Primer parcial 28/01/2021

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define, con precisión, qué se entiende por matriz resolvente de un sistema diferencial lineal. Enuncia y demuestra sus principales propiedades.

2.– Sea $A(t)$ una función matricial, continua en toda la recta real, y cuya traza es constante y no nula. Probar que existe una solución del sistema $\dot{X} = A(t)X$ que no está acotada.

3.– Consideremos la matriz real A y la función vectorial $b(t)$ dados por

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad b(t) = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

i) Halla e^{tA}.

ii) Utilizando la transformada de Laplace resuelve el problema de valor inicial $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [0, 0, 1]$.

iii) Hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 0, 1]$.

4.– Clasifica el diagrama de fases del sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+a & 2 \\ -2 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Para $a = \sqrt{8}$ dibuja con precisión el diagrama de fases.

5.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t-1 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Hallar la matriz resolvente del sistema homogéneo. Hallar la solución del sistema con condición inicial $X(0) = [0, 1]$.