Cuestiones

Q1. (1 punto) La sal común (cloruro sódico, NaCl) en disolución se disocia completamente en sus iones Na^+ Cl^-. ¿Puede presentar una disolución de sal común efecto Hall? ¿Depende de la concentración de sal? Razone la respuesta.

Solución:

Se trata de analizar la disolución de sal común como conductor; piense en cómo resolvería la cuestión si en lugar de «una disolución de sal común» dijera «el silicio» o «el cobre». Cuando se pregunta por el efecto Hall en la disolución de sal común se está pidiendo analizar qué ocurre cuando se establece una corriente en un medio salino y se aplica un campo magnético perpendicular.

En este sentido basta con aplicar los resultados del ejercicio de autoevaluación 1.1 a este caso concreto; el coeficiente Hall toma el valor:

$$R_H = -\frac{1}{en}\frac{\nu^+ + \nu^-}{\nu^+ - \nu^-}$$

Por tanto la sal común presentará efecto Hall si las movilidades absolutas de Na^+ y Cl^- son diferentes.

Según esta fórmula, cuanto mayor es la concentración más pequeño es el coeficiente Hall, por lo que la concentración baja el valor de R_H. Pero, a efectos prácticos, si realizamos un experimento de medida de efecto Hall, resulta más fácil establecer una corriente en el medio cuanto mayor es la concentración; por lo tanto, en términos de medida del voltaje Hall, ambos efectos se cancelan y la concentración no jugaría ningún papel. Se han valorado positivamente ambos argumentos.

También se han valorado parcialmente discusiones sobre convección y cualquier otra que no sea una simple copia del texto del libro sin criterio.

Q2. (1 punto) La presión magnética se ejerce en la frontera de separación entre dos medios magnéticos. Defina qué características tienen que tener ambos medios para que exista presión magnética y de qué campo depende de acuerdo con el tipo de frontera entre ambos.

Solución:

La solución se encuentra en la sección 6, tema 3, concretamente en la pág. 145.

Se han valorado positivamente las respuestas que son algo más que la copia sin criterio de los contenidos del libro.

Q3. (1 punto) El agua de mar tiene una permitividad relativa $\varepsilon_r = 81$ y una conductividad $\gamma = 4$ S/m. Determine:

a) A partir de qué frecuencia podemos considerar el agua de mar como un dieléctrico de pequeñas pérdidas.

b) La frecuencia por debajo de la cual podemos considerar el agua de mar como buen conductor

c) ¿Cuál será el valor (en función de la frecuencia) de la constante de propagación y de la velocidad de propagación para las frecuencias en el rango intermedio definido por los anteriores valores?

Q4. (1 punto) Discuta razonadamente la veracidad de la siguiente información: *La impedancia característica de una línea de transmisión es siempre una magnitud real*

Ejercicios

E1. (3 puntos) Una esfera de radio a está cargada con una distribución homogénea de carga ϱ_o. La esfera rota con velocidad ω.

(a) Calcule la densidad de corriente a la que equivale esta carga rotante. Calcule el momento magnético de la esfera a causa de esta densidad de corriente.

(b) Calcule la expresión del vector de Poynting lejos de la esfera ($r \gg a$). Calcule el flujo del vector de Poynting a través de una superficie esférica en el mismo supuesto.

Solución:

La densidad de corriente de un elemento cargado con velocidad $\mathbf{v}$ viene dada por $\mathbf{J} = \varrho\mathbf{v}$. La velocidad de un objeto en rotación es $\mathbf{v} = \omega\mathbf{u}_z \times \mathbf{r}$ donde elegimos el eje z como eje de giro:

$$\mathbf{v} = (\omega\mathbf{u}_z) \times (r\mathbf{u}_r) = \omega r\,(-\operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\theta + \cos\theta\,\mathbf{u}_r) \times \mathbf{u}_r = \omega r \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi$$

por tanto $\mathbf{J} = \varrho_o\,\omega r \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi$.

(Es sorprendente la cantidad de respuestas que hemos encontrado donde sólo se considera la velocidad de un elemento de carga dispuesto en la superficie de la esfera: $\mathbf{v} = \omega a \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi$. Hay que considerar todo elemento en el interior del volumen de la esfera.)

Obtenemos el momento magnético:

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \mathbf{J} dV = \frac{\varrho_o\,\omega}{2}\int (r\mathbf{u}_r) \times (r \operatorname{sen}\theta\,\mathbf{u}_\varphi)\,(r^2 \operatorname{sen}\theta dr d\theta d\varphi)$$

donde la integral se extiende a todo el volumen de la esfera. Veamos el producto de vectores:

$$\mathbf{u}_r \times \mathbf{u}_\varphi = -\mathbf{u}_\theta = -\cos\theta\cos\varphi\,\mathbf{u}_x - \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\mathbf{u}_y + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathbf{u}_z$$

Y ahora integramos en el ángulo φ; obsérvese que los dos primeros términos de la expresión anterior se anulan:

$$\mathbf{m} = \pi\varrho_o\,\omega\,\mathbf{u}_z \int r^4\,\mathrm{sen}^3\,\theta dr d\theta$$

