TEMA 4.- SISTEMAS DE ECUACIONES

Definición: Sea el sistema de n ecuaciones lineales con m incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nm}x_m=b_n \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \rightarrow A\cdot X=C$$

La forma $A\cdot X=C$ se llama forma matricial del sistema.

A = Matriz de **coeficientes.**
C = Matriz de **términos independientes.**
B = Matriz **ampliada.**

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} B= \\ \text{ó} \\ A^* \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Nota: Si $b_i=0$ se dice que el sistema es homogéneo (siempre son compatibles).

TODO SISTEMA HOMOGENEO TIENE SOLUCIÓN → SCD → sol única trivial
→ SCI → ∞ soluciones, una de ellas la trivial

Resolución de sistemas:

1) CRAMER: Un sistema de ecuaciones $A\cdot X=C$ es sistema de Cramer si tiene tantas ecuaciones como incógnitas y además $|A|\neq 0$.

La solución se calcula como $x_i=\dfrac{|A_i|}{|A|}$

Donde A_i es la matriz que resulta de sustituir en la columna i la matriz columna de los términos independientes.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{r} x+5y+4z=3 \\ -x+2y+z=2 \\ x-3y+5z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix}=47$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}3 & 5 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{30+5-24-8+9-50}{47}=\frac{-38}{47}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{10+3-4-8-1+15}{47}=\frac{15}{47}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 5 & 3\\ -1 & 2 & 2\\ 1 & -3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 5 & 4\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 5\end{vmatrix}}=\frac{2+10+9-6+6+5}{47}=\frac{26}{47}$$

2) GAUSS: El objetivo es triangular la matriz A mediante combinaciones lineales y aplicar después el método del REMONTE.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+2z-t=5\\ 4x+y-z+2t=-1\\ 2x-y+3z+t=7\\ -x+6y-3z+t=0\end{array}\right\}\rightarrow\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 5\\ 4 & 1 & -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & 7\\ -1 & 6 & -3 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 9 & -9 & 6 & -21\\ 0 & 3 & -1 & 3 & -3\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 5\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 9 & -9 & 6 & -21\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 3 & \frac{-8}{3} & \frac{43}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -2 & 2 & -1 & 5\\ 0 & 9 & -9 & 6 & -21\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 0 & \frac{-25}{6} & \frac{25}{3}\end{vmatrix}$$

Aplicamos ahora el método del REMONTE:

$$\frac{-25}{6}t = \frac{25}{3} \rightarrow t = -2$$
$$2z + t = 4 \rightarrow z = 3$$
$$9y - 9z + 6t = -21 \rightarrow y = 2$$
$$x - 2y + 2z - t = 5 \rightarrow x = 1$$

Estudio del carácter de un sistema

1) ROUCHÈ-FRÖBENIUS

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{array}\right\} \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

- Si rango(A)=rango(B)=nº de incógnitas ➔ el sistema es **compatible determinado.** SCD
- Si rango(A)=rango(B)<nº de incógnitas ➔ el sistema es **compatible indeterminado.** SCI
- Si rango(A)$\neq$ rango(B) ➔ el sistema es **incompatible.** SI

Para sistemas homogéneos:

- rango(A) < nº de incógnitas ➔ existen infinitas soluciones.
- rango(A) = nº de incógnitas ➔ solución única = solución trivial.

2) MÉTODO FACTORIZACION LU
3) MÉTODO DE CHOLESKY.
} NO EN ICAI

Ejemplo de ROUCHE-FRÖBENIUS

Discutir el siguiente sistema según los diferentes valores de los parámetros reales "a" y "b".

