Examen Global. Segunda convocatoria 10/09/2019

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sea $R(t,\tau)$ una función matricial con dominio en $\mathbb{R}^2$ y valores en las matrices cuadradas reales $n \times n$, que es derivable con respecto a la variable t, y que satisface $R(t,t) = I_n$, $R(t,s)R(s,u) = R(t,u)$ para todos $t, s, u \in \mathbb{R}$. Demostrar que

- $R(t,\tau)$ es invertible y $R(\tau,t) = R(t,\tau)^{-1}$, para todo $t, \tau \in I$.
- La matriz $\frac{\partial R}{\partial t}(t,\tau)R(\tau,t)$ es independiente de τ.
- R es la matriz resolvente de un sistema $\dot{X} = A(t)X$, donde $A(t)$ es la matriz del apartado anterior.

2.– Supongamos que f es continua y satisface la condición local de Lipschitz en $\mathcal{D} = (a,b) \times \mathbb{R}^n$. Demostrar que si existen dos funciones continuas $\alpha, \beta \colon (a,b) \to \mathbb{R}$, con $\alpha(t) \geq 0$, y tales que

$$||f(t,x)|| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t),$$

para todo $t \in (a,b)$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces toda solución maximal de $\dot{x} = f(t,x)$ es global.

3.– Consideremos el sistema lineal

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{bmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es un parámetro.

1. Estudia la estabilidad del sistema en función de los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$.
2. Para $a = 1$ halla la solución general del sistema homogéneo.
3. Para $a = 1$ halla la solución del sistema completo con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$.

4.– Sea $x = \psi(t, t_0, x_0, \dot{x}_0, \mu)$ la solución general de la ecuación diferencial

$$(1-t)\ddot{x} + t\dot{x} - x = (1-t)^2\mu,$$

para $t \in (-\infty, 1)$. Sabiendo que $\psi(t,0,0,1,0) = t$ y que $\psi(t,0,1,1,0) = \mathrm{e}^t$, halla la derivada parcial $\frac{\partial \psi}{\partial \mu}(t, 0, x_0, \dot{x}_0, 0)$.

5.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = xy - x^2 \\ \dot{y} = xy - 2x^2. \end{cases}$$

1. Halla la ecuación de las órbitas y resuélvela.

2. Halla los puntos de equilibrio. ¿Cuántas órbitas hay en cada solución de la ecuación de las órbitas?
3. Prueba que el dominio maximal de toda solución es $\mathbb{R}$.

Cada pregunta vale 2 puntos