Examen Global. Segunda convocatoria 06/09/2016

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1.– Sea A una matriz cuadrada, real o compleja, de dimensión n. Probar que todos y cada uno de los valores propios de e^A son de la forma e^λ para λ un valor propio de A.

2.– Consideremos la ecuación diferencial

$$\dddot{y} + \ddot{y} + \dot{y} + ay = 4\mathrm{e}^{t-1},$$

Para $a = 1$ hallar la solución que satisface $y(1) = 1$, $\dot{y}(1) = 1$, $\ddot{y}(1) = 1$.

Analizar la estabilidad de la ecuación diferencial en función del valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

3.– Consideremos la ecuación diferencial de segundo orden

$$\ddot{y} - \frac{t}{t-1}\dot{y} + \frac{1}{2}y^2 = \frac{3}{2}\frac{t+1}{(t-1)^3},$$

cuya solución general maximal denotaremos por $y = \phi(t, t_0, y_0, \dot{y}_0)$. La solución con $y(0) = -1$, $\dot{y}(0) = 1$ es

$$y = \phi(t, 0, -1, 1) = \frac{1}{t-1}.$$

Hallar las derivadas parciales de la solución general ϕ de la ecuación diferencial con respecto a las condiciones iniciales en el punto $(t, t_0, y_0, \dot{y}_0) = (t, 0, -1, 1)$.

4.– Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y^2 \\ \dot{y} = y^2 - 1. \end{cases}$$

1. Hallar los puntos de equilibrio, las nulclinas y dibujar el diagrama de fases.
2. Para cada uno de los puntos de equilibrio representar con precisión el diagrama de fases del sistema linealizado y clasificarlo.
3. Probar que la solución maximal del sistema anterior con condiciones iniciales $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$ tiene dominio $\mathbb{R}$ si y sólo si $|y_0| \leq 1$.

5.– Razona si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, probando las que sean ciertas y dando un contraejemplo para las que sean falsas. Todas ellas se refieren a un sistema de ecuaciones diferenciales autónomo $\dot{x} = f(x)$, con f de clase C^1 en un abierto conexo $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$.

1. Toda solución que comienza suficientemente cerca de un punto de equilibrio estable se mantiene acotada, es decir: si p es estable, entonces existen $\delta > 0$ y $M > 0$ tal que si $||x_0 - p|| < \delta$ entonces $||\psi(t, 0, x_0) - p|| \leq M$ para todo $t \geq 0$.
2. Si la ecuación variacional lineal en la solución de equilibrio es estable entonces el punto de equilibrio es estable, es decir: si p es un punto de equilibrio, $A = Df(p)$ y $\dot{X} = AX$ es un sistema lineal estable entonces p es un punto de equilibrio estable.
3. Sea p es un punto de equilibrio. Para todo $a > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $||x_0 - p|| < \delta$, entonces el dominio de la solución maximal de $\dot{x} = f(x)$, $x(0) = x_0$ contiene al intervalo $(-a, a)$.

Cada pregunta tiene un valor de 2 puntos