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 4 \\ 3x - ay + 2z = 3 \\ 4x - 3y + 3z = 7 \\ 7x - y + 5bz = -8 + b \end{array}\right\}$$

Solución Mala:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 3 & -a & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 7 & -1 & 5b\end{pmatrix} \qquad B=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 3 & -a & 2 & 3\\ 4 & -3 & 3 & 7\\ 7 & -1 & 5b & -8+b\end{array}\right)$$

Vamos a triangular el sistema de ecuaciones mediante transformaciones tipo **FILA**. En cada paso obtendremos un sistema equivalente al inicial. El sistema triangularizado nos permitirá conocer los valores de “a” y de “b” que modifican el carácter.

$$\left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 3 & -a & 2 & 3\\ 4 & -3 & 3 & 7\\ 7 & -1 & 5b & -8+b\end{array}\right| \underset{\substack{F2=F2-3F1\\ F3=F3-4F1\\ F4=F4-7F1}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & -a-3 & -1 & -9\\ 0 & -7 & -1 & -9\\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36\end{array}\right| \underset{\substack{\text{CONMUTAMOS}\\ \text{F2 POR F3}}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & -7 & -1 & -9\\ 0 & -a-3 & -1 & -9\\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36\end{array}\right| \underset{\substack{F2=-F2\\ F3=-F3}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 1 & 9\\ 0 & a+3 & 1 & 9\\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36\end{array}\right| \underset{\substack{F3=-7F3+(a+3)F2\\ F4=7F4+8F2}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180\end{array}\right| \underset{\substack{F4=-(a-4)F4+(35B-41)F3\\ \text{+CUIDADO!}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & +7 & +1 & +9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & 0 & (a-4)(308b-189)\end{array}\right|$$

CASOS POSIBLES:

1) Si $(a-4)(308b-189)\neq 0 \rightarrow \begin{Bmatrix}Rango(B)=4\\ Rango(A)\leq 3\end{Bmatrix} \rightarrow$ **Sistema Incompatible**.

2) Si a=4 ¡CUIDADO DONDE SUSTITUYO a=4!

$$\left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & +7 & +1 & +9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & 0 & (a-4)(308b-189)\end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & +7 & +1 & +9\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right| \rightarrow$$

MAL HECHO A PROPÓSITO

BIEN HECHO DESPUÉS

$$\rightarrow \begin{Bmatrix}Rango(B)=2\\ Rango(A)=2\\ N^{o}\,Incogs=3\end{Bmatrix} \rightarrow$$ **Sistema Compatible Indeterminado**

COMPROBAD DIFERENCIAS

3) Si $b=\dfrac{189}{308}$

MAL HECHO A PROPÓSITO

BIEN HECHO DESPUÉS

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 0 & (a-4)(308b-189) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

3.1) Si $a\neq 4$

COMPROBAD DIFERENCIAS

$$\left\{\begin{array}{l} Rango(B)=3 \\ Rango(A)=3 \\ N^o\ Incogs=3 \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{Sistema Compatible determinado}$$

3.2.) Si a=4

COMPROBAD DIFERENCIAS

$$\left\{\begin{array}{l} Rango(B)=2 \\ Rango(A)=2 \\ N^o\ Incogs=3 \end{array}\right\} \rightarrow \textbf{Sistema Compatible Indeterminado}$$

+ CUIDADO!: El problema está mal resuelto porque al triangular el sistema, en este paso hemos multiplicado las filas por valores que pueden anularse, lo cual desvirtúa los resultados. Es decir, si para triangular has de multiplicar una fila por, pongamos un ejemplo, (a-5)...como a-5 se anula cuando a=5...hay que tener cuidado al sustituir en los diferentes casos porque tendremos que sustituir **ANTES** del paso en que multiplicamos por a-5.

La forma correcta de hacer el problema es:

Solución Buena:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -a & 2 \\ 4 & -3 & 3 \\ 7 & -1 & 5b \end{pmatrix} \qquad B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -a & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 7 \\ 7 & -1 & 5b & -8+b \end{array}\right)$$

Vamos a triangular el sistema de ecuaciones mediante transformaciones tipo **FILA**. En cada paso obtendremos un sistema equivalente al inicial. El sistema triangularizado nos permitirá conocer los valores de "a" y de "b" que modifican el carácter.

