8. Sistemas lineales con coeficientes variables

Sistemas homogéneos

61.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

62.– Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4t \\ 0 & -1+\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

63.– Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y hallar la matriz resolvente.

1. $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & 1 \\ 0 & 1+\cos t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-1 & -2 \\ 1 & t+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

64.– Consideremos la ecuación diferencial $\dot{X} = A(t)X$. Hallar la ecuación diferencial que se obtiene al cambiar la variable dependiente $X = Q(t)Y$, donde $Q(t)$ es una matriz derivable e invertible. Hallar la relación entre las matrices resolventes de ambos sistemas.

65.– Calcular la matriz resolvente del sistema $\dot{X} = A(t)X$, donde $A(t)$ es la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Resolver el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X$, $X(0) = (1,1,1)$.

66.– Supongamos que $A(t)$ es una matriz real antisimétrica, $A(t)^{\mathsf{T}} = -A(t)$. Probar que existe una matriz fundamental del sistema $\dot{X} = A(t)X$ que es una matriz ortogonal. ¿Es también ortogonal la matriz resolvente?

67.– Sean $\varphi\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funcion continua y A_0 una matriz real. Probar que la matriz resolvente para el sistema $\dot{X} = \varphi(t)A_0\,X$ es

$$\mathcal{R}(t,s) = \exp\left[\left(\int_s^t \varphi(\tau)\,d\tau\right) A_0\right], \qquad t,s \in I.$$

Utilzar este resultado para resolver el sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t & t \\ -t & 2t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

68.– Sea $M(t)$ una matriz fundamental de un sistema diferencial lineal $\dot{X} = A(t)X$, y sea $\mathcal{R}(t, t_0)$ la matriz resolvente. Demostrar que existe una matriz regular P tal que $M(t) = \mathcal{R}(t, t_0)P$. Demostrar que si $M(t)$ y $N(t)$ son dos matrices fundamentales, existe una matriz regular Q tal que $M(t) = N(t)Q$.

69.– Halla la ecuación diferencial que deben satisfacer los coeficientes del vector $\alpha(t) = [\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)]$ para que se satisfaga la siguiente propiedad: Para toda solución del sistema lineal $\dot{X} = A(t)X$ se tiene que el producto escalar $\alpha(t) \cdot X(t)$ es una función constante.

Sistemas no homogéneos

70.– Resolver el problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

71.– Si $A(t)$ y $b(t)$ son las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{e}^{-t} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 1 \end{bmatrix},$$

resolver el problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(1) = (1, 0, 1)$.

Ecuaciones de orden superior

72.– Sabiendo que $y_1(t) = t$ e $y_2(t) = \mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial $\ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = 0$, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + P(t)\dot{y} + Q(t)y = (1-t)\mathrm{e}^t \\ y(0) = 0, \dot{y}(0) = 1. \end{cases}$$

73.– Probar que e^t y $t\mathrm{e}^t$ forman un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = 0.$$

Utilizar este hecho para resolver la ecuación no homogénea

$$t\ddot{y} - 2t\dot{y} + ty = \mathrm{e}^t$$

en el intervalo $(0, \infty)$.

74.– Sabiendo que e^{-2t} y $t\mathrm{e}^t$ son soluciones de la ecuación diferencial

$$\ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = 0,$$

resolver el problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} + a(t)\dot{y} + b(t)y = t \\ y(0) = 1, \ \dot{y}(0) = 0. \end{cases}$$

75.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2t\dot{y} + (t^2 - 1)y = \mathrm{e}^{\frac{t^2-4t}{2}} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

sabiendo que la ecuación homogénea admite una solución de la forma $y(t) = \mathrm{e}^{at^2}$, para alguna constante $a \in \mathbb{R}$.

76.– Consideremos la ecuación de segundo orden $t^2\ddot{y} + \alpha t\dot{y} + \beta y = f(t)$. Transformarla a sistema usando las variables $x_1 = y$, $x_2 = t\dot{y}$, y resolver la ecuación homogénea utilizando el resultado del ejercicio 67. Este tipo de ecuaciones se llaman *ecuaciones de Euler*.

77.– Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de Euler:

1. $t^2\ddot{y} - 4t\dot{y} + 4y = 0$
2. $t^2\ddot{y} + 2t\dot{y} + 4y = 0$
3. $t^2\ddot{y} + t\dot{y} + 4y = \operatorname{sen}(\ln t)$
4. $t^2\ddot{y} - 2t\dot{y} + 2y = 3t^2 + 2\ln t$

78.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} - 3t\dot{y} + 3y = 2t^3 - t^2 \\ y(1) = -1, \ \dot{y}(1) = 1 \end{cases}$$

en el intervalo $(0, \infty)$

79.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \dot{y}\operatorname{ctg} t + y \operatorname{sen}^2 t = 0.$$

Utilizando las variable $x_1 = y$ y $x_2 = \dot{y}/\operatorname{sen} t$, plantéese como sistema de primer orden en dichas variables. Resolver dicho sistema y dar la solución de la ecuación diferencial anterior.

80.– Sabiendo que $y(t) = \mathrm{e}^t$ es solución de la ecuación diferencial $(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 0$, hallar la solución general de

$$(t-1)\ddot{y} - t\dot{y} + y = 2\mathrm{e}^t.$$

81.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} \ddot{y} - 2t\dot{y} + (t^2-1)y = \mathrm{e}^{\frac{t^2-4t}{2}} \\ y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = 1, \end{cases}$$

sabiendo que la ecuación homogénea admite una solución de la forma $y(t) = \mathrm{e}^{at^2}$, para algún $a \in \mathbb{R}$.