I-2: $\mathbb{R}^n$ como espacio métrico

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ además de ser un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo de los números reales, es también un espacio métrico

Def [Espacio métrico]

- Un espacio métrico es un conjunto $M \neq \phi$ equipado con una noción de distancia entre sus elementos. Se llama distancia en el conjunto M, a una aplicación $d: M \times M \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades

i) $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in M$, y $d(x,y) = 0 \iff x = y$ (definida positiva)

ii) $d(x,y) = d(y,x) \quad \forall x,y \in M$ (simétrica)

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall x,y,z \in M$, (desigualdad triangular)

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ es un tipo particular de espacio métrio, en el cual la dictancia se define en función de una norma para los vectores.

Def [Espacio vectorial normado]

- Un espacio vectorial normado es un espacio vectorial V provisto de una aplicación $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ llamada norma, que satisface las siguientes propiedades

i) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ y $\|x\| = 0 \iff x = 0 \in V$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in V$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x,y \in V$

- En cualquier espacio vectorial normado, además de las propiedades i), ii) y iii) que definen el concepto de norma, se cumplen también las propiedades

iv) $\|x\| = \|-x\| \quad \forall x \in V$

v) $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\| \quad \forall x,y \in V$

- En efecto, de la propiedad ii) se sigue la propiedad iv) ya que

$$\|-x\| = \|(-1)x\| = |-1| \, \|x\| = \|x\|$$

• Además, de la desigualdad triangular

$$\|x\| = \|x-y+y\| \leq \|x-y\|+\|y\| \Rightarrow \|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|,$$

y cambiando los papeles de los vectores x e y, se tiene

$$\|y\| = \|y-x+x\| \leq \|x-y\|+\|x\| \Rightarrow \|y\|-\|x\| \leq \|x-y\|$$

con la cual, de las dos desigualdades anteriores

$$\big|\|x\|-\|y\|\big| = \text{máx}\{\|x\|-\|y\|, \|y\|-\|x\|\} \leq \|x-y\|$$

y por tanto se cumple la propiedad v)

• En cualquier espacio vectorial normado V, se puede definir una distancia entre vectores mediante

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

• A partir de las propiedades de la norma es inmediato comprobar que la distancia así definida, satisface las propiedades i), ii) y iii) que debe satisfacer la distancia en un espacio métrico. Por tanto podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición: En cualquier espacio vectorial normado V, la distancia definida en la forma $d(x,y) = \|x-y\|$, da a V estructura de espacio métrico.

• A continuación nos concentramos en $\mathbb{R}^n$, que es el espacio vectorial normado que nos interesa para el cálculo en varias variables. La norma $\| \ \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que da a $\mathbb{R}^n$ estructura de espacio vectorial normado se define a partir del producto escalar de vectores.

• Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, su producto escalar se define en la forma

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

• A partir del producto escalar se define la norma mediante

$$\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

- Para comprobar que la norma así definida satisface las propiedades i), ii) y iii) de espacio vectorial normado, necesitamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

Lema [Desigualdad de Cauchy-Schwarz]:

$\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ se satisface la desigualdad $|x \cdot y| \leq \|x\| \, \|y\|$.

- Demostración: Si $y = 0$, se cumple la desigualdad de manera trivial $(0 \leq 0)$.

Ahora si $y \neq 0$, consideramos la función real de una variable real t dada por

$$g(t) = (x + ty) \cdot (x + ty)$$

Derivando dos veces con respecto a t obtenemos

$$g'(t) = 2x \cdot y + 2t \, y \cdot y \quad , \quad g''(t) = 2 y \cdot y > 0.$$

Entonces la función $g(t)$ tiene un mínimo local en

$$t_0 = -\frac{x \cdot y}{y \cdot y}$$

Como además $g(t) \geq 0$ por construcción, el mínimo local es un mínimo absoluto y se tiene

$$g(t_0) = x \cdot x - 2 \frac{x \cdot y}{y \cdot y} (x \cdot y) + \left(\frac{x \cdot y}{y \cdot y} \right)^2 y \cdot y = x \cdot x - \frac{(x \cdot y)^2}{y \cdot y} \geq 0$$

o sea

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y) \Rightarrow |(x \cdot y)| \leq \|x\| \, \|y\|$$

- De acuerdo con la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos definir el ángulo θ entre dos vectores mediante

$$\cos\theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \, \|y\|}$$

- La desigualdad de Cauchy-Schwarz se satura (es decir, se alcanza la igualdad) para $\cos\theta = \pm 1$, es decir para $\theta = 0, \pi$, o sea para vectores x e y que sean colineales.

- Con ayuda de la desigualdad de Cauchy-Schwarz podemos demostrar que $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ satisface las propiedades de espacio vectorial normado

Proposición: la norma definida por $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ da a $\mathbb{R}^n$ estructura de espacio vectorial normado.

Demostración:

i) se cumple ya que $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \geq 0 \ \forall (x_1, \dots, x_n)$ y
$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = 0 \iff (x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$.

ii) también se cumple ya que

$$\|\lambda x\| = \sqrt{\lambda^2 x_1^2 + \dots + \lambda^2 x_n^2} = \sqrt{\lambda^2}\,\|x\| = |\lambda|\,\|x\|$$

Por último, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos

$$\|x+y\|^2 = (x+y)\cdot(x+y) = x \cdot x + 2x \cdot y + y \cdot y \leq$$
$$\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

que extrayendo la raíz cuadrada nos da la desigualdad triangular.