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -a & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 7 \\ 7 & -1 & 5b & -8+b \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F2=F2-3F1 \\ F3=F3-4F1 \\ F4=F4-7F1}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -a-3 & -1 & -9 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{\text{CONMUTAMOS} \\ \text{F2 POR F3}}}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \\ 0 & -a-3 & -1 & -9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F2=-F2 \\ F3=-F3}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & a+3 & 1 & 9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F3=-7F3+(a+3)F2 \\ F4=7F4+8F2}}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F4=-(a-4)F4+(35B-41)F3 \\ \text{¡CUIDADO!}}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 0 & (a-4)(308b-189) \end{array}\right|$$

<u>CASOS POSIBLES:</u>

1) Si $(a-4)(308b-189) \neq 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=4 \\ Rango(A) \leq 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sistema Incompatible**.

2) Si a=4

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right|$$

2.1) Si $b \neq \dfrac{180}{7}$

2.1.1) Si $b \neq \dfrac{41}{35} \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=3 \\ Rango(A)=3 \\ N^o\, Incogs = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sist. Compatible determ.**

2.1.2) Si $b = \dfrac{41}{35} \rightarrow 0 = 7b-180 \rightarrow$ **Imposible** $\rightarrow$ **Sist. Incompatible**

2.2) Si $b = \dfrac{180}{7} \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=3 \\ Rango(A)=3 \\ N^o\, Incogs = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sist. Compatible determ.**

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -a & 2 & 3 \\ 4 & -3 & 3 & 7 \\ 7 & -1 & 5b & -8+b \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F2=F2-3F1\\ F3=F3-4F1\\ F4=F4-7F1}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -a-3 & -1 & -9 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{\text{CONMUTAMOS}\\ \text{F2 POR F3}}}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & -9 \\ 0 & -a-3 & -1 & -9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F2=-F2\\ F3=-F3}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & a+3 & 1 & 9 \\ 0 & -8 & 5b-7 & b-36 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F3=-7F3+(a+3)F2\\ F4=7F4+8F2}}}{\sim}$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \underset{\boxed{\substack{F4=-(a-4)F4+(35B-41)F3\\ +\text{CUIDADO!}}}}{\sim} \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 0 & (a-4)(308b-189) \end{array}\right|$$

CASOS POSIBLES:

1) Si $(a-4)(308b-189)\neq 0 \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=4 \\ Rango(A)\leq 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sistema Incompatible**.

2) Si a=4

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & +7 & +1 & +9 \\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180 \end{array}\right|$$

2.1) Si $b\neq \frac{180}{7}$

2.1.1) Si $b\neq \frac{41}{35} \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=3 \\ Rango(A)=3 \\ N^{o}\,Incogs=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sist. Compatible determ.**

2.1.2) Si $b=\frac{41}{35} \rightarrow 0=7b-180 \rightarrow$ **Imposible** $\rightarrow$ **Sist. Incompatible**

2.2) Si $b=\frac{180}{7} \rightarrow \left\{\begin{matrix} Rango(B)=3 \\ Rango(A)=3 \\ N^{o}\,Incogs=3 \end{matrix}\right\} \rightarrow$ **Sist. Compatible determ.**

3) Si $b=\dfrac{189}{308}$

$$\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & 35b-41 & 7b-180\end{matrix}\right| \sim \left|\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & \dfrac{-6013}{308} & \dfrac{-54117}{308}\end{matrix}\right| \underset{\boxed{\text{Dividiendo F4 por -6013/308}}}{\sim}$$

$$\sim\left|\begin{matrix}1 & 1 & 1 & 4\\ 0 & 7 & 1 & 9\\ 0 & 0 & a-4 & 9a-36\\ 0 & 0 & 1 & 9\end{matrix}\right|$$

$$\textbf{3.1)}\ \text{Si } a\neq 4 \rightarrow \begin{Bmatrix} Rango(B)=3\\ Rango(A)=3\\ N^{o}\, Incogs=3\end{Bmatrix} \rightarrow \textbf{Sist. Compatible determ}$$

$$\textbf{3.2)}\ \text{Si } a=4 \rightarrow \begin{Bmatrix} Rango(B)=3\\ Rango(A)=3\\ N^{o}\, Incogs=3\end{Bmatrix} \rightarrow \textbf{Sist. Compatible determ}$$

CONCLUSIÓN:

El método más mecánico es triangular el sistema obteniendo un sistema equivalente en el que es más sencillo averiguar los valores que generan los distintos casos.

