4. Sistemas lineales con coeficientes constantes

Sistemas de primer orden

24.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\\ z(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

25.– Utilizando la exponencial matricial, hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(2)\\ y(2)\\ z(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}.$$

26.– Hallar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases}\dot{x} = -2y + \operatorname{sen}(t)\\ \dot{y} = 2x + 1\end{cases}$$

con condiciones iniciales $x(0) = -1$, $y(0) = 1$.

27.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}t\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(0)\\ y(0)\\ z(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

28.– Hallar la solución del problema de valor inicial

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{t}\\ 0\\ \mathrm{e}^{-t}\end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix}x(2)\\ y(2)\\ z(2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}.$$

29.– Sea A una matriz triangular superior por bloques

$$A = \begin{bmatrix}A_1 & B\\ 0 & A_2\end{bmatrix}.$$

Probar que la exponencial de A es también triangular por bloques

$$\mathrm{e}^{A} = \begin{bmatrix}\mathrm{e}^{A_1} & C\\ 0 & \mathrm{e}^{A_2}\end{bmatrix},$$

hallando el valor de C.

30.– Consideremos el sistema lineal $\dot{X} = AX + b(t)$, donde $b(t)$ es una función periódica de periodo $T > 0$.

1. Probar que si $X(t)$ es una solución del sistema, entonces $X(t+T)$ también lo es.
2. Probar que $X(t)$ es una solución periódica de periodo T si y sólo si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $X(t_0) = X(t_0 + T)$.
3. Probar que el sistema homogéneo admite soluciones T-periódicas no triviales si y sólo si e^{TA} tiene un valor propio 1. ¿Cuales son las soluciones periódicas? ¿Cómo son los valores propios de A?
4. Probar que si la única solución T-periódica del sistema homogéneo es la solución trivial entonces el sistema no homogéneo tiene una única solución T-periódica cuyo valor inicial viene dado por

$$X_0 = (\mathrm{e}^{-TA} - I_n)^{-1} \int_0^T e^{-\tau A} b(\tau)\, d\tau.$$

Ecuaciones de orden superior

31.– Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales de orden superior:

1. $y^{IV} - 5\dddot{y} + 6\ddot{y} + 4\dot{y} - 8y = 0$
2. $y^{IV} + \dddot{y} + \ddot{y} = 0$
3. $y^{V} - 16\dot{y} = 0$
4. $y^{V} + 5y^{IV} - 2\dddot{y} - 10\ddot{y} + \dot{y} + 5y = 0$
5. $y^{IV} + y = 0$
6. $\dddot{y} + \dot{y} = \tan t$
7. $\dddot{y} - 4\dot{y} = t + \cos t + 2e^{-2t}$

32.– Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $y^{IV} - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0, \quad \dddot{y}(0) = -1$
2. $y^{IV} + 4\dddot{y} + 14\ddot{y} - 20\dot{y} + 25y = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 0$
3. $y^{IV} - 3\dddot{y} + 3\ddot{y} - \dot{y} = 0, \quad y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \dddot{y}(0) = 1$
4. $\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + y = t + e^{-t}, \quad y(0) = 1, \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 0.$

33.– Utilizando el método de los coeficientes indeterminados, hallar una solución particular de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales

1. $\ddot{y} - y = t\mathrm{e}^{t} + \cos t$
2. $\dddot{y} - \dot{y} = \mathrm{sen}(t)\cos(t)$.
3. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5\ddot{y} = t - 1 + \mathrm{e}^{2t}$.

34.– Sea γ la función de Green para el problema de Cauchy de la ecuación diferencial

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0 y = 0.$$

Probar que la familia de funciones $y_1 = \gamma, y_2 = \dot{\gamma}, \ldots, y_n = \gamma^{(n-1)}$ es un sistema fundamental de soluciones de dicha ecuación (i.e. son soluciones y cualquier otra solución se puede poner de forma única como combinación lineal de ellas).

35.– Consideramos una matriz $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ y sea

$$p(s) = s^m + \alpha_{m-1}s^{m-1} + \cdots + \alpha_1 s + \alpha_0$$

un polinomio que anula a la matriz A (por ejemplo, su polinomio característico, en cuyo caso $m = n$). Consideremos las funciones $y_1(t), \ldots, y_m(t)$ definidas como sigue: la función $y_i(t)$ es la solución de la ecuación diferencial

$$y^{(m)} + \alpha_{m-1}y^{(m-1)} + \cdots + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0 y = 0,$$

con condiciones iniciales $(y(0), \dot{y}(0), \ldots, y^{(m-1)}(0))$ iguales al i-ésimo vector de la base canónica, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$. Entonces, se puede probar que

$$\mathrm{e}^{tA} = y_1(t)I_n + y_2(t)A + \cdots + y_m(t)A^{m-1}.$$

Utilizar este resultado para hallar la exponencial de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sistemas de orden superior

36.– Resolver los siguientes problemas de valor inicial:

1. $\begin{cases} \ddot{x} + y = 1 \\ x + \ddot{y} = -1 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -1.$

2. $\begin{cases} 2\dot{x} - \dot{y} + y = 0 \\ \ddot{x} - \dot{y} + x - 2y = 0 \end{cases}$ $\quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 1, \quad y(0) = 1.$

37.– Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\dot{y} + y - 4z = 1 \\ \dot{z} + z = 0 \end{cases}$$

con condiciones iniciales $y(0) = \dot{y}(0) = 1, z(0) = 1/4$.