

(d) ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico en la superficie de separación de ambos medios?

(e) La distancia en el aire desde la frontera al máximo más cercano de la intensidad de campo eléctrico. En dicho punto ¿qué valor tendrá la intensidad de campo magnético?

Solución:

a) El fasor correspondiente al campo eléctrico viene dado por la siguiente expresión

$$\widehat{\mathbf{E}}^i = E_o e^{-jkz}\mathbf{u}_x$$

donde, la amplitud del campo eléctrico está relacionada con la amplitud del campo magnético mediante la impedancia característica del medio que en este caso es

$$Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\varepsilon_o}} = 120\pi$$

Luego

$$E_o = H_o Z_o = 120{,}64 \text{ V/m}$$

y la constante de propagación es

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi 1{,}5 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^8} = 10\pi \text{ m}^{-1} = 31{,}4 \text{ m}^{-1}$$

Por tanto

$$\widehat{\mathbf{E}}^i = 120{,}64\, e^{-j10\pi z}\mathbf{u}_x \qquad \text{V/m}$$

b) Para determinar los coeficientes de transmisión y reflexión necesitamos conocer la impedancia característica del medio dielectrico

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_o}{9\varepsilon_o}} = 40\pi$$

Y entonces, tenemos

$$\tau = \frac{2Z_d}{Z_o + Z_d} = 0{,}5$$

y

$$\Gamma = \tau - 1 = -0{,}5$$

c) Las expresiones fasoriales para los campos transmitido y reflejado son

$$\widehat{\mathbf{E}}^t = \tau E_o e^{-jk_d z}\mathbf{u}_x$$

y

$$\widehat{\mathbf{E}}^r = \Gamma E_o e^{jkz}\mathbf{u}_x$$

donde k_d es la constante de propagación en el dieléctrico y cuyo valor es

$$k_d = \frac{\omega}{v}$$

con v la velocidad de propagación de la onda en el dieléctrico

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{3} = 10^8 \text{ m/s}$$

Entonces

$$k_d = \frac{\omega}{v} = 3k = 30\pi \text{ m}^{-1} = 94{,}25 \text{ m}^{-1}$$

Por tanto, las expresiones fasoriales para los campos transmitido y reflejado son

$$\widehat{\mathbf{E}}^t = 60{,}3 e^{-j30\pi z}\mathbf{u}_x \qquad \text{V/m}$$

y

$$\widehat{\mathbf{E}}^r = -60{,}3 e^{j10\pi z}\mathbf{u}_x \qquad \text{V/m}$$

d) El campo total en el aire viene dado por la suma del campo incidente más el campo reflejado, esto es

$$\widehat{\mathbf{E}}^T = \widehat{\mathbf{E}}^i + \widehat{\mathbf{E}}^r = 120{,}64 \left(e^{-j10\pi z} - 0{,}5 e^{j10\pi z}\right) \mathbf{u}_x \qquad \text{V/m}$$

Y en $z = 0$

$$\widehat{\mathbf{E}}^T = 60{,}3 \mathbf{u}_x \qquad \text{V/m}$$

e) El módulo del campo eléctrico total en el aire viene dado por

$$\left|\mathbf{E}^T\right| = \sqrt{\widehat{\mathbf{E}}^T \widehat{\mathbf{E}}^{T*}} = E_o^i \sqrt{1 + \Gamma^2 + 2\Gamma \cos(2kz)}$$

que, teniendo en cuenta que Γ es negativo, será máximo para

$$\cos(2kz) = -1 \qquad \Rightarrow \qquad 2kz = -\pi \qquad \Rightarrow \qquad z = \frac{-\pi}{2k} = -0{,}05 \text{ m} = -5 \text{ cm}$$

En dicho punto, el valor del campo eléctrico es

$$\left|\mathbf{E}^T\right| = E_o^i \sqrt{1 + \Gamma^2 - 2\Gamma} = 1{,}5 E_o = 181 \text{ V/m}$$

El campo magnetico será

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = \widehat{\mathbf{H}}^i + \widehat{\mathbf{H}}^r = 0{,}32 \left(e^{-j10\pi z} + 0{,}5 e^{j10\pi z}\right) \mathbf{u}_y \qquad \text{A/m}$$

En el puntos $z = 0{,}05$, tenemos

$$\widehat{\mathbf{H}}^T = 0{,}32 \left(e^{-j\pi/2} + 0{,}5 e^{j\pi/2}\right) \mathbf{u}_y = 0{,}32 \left(\frac{j}{2}\right) \qquad \text{A/m}$$

Y la amplitud del campo magnético en este punto es

$$\left|\mathbf{H}^T\right| = 0{,}16 \text{ A/m}$$