Al sustituir los casos hay que hacerlo **ANTES** del paso en el que hallamos multiplicado por factores que puedan anularse. Esta es la única TRAMPA en la que podeis meter la pata.

La práctica en este tipo de problemas puede llevar a un alumno más experimentado a resolver el problema sin triangular, distinguiendo los distintos casos a base de hacer determinantes...Perfecto...pero mi intención era ayudaros a todos...no sólo a los mejores...Si algún día teneis ganas suficientes podeis intentar hacer el problema de esta otra manera (por determinantes)...Al fin y al cabo ya sabeis la solución...

En cualquier caso...Espero que haya sido útil.

13 Dada A matriz cuadrada, $|\lambda A| = \lambda |A|$. FALSO → $|\lambda A| = \lambda^n |A|$

PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1 Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+\beta y+z=0 \\ \alpha x+y+z=0 \\ x+y+z=\gamma \end{cases}$$

a) El sistema es compatible determinado para todo valor de α,β,γ.

b) Si $\beta=1$ es posible encontrar valores de α y γ que hagan el sistema incompatible.

c) Si $\alpha=1$ y $\beta=1$ el sistema es compatible indeterminado.

2 Se considera el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x-y-\beta z=0 \\ \alpha x-y+z=0 \\ x+y+z=\gamma \end{cases}$$

a) El sistema es compatible determinado para todo valor de α,β,γ.

b) Si $\beta=1$ el sistema es incompatible.

c) Es posible encontrar valores de α,β,γ tal que el conjunto de soluciones sea un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión uno.

3 Dado el sistema $AX=O$

- a) El sistema será compatible determinado.

b) Si $|A|\neq 0$ el sistema es compatible determinado.

c) El sistema nunca es incompatible.

4 Dado el sistema $AX=O$

a) Si el sistema es compatible determinado tiene el mismo número de ecuaciones que de incognitas.

b) Si el $|A|=0$ el sistema es compatible indeterminado.

c) Si el rango de A es menor que el número de incognitas entonces es un sistema compatible determinado.

5 Las soluciones del siguiente sistema forman un subespacio vectorial de dimensión 1 para b=1:

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-y-z=0 \\ x+4y+4z=b-1 \end{cases}$$

6 Sea el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $AX = C$ siendo A una matriz cuadrada. Entonces las ternas $(1,1,1), (1,2,3), (1,3,4), (2,3,4)$ no pueden ser soluciones de dicho sistema.

7 Contestar razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente proposición: "Sea el sistema $AX = C$ con $A \in M_{m\times n}$ tal que $AX = 0$ es compatible indeterminado y $AX = C$ es compatible $\forall\, C \in M_{m\times 1}$ entonces $m < n$".

8 Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = C$ tal que es compatible para cualquier vector de términos independientes C. Sacar conclusiones sobre dicho sistema de ecuaciones.

9 Discutir el siguiente sistema según los valores de a y b

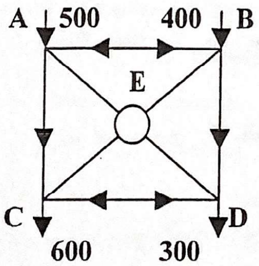
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - ay + 3z = 4 \\ 3x - 3y + 4z = 7 \\ 5x - (a+b)y + 7z = 8 + b \end{cases}$$

10 Se pide discutir el siguiente sistema de ecuaciones según los valores de λ y μ:

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x - z = 0 \\ 2x - y + \mu z = \lambda \end{cases}$$

11 Un grupo de trescientos estudiantes planifica la visita a un centro de investigación. Para su traslado acuden a una empresa de transporte que tiene disponibles 10 autocares entre los que se encuentran autocares de 20, 40 y 50 plazas. ¿Cuántos autocares de cada tipo tiene que haber para que puedan trasladarse los 300 estudiantes utilizando los 10 vehículos disponibles y ocupando en cada autocar todas las plazas?.

