

Matemáticas I

HOJA 2

1) Calcular los siguientes límites, si existen:

- i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$
- ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{\cos(x) + e^{-\frac{1}{x}}}$
- iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}$
- iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$
- v) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$
- vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{2x^2 - x - 2}$
- vii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x - a}}{\sqrt{x^2 - a^2}}$
- viii) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\operatorname{ctg}(x)^2}$
- ix) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}$
- x) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$

2) Estudiar las asíntotas (horizontales y verticales) de las siguientes funciones:

- i) $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - 1}$
- ii) $f(x) = \frac{\sin 4x}{x}$
- iii) $f(x) = \ln \left| \frac{x^2 - 2x - 15}{x + 3} \right|$

3) Sea f una función que satisface $|f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Demostrar que f es continua en 0.

4) Sea g una función continua en $x = 0$ y tal que $g(0) = 0$. Sea f otra función tal que $|f(x)| \leq |g(x)|, \forall x \in \mathbb{R}$. Probar que f es continua en $x = 0$.

5) Estudiar la continuidad en \mathbb{R} de las funciones

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x) &= \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1, \\ \frac{3}{x+2} & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \\ \text{ii) } f(x) &= \begin{cases} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} & \text{si } x \neq 0, \quad x \neq 1, \\ f(0) = f(1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

6) Elegir, en cada apartado, a y b para que f sea continua en todos los puntos de \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \text{i) } f(x) &= \begin{cases} -3 \sin x & \text{si } x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \\ \text{ii) } f(x) &= \begin{cases} \frac{x^2 - ax - 6}{x-2} & \text{si } x > 2, \\ x^2 + b & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \\ \text{iii) } f(x) &= \begin{cases} e^{g(x)} & \text{si } x > 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \\ e^{\frac{1}{x}} + b & \text{si } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

donde $g(x)$ es continua y $g(0) = a$.

7) Calcula λ para que la función f sea continua en \mathbb{R}

$$f(x) = \frac{1}{\lambda x^2 - 4\lambda x + 4}$$

8) Estudiar la continuidad la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \operatorname{sen}(x))^{2n}}, & -\frac{\pi}{6} \leq x < \frac{\pi}{6}, \\ x, & x \geq \frac{\pi}{6} \quad \text{ó} \quad x < -\frac{\pi}{6}. \end{cases}$$