Tema 4 (II)

Diagramas de Esfuerzos

Enrique de Justo Moscardó
Manuel Manzano Gómez
Antonio Delgado Trujillo

Dpto. de Estructuras de Edificación e Ingeniería del Terreno
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Sevilla

Índice

1. Introducción

1.1. Los diagramas de esfuerzos en el análisis estructural
1.2. La utilidad de conocer los diagramas de esfuerzos en las estructuras

2. Conceptos Previos a Repasar

2.1. Cargas
2.2. Enlaces exteriores o Vínculos

3. Tipos de Esfuerzos

4.1. Tipos de Esfuerzos y Criterios de Signos
4.2. Criterios de Representación

4. Simetría y antisimetría

5. Método para dibujar los Diagramas

5.1. Pasos
5.2. Relación entre las leyes
5.3. Tipo de ley
5.4. Pendiente
5.5. Saltos debidos a cargas y momentos puntuales
5.6. Valores extremos
5.7. Deformada

6. Aplicación práctica

7. Ejercicios resueltos

Objetivos de aprendizaje

- Dibujar los **diagramas de esfuerzos** y la **deformada** en barras isostáticas, aplicando las relaciones entre la carga, el cortante, el flector, el axil, y las condiciones en los enlaces, e indicando sus valores máximos.

1. introducción. 1.1. Los diagramas de esfuerzos en el análisis estructural

Fases del **análisis** de una estructura:

Fase 1: Definir un **modelo estructural** simplificado que se comporte de forma aproximada a la estructura real (geometría, enlaces, materiales). [Tema 6].

Fase 2: Cuantificar las **acciones** [Tema 5].

Fase 3: Hallar el valor de las **reacciones** con las ecuaciones de equilibrio [Tema 3].

Fase 4: Calcular los **esfuerzos** en las barras. Dibujar los diagramas de esfuerzos, localizando y cuantificando los valores máximos [Temas 4].

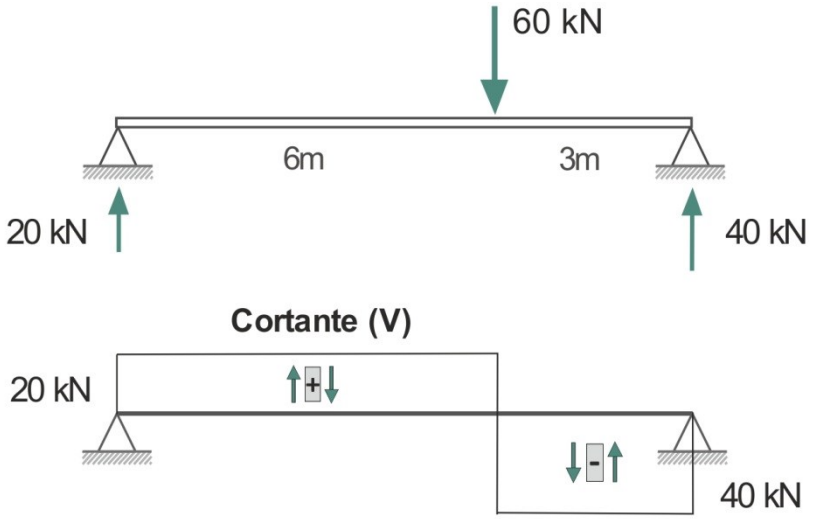
Fase 5: Calcular las **tensiones** máximas en las secciones más solicitadas, comprobando que no se sobrepasa la resistencia del material (E.L.U.). [Temas 7 y 9]

Fase 6: Calcular las **deformaciones** de la estructura, comprobando que no se sobrepasan los valores admisibles de servicio (E.L.S.). [Temas 8 y 9]

1. introducción. 1.2. Utilidad de conocer los diagramas de esfuerzos

Las cargas que actúan sobre un edificio, se transmiten a través de su estructura hasta la cimentación. La estructura actúa como un esqueleto.

