5. Teoría cualitativa

Estabilidad

38.– Analizar la estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$ para cada una de las siguientes matrices A.

$$(1)\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad (2)\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$(3)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad (4)\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(5)\begin{bmatrix} -3 & -2 & -2 & -1 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ -4 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (6)\begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$(7)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ -3 & -6 & -6 & 1 \\ 4 & 6 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & -4 & -1 \end{bmatrix} \qquad (8)\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

39.– Determinar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddddot{y} + 7\dddot{y} + 17\ddot{y} + 17\dot{y} + 6y = 0.$
2. $\ddddot{y} - \dddot{y} - 7\ddot{y} + \dot{y} + 6y = 0.$
3. $\ddddot{y} - \dddot{y} - 7\ddot{y} = 0.$

40.– Probar que si $\dot{X} = AX$ es asintóticamente estable, entonces toda solución tiende a cero exponencialmente. Más concretamente, probar que existen $\alpha > 0$, $C > 0$ y $t_1 > 0$ tales que

$$||e^{tA}X_0|| \leq C\mathrm{e}^{-\alpha t}||X_0||,$$

para todo $X_0 \in \mathbb{R}^n$ y todo $t > t_1$.

41.– Utiliza el criterio de Routh-Hurwitz para determinar la estabilidad asintótica de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddddot{y} + 7\dddot{y} + 17\ddot{y} + 17\dot{y} + 6y = 0.$

2. $\ddot{y} + \gamma\dot{y} + (\omega^2 - \Omega^2)y = 0$.

42.– Analizar la estabilidad de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\dddot{y} + \ddot{y} - 2\dot{y} + y = 0$
2. $y^{(4)} + 2\dddot{y} + 3\ddot{y} + 4\dot{y} + y = 0$
3. $y^{(6)} - 5y^{(5)} + 2y^{(4)} - \ddot{y} + \dot{y} + 3y = 0$

Diagrama de fases

43.– Supongamos que A es una matriz real 2×2 con valores propios imaginarios, por lo que las órbitas son elipses. ¿Cómo podemos encontrar los ejes de dichas elipses?

44.– Dibuja con precisión el diagrama de fases de cada uno de los sistemas diferenciales lineales siguientes, calculando los elementos geométricos que lo determinan (ejes, semiejes, etc.).

(1) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (6) $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

15. Propiedades cualitativas

Estabilidad

149.– Sea p un punto de equilibrio de un sistema unidimensional autónomo $\dot{x} = f(x)$, con f continua en $\mathbb{R}$ y derivable en p. Demostrar que si existe $r > 0$ tal que $f(x) < 0$ para $x \in (p, p+r)$ y $f(x) > 0$ para $x \in (p-r, p)$ entonces p es asintóticamente estable. Demostrar que si existe un entorno reducido de p en el que f tiene signo definido, entonces p es inestable. Probar que si $(x-p)f(x) > 0$ en algún entorno reducido de p entonces p es inestable. Dibujar las distintas situaciones anteriores en el diagrama de fases.

150.– Para las siguientes ecuaciones diferenciales, el punto $x = 0$ es un punto de equilibrio. Analiza su estabilidad.

1. $\dot{x} = x^3 \operatorname{sen}(x^2)$,
2. $\dot{x} = x^2 \operatorname{sen}(x^2)$,
3. $\dot{x} = x^2(\operatorname{sen}(x) - \tan(x))$.

151.– Proporcionar ejemplos explícitos de ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$ que satisfagan las siguientes propiedades:

1. Tiene exactamente dos puntos de equilibrio ambos inestables.
2. Tiene exactamente un punto de equilibrio estable, pero no asintóticamente estable.
3. Tiene infinitos puntos de equilibrio, todos ellos inestables.
4. Tiene exactamente dos puntos de equilibrio, uno estable y otro inestable.

152.– Encontrar los puntos de equilibrio de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales y estudiar su estabilidad

$$\begin{cases} \dot{x} = y^2 - 3x + 2 \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + x^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \operatorname{sen}(x+y) \\ \dot{y} = y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x\cos(y) \\ \dot{y} = -y\cos(x). \end{cases}$$

153.– Analiza la estabilidad de los puntos de equilibrio de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} = y\mathrm{e}^{-y^2}$.
2. $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y + y^3 = 0$.
3. $\begin{cases} \dot{x} = y - x - x^2 \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$

4. $\ddot{y} - y|y| = 0$.

154.– Consideremos la ecuación diferencial $\ddot{x} + g(x) = 0$, donde g es de clase C^1 en $\mathbb{R}$. Sea p un cero de g tal que $g'(p) < 0$. Prueba que p es un punto de equilibrio inestable. Interpretar las condiciones anteriores en términos de la función (energía potencial) $V(x) = \int_p^x g(s)\,ds$.

Órbitas de sistemas autónomos en el plano

155.– Hallar las órbitas de los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x \\ \dot{y} = -y \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = y. \end{cases}$

156.– Un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes es un centro si y sólo si la matriz del sistema tiene traza nula y determinante positivo, es decir, es de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -c & -a \end{bmatrix} \qquad \text{con } bc > a^2.$$

Como sabemos, las trayectorias son elipses centradas en el origen. Hallar la ecuación implícita de las trayectorias. A partir de ésta, indica cómo se pueden calcular sus ejes y su excentricidad. Relacionar con los resultados obtenidos anteriormente para sistemas lineales.

157.– Consideremos un péndulo, cuya evolución temporal viene descrita por la ecuación diferencial $\ddot{x} + \omega^2 \operatorname{sen}(x) = 0$. Plantear el sistema de primer orden equivalente y hallar las órbitas. ¿Cuál es el significado de la solución $F(x, \dot{x}) = c$?

Diagramas de fases

158.– Dibujar los diagramas de fases de los siguientes sistemas planos.

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y^2 - 1 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = \operatorname{sen}(x). \end{cases}$
3. $\begin{cases} \dot{x} = 1 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$
4. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 + y^2 - 1 \\ \dot{y} = xy. \end{cases}$

159.– Un modelo para la evolución de un sistema predador-presa viene dado por el sistema de ecuaciones diferenciales de Lotka-Volterra,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y, \end{cases}$$

donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ son constantes positivas. En estas ecuaciones, la variable x representa el número de presas, mientras que la variable y representa el número de predadores, siendo ambas no negativas. Hallar la ecuación de las órbitas y resolverla. Representa el diagrama de fases y explica el comportamiento cualitativo de las soluciones en términos de las poblaciones citadas.

Trayectorias ortogonales

160.– Halla la familia de curvas ortogonal a la familia de circunferencias de centro en el eje X y que pasan por el origen.

161.– Halla las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

1. $xy = c$
2. $y = cx^2$

162.– Calcula la familia de curvas que forma un ángulo de 45 grados con la familia de circunferencias cuyo centro está en la bisectriz del primer cuadrante y pasan por el origen.

163.– Prueba que las trayectorias ortogonales a una familia de curvas dada en coordenadas polares (r, θ) por la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{d\theta} = f(r, \theta)$$

verifica la ecuación

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r^2}{f(r, \theta)}.$$

Calcula las trayectorias ortogonales a las siguientes familias de curvas

1. $r = 2c \operatorname{sen} \theta$
2. $r = c/(1 - \cos \theta)$