

Matemática Discreta y Lógica Matemática I

Doble Grado Ingeniería Informática - Ciencias Matemáticas

Examen final - Enero 2020

NOMBRE:

Lee atentamente las siguientes instrucciones:

- Escribe tu nombre y grupo en el lugar indicado en esta hoja.
 - **NO** puedes usar calculadora. Desconecta el teléfono móvil (si lo tienes contigo).
 - El examen dura **3 horas**.
 - Cada una de las seis primeras preguntas es tipo test y tiene una **única** respuesta correcta. Cada pregunta de ellas respondida *correctamente* puntuará **0,5 puntos**. Cada pregunta respondida *incorrectamente* puntuará **-0,15 puntos**. Las preguntas sin contestar puntuarán **0 puntos**. La puntuación total del test será como mínimo 0, nunca negativa. Dejar **totalmente clara** la respuesta escogida, o que no queréis contestar una pregunta, sobre todo cuando haya alguna tachadura.
 - Cada una de las preguntas a desarrollar restantes vale **1 punto**, salvo la séptima, que vale **2 puntos**.
 - El examen se calificará, por tanto, sobre **9 puntos**. A la nota se le sumará la evaluación por curso (**entre 0 y 1 punto**).
-

1. Dados $a, b, d \in \mathbb{Z}$, si sabemos que $\text{mcd}(a, b) = 1$, entonces:

- ☐ Si además $d \mid b$, entonces $\text{mcd}(a, d) = 1$.
- ☐ Si además $d \mid b$, entonces $\text{mcd}(a, d) = d$.
- ☐ Si además $d \mid (a * b)$, entonces $\text{mcd}(a, d) = d$.
- ☐ Si además $d \mid a$, entonces $\text{mcd}(a, d) = 1$.

2. Dadas las dos siguientes afirmaciones:

$$\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$$

$$\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$$

- ☐ Ambas son siempre ciertas.
- ☐ Ambas son siempre falsas.
- ☐ Solamente es cierta siempre la primera.
- ☐ Solamente es cierta siempre la segunda.

3. Consideremos el conjunto $A = \{\{1\}, \{1, 2, \{\}\}, 1\}$. Entonces:

- ☐ A tiene 5 elementos.
- ☐ $2 \in A$.
- ☐ $2 \notin A$, pero **existe** $X \in A \mid 2 \in X$. (o sea, 2 sí que pertenece a un elemento de A)
- ☐ $\{1\} \subseteq A$ **y** $\{\{1\}, 1\} \in A$.

4. Sea R la relación binaria sobre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ definida por $XRY \iff X \setminus Y = X$.

- ☐ R es reflexiva.
- ☐ R es simétrica.
- ☐ R es antirreflexiva.
- ☐ R es transitiva.

5. Sea $f : \{(X, Y) \mid X \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}), X \neq Y\} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\aleph_0\}$ definida por $f(X, Y) = |X \cap Y|$ (donde recordemos que \aleph_0 es el cardinal de los conjuntos numerables infinitos, o sea el de \mathbb{N}):
- ☐ f es inyectiva, pero **no** suprayectiva.
- ☐ f es suprayectiva, pero **no** inyectiva.
- ☐ f es biyectiva.
- ☐ f **no** es ni inyectiva, **ni** suprayectiva.
6. Considera los dos asertos siguientes:
- Si A es **no numerable** y B **numerable**, entonces $A \setminus B$ es **no numerable**.
- Toda familia** (sea o no numerable) de conjuntos **numerables** tiene una **unión numerable**.
- ☐ Ambos son ciertos.
- ☐ Ambos son falsos.
- ☐ El primero es cierto y el segundo es falso.
- ☐ El primero es falso y el segundo es cierto.
7. Considerando la sucesión $(a_n \mid n \in \mathbb{N})$, definida recursivamente mediante:
- $$a_1 = 20, \quad a_n = 5 * 4^n - a_{n-1}, \text{ para } n \geq 2$$
- a) Razonando por inducción, demuestra que para todo $n \geq 1$, se tiene $10 \mid a_n$.
- b) Razonando por inducción, demuestra que $a_n = 4^{n+1} + 4 * (-1)^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.
- Indicación:** Tened cuidado con lo que vale $(-1)^{n-1}$, según el valor de n .
- c) Concluye de lo anterior que para todo $n \geq 1$, $4^{n+1} + 4 * (-1)^{n-1}$ es múltiplo de 10.
8. Sean $a, b, c \in \mathbb{N}_1$:
- a) Demuestra que $a \mid c \wedge b \mid c \wedge \text{mcd}(a, b) = 1 \implies (a * b) \mid c$.
- b) Prueba que la conclusión no tendría porqué darse, si **no** se tuviera la hipótesis $\text{mcd}(a, b) = 1$.
9. En el conjunto de los números enteros \mathbb{Z} , se define la relación $xRy \iff x^2 - y^2 = x - y$:
- a) Demostrar que R es una relación de equivalencia.
- b) Calcular las clases de equivalencia de 0, de -1 y de 3.
- c) Enumerar (sin repeticiones) los elementos del conjunto cociente \mathbb{Z}/R .
10. Considera la función $f : \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ dada por $f(x, y) = (x - 2 * y, 2 * x + y)$
- a) Estudia si f es **inyectiva**, justificando adecuadamente tu respuesta.
- b) Estudia si f es **sobreyectiva**, justificando adecuadamente tu respuesta.
11. Sea (B, \subseteq_B) un conjunto parcialmente ordenado cualquiera, y $f : A \longrightarrow B$ una función (total) **inyectiva**. Definimos una relación binaria R_f en A , tomando $xR_f y \iff f(x) \subseteq_B f(y)$.
- a) Demuestra que R_f es siempre una relación de orden en A .
- b) Considera $B = \{1, 2, 3, 30, 42, 210\}$ ordenado por la relación de divisibilidad, y tomemos $A = \{1, 2, 29, 41, 209\}$, con $f : A \longrightarrow B$ la función $f(x) = x + 1$. Dibuja el diagrama de Hasse de (A, R_f) y determina los elementos extremales (o sea discute si hay elementos minimales, maximales y mínimo y máximo de (A, R_f)).
- Sugerencia:** Aunque no se te pida “entregarlo”, empieza por dibujarte el diagrama de Hasse de (B, \mid) y luego trabaja a partir de él.