7. Ecuaciones lineales con coeficientes variables

55.– Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

1. $\dot{x} + x\cos t = 0$
2. $t^2\dot{x} + tx = 1$
3. $(1+t^2)\dot{x} + tx + t^3 + t = 0.$

56.– Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\dot{x} + t\sqrt{1+t^2}x = 0, \quad x(0) = 1$
2. $(1+t^2)\dot{x} + 4tx = 1, \quad x(1) = 1/4$
3. $(1+t^2)\dot{x} + 2tx = f(t), \quad x(0) = 0$; siendo f la función

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ -t & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

57.– La ecuación diferencial

$$\dot{x} + P(t)x = f(t)x^n$$

se conoce con el nombre de *ecuación de Bernoulli*. Si $n = 0$ o $n = 1$ entonces dicha ecuación es lineal. Si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, demuestra que la substitución $y = x^{1-n}$ la transforma en una ecuación diferencial lineal. Resolver la ecuación diferencial

$$t\dot{x} + x = t^2x^2$$

utilizando este método.

58.– Sea $u(t)$ una función continua y derivable en $\mathbb{R}^+$, que satisface $t\dot{u}(t) \leq u(t)$ para todo $t > 0$, con $u(1) = 1$. Probar que $u(t)$ satisface $u(t) \leq t$ para todo $t > 1$, y que $\dot{u}(t) \leq 1$ para todo $t > 1$.

59.– Sea $u(t)$ una función no negativa, continua y derivable en $[t_0, t_1]$, y que satisface $\dot{u}(t) \leq a(t)u(t)$ para todo $t \in [t_0, t_1]$. Probar que si $u(t)$ se anula en algún punto del intervalo $[t_0, t_1]$ entonces u es la función nula a partir de dicho punto.

60.– Enunciar y demostrar resultados similares a la desigualdad de Gronwall que sean válidos para tiempos menores que el tiempo inicial.