Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Define con precisión qué entendemos por matriz resolvente de un sistema homogéneo de ecuaciones diferenciales lineales $\dot{X} = A(t)X$. Enuncia y demuestra sus principales propiedades. Halla, en función de la matriz resolvente, la solución del problema de valor inicial $\dot{X} = A(t)X + b(t)$, $X(t_0) = X_0$.

2.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \ddot{x} = x - y \\ \ddot{y} = y - x. \end{cases}$$

Halla la solución que satisface $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$.

3.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{x} + \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

con μ un parámetro real.

1. Para $\mu > 0$ prueba que todas sus soluciones están definidas (al menos) en el intervalo $[0, +\infty)$.
2. Analizar la estabilidad del punto de equilibrio $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ en función de los valores del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$.
3. Si $x = \phi(t, t_0, x_0, \dot{x}_0, \mu)$ denota la solución general maximal de dicha ecuación, halla la derivada parcial de ϕ con respecto a μ, y la derivada parcial de ϕ con respecto a $\dot{x}_0$, ambas en el punto $(t, t_0 = 0, x_0 = 0, \dot{x}_0 = 0, \mu = 2)$. (Razona cómo obtienes la ecuación variacional)

Ayuda: Para la primera cuestión considerar la derivada de la función $D(t) = x(t)^2 + \dot{x}(t)^2$.

4.– Consideremos un problema de valor inicial $\dot{x} = f(t, x)$, $x(0) = 3$. De la función f sabemos que tiene dominio $\mathcal{D} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que es continua y satisface la condición de Lipschitz local en $\mathcal{D}$. Además, satisface

$$x^2 - 4 < f(t, x) < x^2 + 1, \qquad \text{para todo } (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

A partir de estos datos, da una estimación del dominio de la solución maximal de dicho problema (razona la respuesta).

Cada pregunta tiene un valor de 2.5 puntos