Examen Global. Primera convocatoria 17/06/2019

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sea A una matriz cuadrada de dimensión n, y consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden $\ddot{X} = AX$. Hallar las condiciones que deben cumplir un escalar $s \in \mathbb{C}$ y un vector $v \in \mathbb{C}^n$ para que la función vectorial $X(t) = \mathrm{e}^{st}v$ sea una solución no trivial de dicho sistema. ¿Se pueden obtener todas las soluciones de dicho sistema como combinación lineal de funciones de la citada forma? (Demuestra lo que afirmes o pon un contraejemplo).

2.– Supongamos que f es continua y satisface la condición local de Lipschitz en $\mathcal{D} = (a, b) \times \mathbb{R}^n$. Demostrar que si existen dos funciones continuas $\alpha, \beta \colon (a, b) \to \mathbb{R}$, con $\alpha(t) \geq 0$, y tales que

$$||f(t, x)|| \leq \alpha(t)||x|| + \beta(t),$$

para todo $t \in (a, b)$ y todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces toda solución de $\dot{x} = f(t, x)$ es global.

3.– Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & a \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde a es un parámetro real. Discutir, en función del valor de a, la estabilidad del sistema $\dot{X} = AX$. Para $a = 1$, mediante vectores propios generalizados, hallar la exponencial de tA. Mediante la transformada de Laplace, hallar la solución de $\dot{X} = AX + b(t)$, $X(0) = [1, 0, 0]$, donde $b(t) = [\mathrm{e}^t, 0, 0]$.

4.– Halla la solución del problema de valor inicial

$$\begin{cases} t^2\ddot{y} - t\dot{y} + y = t + \ln t \\ y(1) = 1, \\ \dot{y}(1) = 1. \end{cases}$$

Halla la matriz resolvente del sistema de orden 1 equivalente. Indica claramente el dominio en el que es válida tu solución.

5.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = -2y \\ \dot{y} = x^3 - x. \end{cases}$$

1. Representa el diagrama de fases. Indica claramente todos los elementos (puntos de equilibrio, nulclinas, separatrices, ...). Halla la ecuación explícita de las separatrices
2. Prueba que el dominio maximal de toda solución es $\mathbb{R}$.

Cada pregunta vale 2 puntos.