## 12. Ecuaciones escalares no autónomas: Métodos clásicos de integración

### Separables

**101.–** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $t^2\dot{x} = 1$
2. $\dot{x} = \frac{x^3}{t^2}$
3. $dx = e^{3t+2x}dt$
4. $(4x + xt^2)\dot{x} = 2t + tx^2$
5. $tx\dot{x}\ln t = (x+1)^2$.

**102.–** Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\operatorname{sen} t(e^{-x} + 1) + (1 + \cos t)\dot{x} = 0, \qquad x(0) = 0$
2. $x\dot{x} = 4t\sqrt{x^2+1}, \qquad x(0) = 1$
3. $\dot{x} = 4(t^2 + 1), \qquad x(0) = 3$
4. $t^2dx + (tx - x)dt = 0, \qquad x(-1) = -1$.

### Exactas

**103.–** Determinar si las siguientes ecuaciones diferenciales son exactas, y si lo son, resolverlas.

1. $5t + 4x + (4t - 8x^3)\dot{x} = 0$
2. $(2x - \dfrac{1}{t} + \cos 3t)\dot{x} + \dfrac{x}{t^2} - 4t^3 + 3x \operatorname{sen} 3t = 0$
3. $x\ln x - e^{-tx} + (\dfrac{1}{x} + t\ln x)\dot{x} = 0$
4. $(x^3 - x^2 \operatorname{sen} t - t)dt + (3tx^2 + 2x\cos t)dx = 0$
5. $(e^x + 2tx\cosh t)\dot{x} + tx^2 \operatorname{senh} t + x^2\cosh t = 0$
6. $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} - \dfrac{x}{t^2+x^2} + \Big(xe^x + \dfrac{t}{t^2+x^2}\Big)\dot{x} = 0.$

**104.–** Resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$x^2\cos t - 3t^2x - 2t + (2x\operatorname{sen} t - t^3 + \ln x)\dot{x} = 0, \qquad x(0) = \mathrm{e}.$$

**105.–** Hallar el valor de k de modo que la ecuación diferencial siguiente sea exacta:

$$x^3 + ktx^4 - 2t + (3tx^2 + 20t^2x^3)\dot{x} = 0.$$

### Factores integrantes

**106.–** Resolver la ecuación diferencial

$$-tx\operatorname{sen} t + 2x\cos t + 2t\cos t\dot{x} = 0$$

con ayuda del factor integrante $\mu(t,x) = tx$.

**107.–** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando un factor integrante adecuado.

1. $2tx + (x^2 - 3t^2)\dot{x} = 0$
2. $tx - t^2\dot{x} = 0$
3. $tx^2 + t^2x^2 + 3 + t^2x\dot{x} = 0$
4. $x + tx^2 + (t - t^2x)\dot{x} = 0$

**108.–** Supongamos que la ecuación diferencial $\mathrm{e}^t \sec x - \tan x + \dot{x} = 0$ tiene un factor integrante de la forma $e^{-at}\cos x$ para algún $a \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de la constante $a$ y resolver la ecuación diferencial.

**109.–** Suponer que la ecuación diferencial $f(t)\dot{x} + t^2 + x = 0$ tiene un factor integrante $\mu(t) = t$. Encontrar todas las posibles funciones $f(t)$.

**110.–** Hallar las condiciones que deben cumplir las funciones $P$ y $Q$ para que la ecuación diferencial $P(t,x)\dot{x} + Q(t,x) = 0$ admita un factor integrante que sea función de $t^2x$.

### Homogéneas y otras

**111.–** Indicar si las siguientes funciones son homogéneas y de que grado:

1. $t^2 + 2tx - \dfrac{x^3}{t}$
2. $\dfrac{t^3x - t^2x^2}{t + 8x}$
3. $\cos \frac{t^2}{t+x}$
4. $\ln t^2 - 2\ln x$
5. $(t^{-1} + x^{-1})^2$.

**112.–** Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:

1. $t - x + t\dot{x} = 0$
2. $t + (x - 2t)\dot{x} = 0$
3. $x^2 + tx - t^2\dot{x} = 0$
4. $-x + (t + \sqrt{tx})\dot{x} = 0$
5. $x + t\cot\frac{x}{t} - t\dot{x} = 0$.

**113.–** Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $tx^2\dot{x} = x^3 - t^3, \quad x(1) = 2$
2. $x + t(\ln t - \ln x - 1)\dot{x} = 0, \qquad x(1) = e$
3. $t\dot{x} = x + \sqrt{t^2 + x^2}, \qquad x(1) = 0$.

**114.–** Dada la ecuación diferencial $P(t,x)dx + Q(t,x)dt = 0$, donde $P$ y $Q$ son funciones homogéneas del mismo grado, comprobar que $\mu(t,x) = 1/(tQ(t,x) + xP(t,x))$ es un factor integrante de dicha ecuación, supuesto que $xP(t,x) + tQ(t,x)$ no es cero. Estudia el caso en el que $xP(t,x) + tQ(t,x)$ sea idénticamente cero. Aplica este resultado a la resolución de la ecuación $(x^4 + t^4)dx - xt^3dt = 0$.

**115.–** Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales, reduciéndolas a separables mediante un cambio de variable.

1. $\dot{x} = (t + x + 1)^2$
2. $\dot{x} = \tan^2(t + x)$
3. $\dot{x} = 2 + \sqrt{x - 2t + 3}$
4. $t + 2x + 3 + (2t + 4x - 1)\dot{x} = 0$

**116.–** Hallar la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales utilizando un método adecuado.

1. $\mathrm{e}^{\frac{t}{x}}(x - t)\dot{x} + x(1 + e^{\frac{t}{x}}) = 0$
2. $(t^2x - t)\dot{x} + 2t^2 + x = 0$
3. $e^x \operatorname{sen} t + \cos t(e^{2x} - x)\dot{x} = 0$
4. $2t\dot{x} = 4t^2 - 3x$
5. $(t + x)\operatorname{sen} x + (t \operatorname{sen} x + \cos x)\dot{x} = 0$
6. $3x + \mathrm{e}^t + (3t + \cos x)\dot{x} = 0$
7. $(t - \sqrt{tx})\dot{x} = x$
8. $\dot{x} = \mathrm{e}^t\mathrm{e}^x - 1$
9. $(3t^2x - t)\dot{x} + 5tx^2 - 2x = 0$