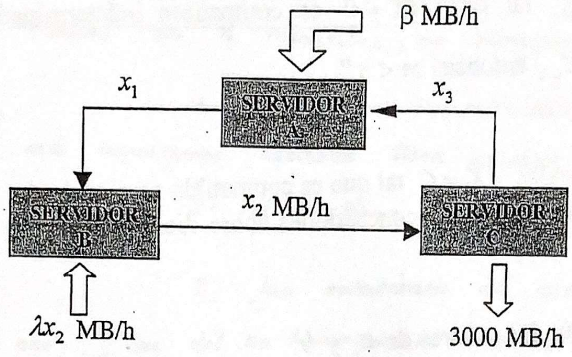
12 La distribución del tráfico en una red de calles es la siguiente



Los sentidos de la marcha son los indicados por las flechas. Las únicas calles de doble sentido son AB y CD. Hallar el tráfico en cada tramo en los siguientes casos:

i) En el nudo C hay obras y se quiere que el tráfico sea mínimo.
ii) Está prohibida la circulación en el nudo E.
iii) Está prohibida la circulación en el ramal AB y en el nudo D.

13 La empresa "Michelín" que se dedica a la fabricación de neumáticos está actualizando su sistema informático. Para ello ha instalado 3 servidores: A,B y C, por cuyas conexiones circulan cantidades de información en megabytes, (MB), representadas según la figura por x_1, x_2 y x_3. El SERVIDOR A recibirá, (cuando se ponga en marcha el sistema), β megabytes de información por hora del exterior, el SERVIDOR B recibirá del exterior cada hora λ veces la cantidad de megabytes que el SERVIDOR B envie al SERVIDOR C y el SERVIDOR C enviará 3000 megabytes por hora al exterior. Los tres servidores están conectados según se indica en el esquema siguiente:



Sabiendo que los megabytes se distribuyen por las líneas de conexión de tal forma que en cada servidor la cantidad de megabytes que entra es igual a la que sale, se pide:

i) Determinar las condiciones que deben cumplir λ y β para que el sistema diseñado pueda funcionar, es decir, que el sistema de ecuaciones de incógnitas x_1, x_2 y x_3 que rige el funcionamiento del esquema sea compatible.

ii) Como la empresa ha pedido expresamente que el sistema sea capaz de aguantar en el supuesto caso de que algún servidor quede fuera de servicio o que alguna linea de conexión se estropee, estudiar si el sistema funcionará en los siguientes casos:

a) SERVIDOR A fuera de servicio.
b) La línea que une el SERVIDOR B y C está fuera de servicio.

14 Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x+2y-3z&=0 \\ x+y+2z&=0 \\ \lambda x+3y-5z&=0 \end{aligned}$$

Se verifica

1.- Para cualquier valor de λ, solo tiene como solucion, la trivial

2.- Existe algún valor de λ para el cual no tiene solución

3.- no tendrá para λ=1, más que soluciones de la forma (z, z, z)

4.- Será compatible y determinado para $\lambda = \frac{10}{7}$

5.- Todas las afirmaciones anteriores son falsas.

Respuesta.- Es correcta la .-

\- - - - -

$\boxed{15}$ Dado un sistema de m ecuaciones lineales, con n incognitas, no homogeneo, se cumple:

1.- el sistema es compatible si el sistema homogeneo asociado tiene solución

2.- el sistema tiene solución unica si $m=n$

3.- las soluciones del sistema homogeneo, y las del no homogeneo, coinciden

4.- si el sistema es compatible y $m=n$ es determinado

5.- todas las afirmaciones anteriores son falsas

Respuesta.- Es correcta la .-

\- - - - -

$\boxed{16}$ Se considera un sistema de m ecuaciones y n incognitas. Se verifica

1.- si el sistema es homogeneo, y $m>n$ entonces siempre es el sistema compatible y determinado

2.- si el sistema homogeneo asociado es determinado, entonces el sistema completo es determinado o es incompatible

3.- si el sistema es homogeneo y $m=n$ entonces no tiene solución

4.- si el sistema homogeneo es indeterminado y su solución depende de r parametros, entonces el sistema completo tiene solución y ésta depende de r parametros

5.- son todas falsas

Respuesta.- la correcta es la .-

\- - - - -

17 Sea un sistema lineal de n ecuaciones con m incognitas (siendo $n > m$). El rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y vale m.