Calculamos la integral en el ángulo θ:

$$\int_0^\pi \mathrm{sen}^3\,\theta d\theta = \int_0^\pi \left(1-\cos^2\theta\right)\mathrm{sen}\,\theta d\theta = \left[-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

Sustituyendo:

$$\mathbf{m} = \frac{4\pi\varrho_o\,\omega}{3}\mathbf{u}_z \int_0^a r^4 dr = \frac{4\pi\varrho_o\,\omega\,a^5}{15}\mathbf{u}_z$$

El vector de Poynting tiene la expresión $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$. El campo eléctrico lo obtenemos trivialmente a partir de la Ley de Gauss aplicada a una esfera de radio r concéntrica con la esfera cargada:

$$\mathbf{E} = \frac{\varrho_o a^3}{3\varepsilon_o\,r^2}\mathbf{u}_r$$

El campo magnético $\mathbf{B}$ lo obtenemos considerando la esfera como un dipolo puntual, lo cual nos lo permite la condición de que estamos considerando distancias muy superiores a las dimensiones de la esfera:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o}{4\pi r^5}\left(3\mathbf{r}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{r}) - r^2\mathbf{m}\right)$$

sustituimos la expresión de $\mathbf{m}$ calculada anteriormente

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_o\,\varrho_o\,\omega\,a^5}{15\,r^3}\left(3\cos\theta\,\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_z\right)$$

De donde obtenemos el campo $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_o} = \frac{\varrho_o\,\omega\,a^5}{15\,r^3}\left(3\cos\theta\,\mathbf{u}_r - \mathbf{u}_z\right)$$

Y ahora calculamos el vector de Poynting:

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H} = \frac{\varrho_o^2\omega\,a^8}{45\varepsilon_o\,r^5}\left(3\cos\theta\left(\mathbf{u}_r\times\mathbf{u}_r\right) - \left(\mathbf{u}_r\times\mathbf{u}_z\right)\right) = \frac{\varrho_o^2\omega\,a^8}{45\varepsilon_o}\frac{\mathrm{sen}\,\theta}{r^5}\mathbf{u}_\varphi$$

Ahora calculamos de flujo del vector de Poynting:

$$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\varrho_o^2 \omega\, a^8}{45\varepsilon_o} \oint \frac{\operatorname{sen}\theta}{r^5} \mathbf{u}_\varphi \cdot d\mathbf{s}$$

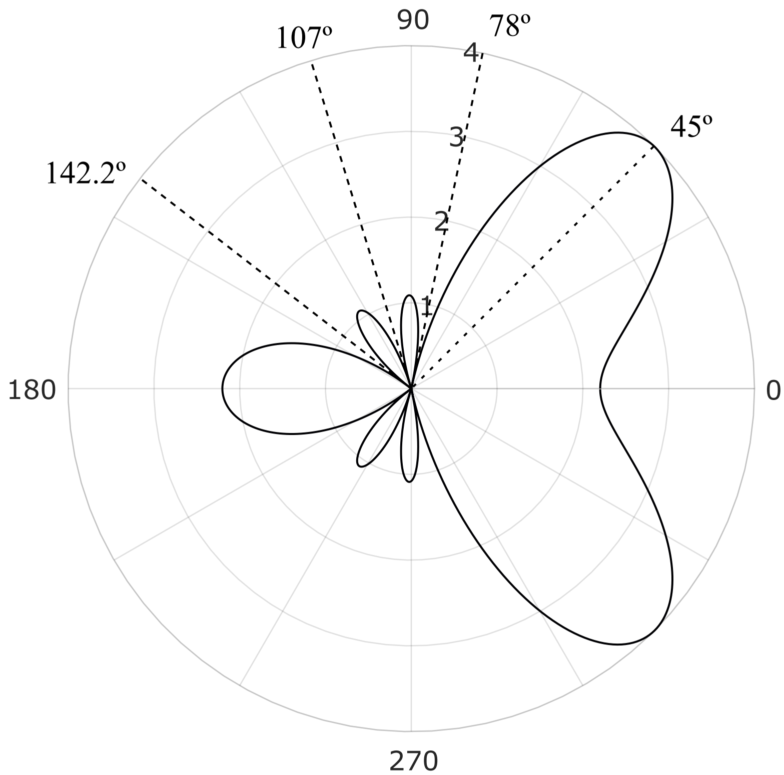
vemos que el elemento diferencial de superficie de una esfera de radio r es $d\mathbf{s} = r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\varphi\, \mathbf{u}_r$.

$$\oint \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \frac{\varrho_o^2 \omega\, a^8}{45\varepsilon_o} \oint \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{r^3} d\theta d\varphi\, (\mathbf{u}_\varphi \cdot \mathbf{u}_r) = 0$$

donde vemos que la superficie es siempre ortogonal al vector de Poynting y el flujo resulta ser nulo.

