Cuestiones

Q1. (1 punto) ¿Qué son las corrientes de Foucault? Describa al menos un escenario tecnológico donde son perjudiciales. Describa al menos otro escenario donde se da la situación opuesta y resultan convenientes.

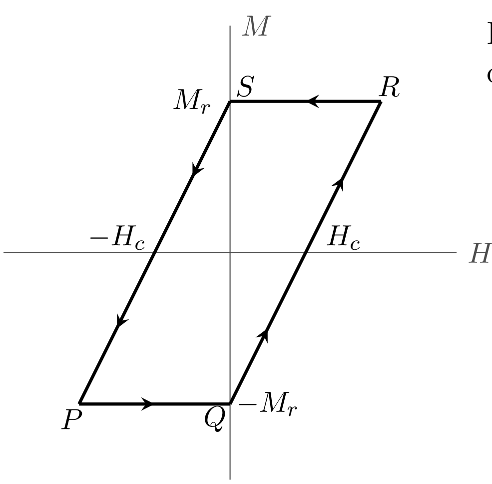
Q2. (1 punto) Defina qué es una transformación de norma y qué utilidad tiene.

Q3. (1 punto) Una onda plana que se propaga en el vacío incide normalmente en la superficie de separación de un determinado medio. El coeficiente de reflexión es igual a -1. ¿De qué medio se trata? Determine el coeficiente de transmisión y discuta el carácter de la onda existente en la región del vacío.

Q4. (1 punto) Discuta la veracidad de esta afirmación: "Los potenciales retardados y avanzados son soluciones igualmente válidas para las ecuaciones de onda del potencial electrodinámico". ¿Por qué se elige el potencial retardado para determinar los campos de radiación?

Ejercicios

E1. (3 puntos) Un material ferromagnético e isótropo presenta un ciclo de histéresis caracterizado por un campo coercitivo, H_c, y una magnetización de remanencia, M_r, el cual podemos simplificar de la forma que se ve en la figura adjunta.



La imanación es homogénea en todo el volumen, V, del material.

(a) Establecer la relación entre M y H en cada tramo.

(b) Calcular la energía necesaria para conducir el material a través de un ciclo completo de magnetización $PQRSP$.

Solución:

Puesto que todas las partes del ciclo son tramos rectos es fácil obtener una forma analítica de $M(H)$ en cada tramo:

$$M(H) = \begin{cases} -M_r, & PQ, \quad -2H_c < H < 0 \\ M_r \frac{H-H_c}{H_c}, & QR, \quad 0 < H < 2H_c \\ M_r, & RS, \quad 2H_c > H > 0 \\ M_r \frac{H+H_c}{H_c}, & SP, \quad 0 > H > -2H_c \end{cases}$$

Para calcular la energía magnética tenemos que partir del elemento de densidad de energía magnética, $dw_m = \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$ e integrarlo en todo el ciclo.

$$w_m = \oint_{PQRS} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{B}$$

puesto que $\mathbf{B} = \mu_o(\mathbf{H} + \mathbf{M})$

$$w_m = \mu_o \oint_{PQRS} (\mathbf{H} \cdot d\mathbf{H} + \mathbf{H} \cdot d\mathbf{M})$$

pero el primer término es el trabajo en el vacío que se anula en todo el ciclo. Por tanto,

$$w_m = \mu_o \oint_{PQRS} HdM = \mu_o \left(\int_P^Q HdM + \int_Q^R HdM + \int_R^S HdM + \int_S^P HdM \right)$$

donde abandonamos la notación vectorial porque, al ser el medio isótropo, ambos campos tienen la misma dirección.

Pasamos a resolver las integrales. En los tramos PQ y RS la magnetización es constante; por tanto $dM = 0$.

$$w_m = \mu_o \oint_{PQRS} HdM = \mu_o \left(\int_Q^R HdM + \int_S^P HdM \right)$$

- Tramo QR

$$dM = \frac{M_r}{H_c} dH, \quad \int_Q^R HdM = \frac{M_r}{H_c} \int_0^{2H_c} HdH = 2M_r H_c$$

- Tramo SP

$$dM = \frac{M_r}{H_c} dH, \quad \int_S^P HdM = \frac{M_r}{H_c} \int_0^{-2H_c} HdH = 2M_r H_c$$

Por tanto:

$$w_m = 4\mu_o M_r H_c$$

Puesto que el medio es homogéneo la energía magnética total no es más que el producto del volumen por la densidad de energía magnética:

$$W_m = 4V\mu_o M_r H_c$$

E2. (3 puntos) La línea biplaca es una línea de transmisión formada por dos placas conductoras paralelas de anchura a y separación b, siendo $b \ll a$. A partir de la expresión general para la componente longitudinal del TM dada por

$$\widehat{e}_z = \left(Ae^{jk_x x} + Be^{-jk_x x}\right)\left(Ce^{jk_y y} + De^{-jk_y y}\right) \quad ; \quad \widehat{E}_z = \widehat{e}_z e^{-j\beta z}$$

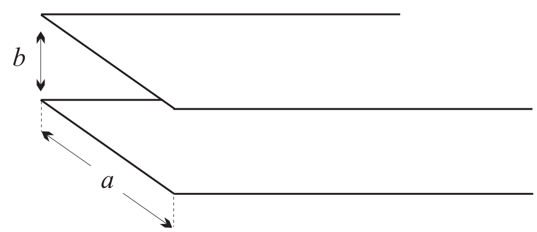
con $k_c^2 = k_x^2 + k_y^2$.

(a) Demuestre que $E_z = E_o \operatorname{sen} \frac{n\pi}{b} y \, e^{-j\beta z}$

(b) A partir de esta expresión determine las expresiones de los campos transversales

(c) Halle la frecuencia de corte y las velocidades de fase y de grupo del modo fundamental para $b = 1{,}5$ cm y una frecuencia de trabajo de $1{,}6 \cdot 10^8$ Hz.

