Ejercicios

4.1 Calcular los siguientes números complejos y expresar el resultado en forma binómica simplificando al máximo:

1. $z_1 + z_2$
2. $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$
3. $z_1 z_2$
4. z_1^3
5. $z_1 \bar{z}_1$
6. $(\bar{z}_2)^2$

donde $z_1 = 3 - 2i$ **y** $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

1. $\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{3}{2}i$
2. $\left(-1 - \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) i, \quad \left(-\frac{1}{13} - \frac{3\sqrt{3}}{26}\right) + \left(\frac{3}{26} - \frac{\sqrt{3}}{13}\right) i$
3. $\left(1 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right) i$
4. $-9 - 46\,I$
5. 13
6. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

4.2 Sabiendo que $i^2 = -1$**,** $i^3 = -i$ **e** $i^4 = 1$**, simplificar las siguientes potencias de** i**:**

1. i^5
2. i^{15}
3. i^{27}
4. i^{118}
5. i^{307}

1. i
2. $-i$
3. $-i$
4. -1
5. $-i$

4.3 Resolver las siguientes ecuaciones para los números reales x **e** y**:**

1. $(3 + 4i)^2 - 2(x - iy) = x + iy$
2. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2 + \frac{1}{x+iy} = 1 + i$
3. $(3 - 2i)(x + iy) = 2(x - 2iy) + 2i - 1$

1. $x = -\frac{7}{3}$, $y = -24$
2. $x = \frac{2}{5}$, $y = -\frac{1}{5}$
3. $x = -1$, $y = 0$

4.4 Escribir en forma polar los siguientes números complejos:

1. $(1+\sqrt{-3})^2$
2. $\frac{1+i\sqrt{7}}{1-i\sqrt{7}}$
3. $(2+3i)(1-2i)$
4. $\frac{1-i}{1+i}$
5. $\sqrt{-3}\sqrt{-12}$

1. $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$
2. $e^{2.419i}$
3. $\sqrt{65}e^{-0.124i}$
4. $e^{-\frac{\pi}{2}i}$
5. $6e^{\pi i}$

4.5 Escribir en forma binómica los siguientes números complejos:

1. $e^{i\frac{\pi}{3}}$
2. $e^{2+i\pi}$
3. $e^{\pi+i}$
4. $e^{3-i\frac{5\pi}{4}}$

1. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. $-e^2$
3. $e^{\pi}\cos(1)+e^{\pi}\sin(1)i$
4. $-\frac{e^3}{\sqrt{2}}+\frac{e^3}{\sqrt{2}}i$

4.6 Calcular las siguientes raíces:

1. Las raíces séptimas de $z=3$
2. Las raíces quintas de $z=1+i$
3. Las raíces cúbicas de $z=\frac{1}{1+i}$

1. $w_0=1.1699$, $w_1=0.7294+0.9147i$, $w_2=0.7294-0.9147i$, $w_3=-0.2603+1.1406i$, $w_4=-0.2603-1.1406i$, $w_5=-1.0541+0.5076i$, $w_6=-1.0541-0.5076i$
2. $w_0=1.0586+0.1677i$, $w_1=0.1677+1.0586i$, $w_2=-0.9549+0.4866i$, $w_3=-0.7579-0.7579i$, $w_4=0.4866-0.9549i$
3. $w_0=0.8605-0.2306i$, $w_1=-0.2306+0.8605i$, $w_2=-0.6299-0.6299i$

4.7 Hacer uso de la fórmula de Euler para demostrar las siguientes identidades en $\mathbb{C}$:

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

4.8 Hallar los números reales a y b, tales que el número complejo $z=\frac{2a+i3b}{3+4i}$ sea real y su módulo sea la unidad.

$$a_1=\frac{3}{2}, b_1=\frac{4}{3}, \quad a_2=-\frac{3}{2}, b_2=-\frac{4}{3}$$

4.9 Describir el lugar geométrico de los puntos $z \in \mathbb{C}$ tales que:

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| = 2$$

Se trata de una circunferencia de radio 4 y centro en el punto $(-5, 0)$

4.10 Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

1. $z^2 - 4z + 13 = 0$
2. $3z^3 - 13z^2 + 43z - 13 = 0$
3. $z^4 + z^3 + 7z^2 + 9z - 18 = 0$
4. $z^5 - z^4 + 7z^3 - 7z^2 + 12z - 12 = 0$
5. $z^6 - 64 = 0$
6. $2z^4 + 5z^3 + 13z^2 + 7z + 5 = 0$ (ayuda: $z = -1 + 2i$ es una raíz)
7. $2z^2 + (3 + i)z + 2 = 0$

1. $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = 2 + 3i$
2. $z_1 = \frac{1}{3}$, $z_2 = 2 - 3i$, $z_3 = 2 + 3i$
3. $z_1 = -2$, $z_2 = 1$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 3i$
4. $z_1 = 1$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 2i$, $z_4 = -i\sqrt{3}$, $z_5 = i\sqrt{3}$
5. $z_1 = -2$, $z_2 = 2$, $z_3 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_4 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_5 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_6 = 1 + i\sqrt{3}$
6. $z_1 = -1 - 2i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{7}}{4}i$, $z_3 = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4}i$
7. $z_1 = -1 - i$, $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$