E2. (3 puntos) El diagrama de radiación de la figura corresponde a una agrupación de antenas isótropas dispuestas en el eje Z, determine:

1. Por simple inspección del diagrama, si se trata de una agrupación broadside, endfire o ninguna de las dos y el número de antenas de la agrupación
2. Determine el desfase entre las mismas y la distancia $d = m\lambda$ de separación
3. Si queremos que el máximo de radiación de esta agrupación sea perpendicular al eje de la agrupación, qué parámetro o parámetros debemos cambiar para conseguirlo. En este último caso, determine las posiciones de los mínimos de radiación y esboce el diagrama de radiación que resultará.



Solución:

a) Puesto que el máximo del diagrama de radiación no se presenta para $\theta = 0$ ni para $\theta = 90^o$ podemos asegurar que no se trata de una agrupación Endfire ni broadside. En cuanto al número de radiadores, puesto que el máximo del factor de radiación es igual a 4, es $N = 4$

$$|f(\theta)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(N\Psi/2)}{\operatorname{sen}(\Psi/2)}\right|$$

con

$$\Psi = \delta + 2\pi m\cos\theta$$

El máximo del factor de la agrupación se da para $\Psi = 0$ y su valor es N.

b) Los nulos del factor de agrupación tienen lugar para aquellos ángulos que hacen nulo el numerador, es decir, para

$$\operatorname{sen}(N\Psi/2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N\Psi/2 = p\pi \qquad \text{con} \qquad p = \pm 1, \pm 2...$$

El primer nulo lo tenemos para $\theta_1 = 78^o$ por lo que

$$2\delta + 4\pi m\cos\theta_1 = \pm\pi$$

El segundo nulo lo tenemos para $\theta_2 = 107^o$ por lo que

$$2\delta + 4\pi m \cos\theta_2 = \pm 2\pi$$

Restando estas expresiones, calculamos m que resulta

$$m = 0{,}5$$

Para calcular el desfase, tenemos en cuenta que el máximo del diagrama de radiación se da para $\Psi = 0$, por tanto

$$\Psi = 0 \Rightarrow \delta = -2\pi \cos\theta_{\text{máx}}$$

y el desfase

$$\delta = -0{,}71\pi$$

c) Para que el máximo del diagrama de radiación se produzca en $\theta = 90^o$ tiene que verificarse que

$$\Psi = \delta + 2\pi m \cos 90 = 0$$

de donde se deriva que el desfase debe ser nulo

$$\delta' = 0$$

En este caso, el factor de agrupación viene dado por

$$|f(\theta)| = \left|\frac{\operatorname{sen}(2\pi\cos\theta)}{0{,}5\pi \operatorname{sen}(\cos\theta)}\right|$$

Es evidente que para $\theta = 90^o$ se alcanza el máximo, $|f(\theta)| = 4$ y los mínimos los tendremos para

$$\operatorname{sen}(2\pi\cos\theta = 0) \qquad \Rightarrow \qquad 2\pi\cos\theta = p\pi \qquad \text{con} \qquad p = \pm 1, \pm 2...$$

Para

$$p = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = 0{,}5 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 60^o$$

y para

$$p = 2 \qquad \Rightarrow \qquad \cos\theta = 1 \qquad \Rightarrow \qquad \theta = 0$$

El diagrama de radiación si el desfase es nulo se representa en la siguiente figura

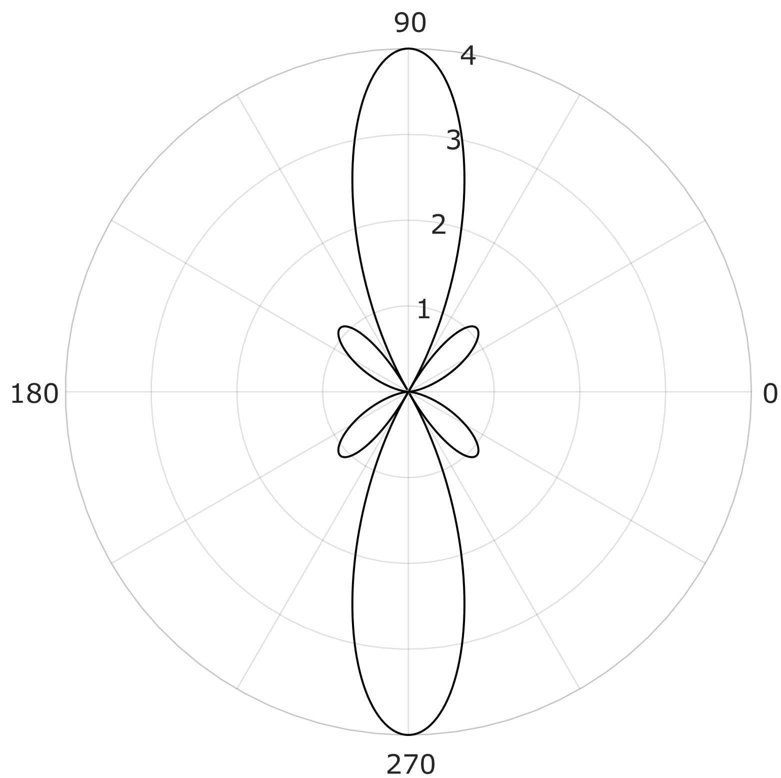


Figura 1