(d) Obtenga la potencia transmitida por el modo fundamental para $E_o = 20$ V/m y $a = 3$ mm.



Solución:

Por cuestión de simetría, y puesto que $a \gg b$, al no existir conductores laterales, el campo eléctrico no puede depender de la coordenada x por lo que

$$k_{x,n} = 0$$

y la componente longitudinal del campo es

$$\widehat{e}_z = \left(Ce^{jk_y y} + De^{-jk_y y}\right)$$

A continuación, imponemos las condiciones de contorno a lo largo del eje Y:

$$\text{Para} \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \widehat{e}_z = 0$$
$$\text{Para} \quad y = b \quad \Rightarrow \quad \widehat{e}_z = 0$$

De la primera obtenemos que $C = -D$, con lo cual, la expresión para el campo eléctrico queda

$$\widehat{e}_z = C\left(e^{jk_y y} - Be^{-jk_y y}\right) = 2jC \sin k_y y = E_o \sin k_y y$$

De la segunda, obtenemos

$$\sin k_y b = 0 \quad \Rightarrow \quad k_{y,n} b = n\pi \quad \text{con} \quad n = 1, 2, ...$$

los posibles valores para k_y.

Nótese que n no puede tomar el valor $n = 0$ porque en este caso, no existiría campo lontigudinal y por tanto, tampoco campos transversales. Vemos que este caso de la línea biplaca es un caso particular de los modos TM que se propagan en una guía rectangular.

Por tanto, la distribución transversal de la componente z del campo eléctrico es:

$$\widehat{e}_z = E_o \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

el fasor para la componente longitudinal del campo eléctrico en el caso de señales que se propagan en la dirección de las z crecientes es

$$\widehat{E}_z = E_o \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\, e^{-j\beta z}$$

Los campos transversales vienen dados por

$$\widehat{\mathbf{E}}_t = -j\frac{\beta}{k_{c,n}^2} \nabla_t \widehat{E}_z$$

y

$$\widehat{\mathbf{H}}_t = \frac{\mathbf{u}_z \times \widehat{E}_t}{Z_{TM}} = \frac{k}{\beta}\frac{\mathbf{u}_z \times \widehat{E}_t}{Z}$$

Para el campo eléctrico tendremos

$$\begin{aligned}
\widehat{E}_y &= -j\frac{\beta}{k_{c,n}^2}\frac{\partial}{\partial y}\widehat{E}_z \\
&= \\
&= -j\frac{\beta b^2}{(n\pi)^2} E_o \frac{\partial}{\partial y}\sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\, e^{-j\beta z} \\
&= \\
&= -j\frac{\beta b}{n\pi} E_o \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\, e^{-j\beta z}
\end{aligned}$$

Y la componente transversal del campo magnético

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{H}}_t &= \frac{k}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{u}_z \times \widehat{E}_t \\
&= \\
&= \frac{k}{\beta}\sqrt{\frac{\varepsilon_o}{\mu_o}}\left(-j\frac{\beta b}{n\pi} E_o \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)\, e^{-j\beta z}\right)(-\mathbf{u}_x)
\end{aligned}$$

Luego

$$\widehat{H}_x = j\frac{\omega\varepsilon_o b}{n\pi}E_o\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)\, e^{-j\beta z}$$

Estos campos se pueden obtener de las expresiones para los campos de los modos TM en una guía rectangular, eliminando la dependencia con la coordenada x.

c) Las frecuencias de corte vienen determinadas por k_{cn}

$$k_{cn} = \frac{\omega_c}{c} \quad \Rightarrow \quad \omega_c = ck_{c,n} = n\pi\frac{c}{b} \quad \Rightarrow \quad f_c = n\frac{c}{2b}$$

Para el modo fundamental, $n = 1$ tenemos que

$$k_{c,1} = 66{,}67\pi \text{ m}^{-1}$$

$$f_c = \frac{c}{2b} = 10^{10} \text{ Hz}$$

Puesto que la frecuencia de trabajo es menor que la frecuencia de corte, la señal no se propaga, son campos evanescentes que decaen rápidamente a cero. Por tanto, no tiene sentido hablar de velocidad de fase ni de velocidad de grupo. La constante de propagación β es imaginaria. Efectivamente, usando la relación de dispersión

$$\beta = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_{c,1}^2} = j66{,}66\pi$$

d) Para el modo fundamental, los campos transversales son:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{E}} &= \frac{|\beta|\, b}{\pi}E_o\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\, e^{-|\beta|z}\mathbf{u}_y \\ \widehat{\mathbf{H}} &= j\frac{\omega\varepsilon_o b}{\pi}E_o\cos\left(\frac{\pi}{b}y\right)\, e^{-|\beta|z}\mathbf{u}_x \end{aligned}$$

donde se puede observar que son campos que decaen rápidamente con la distancia y no son propagantes.

La potencia transmitida por una señal en una guía de ondas viene dada, en función de los campos transversales, por

$$P_t = \frac{1}{2}\text{Re}\left[\int_S (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^*)\cdot d\mathbf{s}\right]$$

Ahora bien, el producto de los campos es igual a

$$\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t^* = -\frac{j\,|\beta|\, b^2\omega\varepsilon_o}{\pi^2}E_o^2\cos^2\left(\frac{\pi}{b}y\right)]e^{-2|\beta|z}\mathbf{u}_z$$

Es decir, es una cantidad imaginaria pura, por tanto la parte real es nula y concluimos que la potencia transmitida por la guía es nula, lo que está en consonancia con el hecho de que no existe propagación en la guía para la frecuencia de trabajo dada en el enunciado.