Entonces

1.- el sistema es incompatible

2.- no existe combinación lineal entre las ecuaciones y por lo tanto la solucion es unica

3.- el sistema es indeterminado

4.- existe alguna ecuación que es combinación lineal de otras, pero a pesar de eso el sistema tiene solucion unica

5.- existe alguna ecuacion que es combinación lineal de otras, pero a pesar de eso el sistema es compatible y tiene infinitas soluciones

Respuesta.- Es correcta la

— — — —

18 Sea un sistema lineal de n ecuaciones con m incognitas (siendo $n < m$). El rango de la matriz de coeficientes es igual al rango de la matriz ampliada y vale r. (siendo $r < n$).

Entonces:

1.- el sistema es incompatible

2.- el sistema es compatible determinado

3.- el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones dependen de r parametros

4.- el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones dependen de $m-r$ parametros

5.- el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones dependen de $n-r$ parametros

Respuesta.- Es correcta la

— — — —

TEMA 4 SISTEMAS DE ECUACIONES (PROBLEMAS EXTRAS)

1 Sean A una matriz antisimétrica de orden n y B una matriz simétrica de orden n. Sabiendo que el sistema $(B-A)X=0$ tiene únicamente la solución trivial $X=0$, estudiar el carácter del sistema $(A+B)X=C$.

2 Contéstese razonadamente si la siguiente afirmación es verdadera o falsa. "Existe al menos un valor $c \in \Re$ tal que el sistema $\begin{cases} ax+by+z=c \\ bx+ay+z=c^2 \\ x+y+z=1 \end{cases}$ es compatible $\forall a,b \in \Re$".

3 Sean A una matriz simétrica y B una matriz antisimétrica de orden ocho que conmutan, es decir $AB=BA$. Hallar la traza de AB.

4 Sea A una matriz simétrica de orden 5 y sea B una matriz antisimétrica del mismo orden. Sabiendo que el sistema $(B-A)X=C$ es compatible determinado calcúlese la dimensión del subespacio de $\Re^5$ soluciones del sistema $(A+B)X=0$.

5-Discutir según los valores reales de a y b el sistema: $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+2bz=1 \end{cases}$

6- Sea $A \in M_{5\times 5}$ una matriz tal que $A=-2A'$ (A' representa a la matriz traspuesta de A). Estudiar el sistema $AX=0$.

7 Sea el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo $AX=C$ siendo A una matriz cuadrada. Entonces las ternas $(1,1,1), (1,2,3), (1,3,4), (2,3,4)$ no pueden ser soluciones de dicho sistema.

8 Contestar razonadamente si es verdadera o falsa la siguiente proposición: "Sea el sistema $AX=C$ con $A \in M_{m\times n}$ tal que $AX=0$ es compatible indeterminado y $AX=C$ es compatible $\forall\, C \in M_{m\times 1}$ entonces $m<n$".

9 Sean los sistemas de ecuaciones $AX=C$ y $AX=0$ con $A \in M_4$. Se pide:

i) Demostrar que si X_1 y X_2 son dos soluciones distintas de $AX=C$ entonces X_2-X_1 es una solución no trivial de $AX=0$.

ii) Si $AX=C$ es compatible indeterminado estudiar, dependiendo del rango de la matriz A, cual es el número mínimo necesario de soluciones de $AX=C$ y, qué condición se debe cumplir, para poder determinar una base del subespacio de las soluciones de $AX=0$.

10 a) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $AX=B$. Si el sistema tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y es incompatible, estudiar el carácter del sistema $AX=0$.