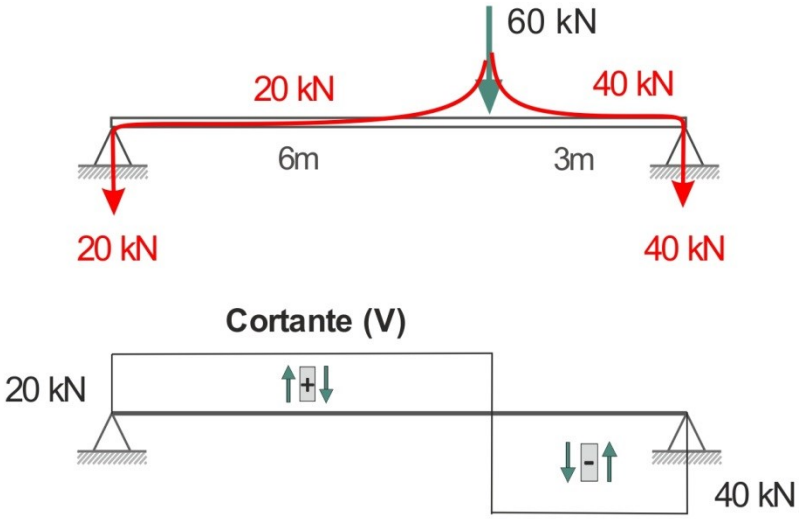
Los **diagramas de esfuerzos** nos indican cómo está trabajando la estructura. A modo de radiografía, nos muestra cómo se transmiten las cargas a través de las barras que forman el esqueleto estructural del edificio.



1. introducción. 1.2. Utilidad de conocer los diagramas de esfuerzos

Las cargas que actúan sobre un edificio, se transmiten a través de su estructura hasta la cimentación. La estructura actúa como un esqueleto.

Los **diagramas de esfuerzos** nos indican cómo está trabajando la estructura. A modo de radiografía, nos muestra cómo se transmiten las cargas a través de las barras que forman el esqueleto estructural del edificio.



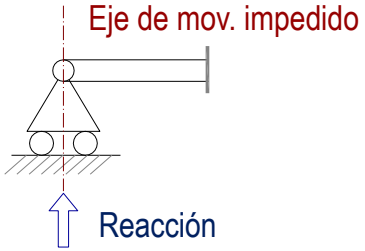
2.1. Cargas

Según su ámbito de aplicación:

- Puntuales (kN)
- Uniformes (kN/m)

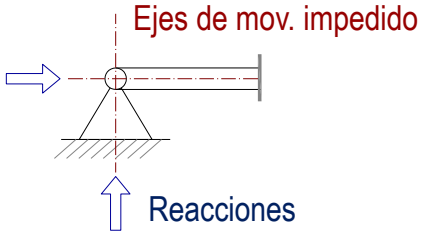
2.2. Enlaces exteriores o Vínculos

- Apoyo (carrito)



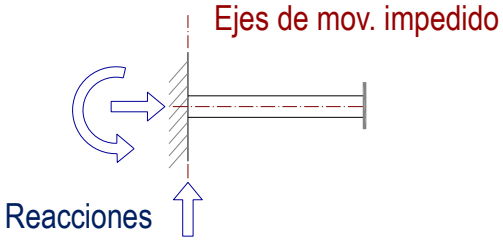
Se impide desp. vertical.
Se permite desp. horizontal y el giro

- Articulación



Se impide desp. horizontal y vertical.
Se permite el giro.

- Empotramiento



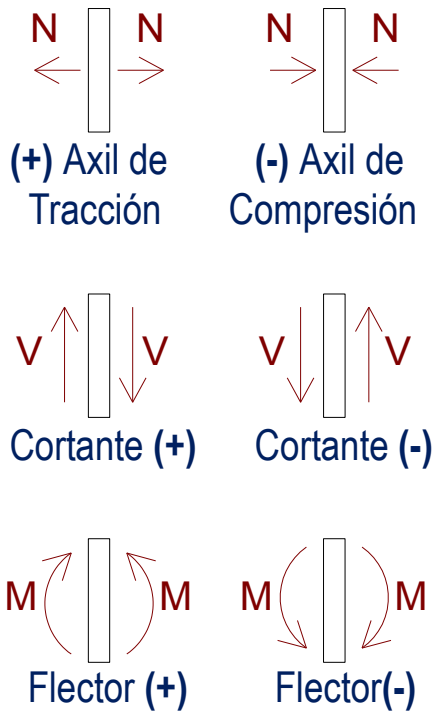
Se impiden:
Desplaz. horizontal, vertical y el giro.

3. Tipos de Esfuerzos

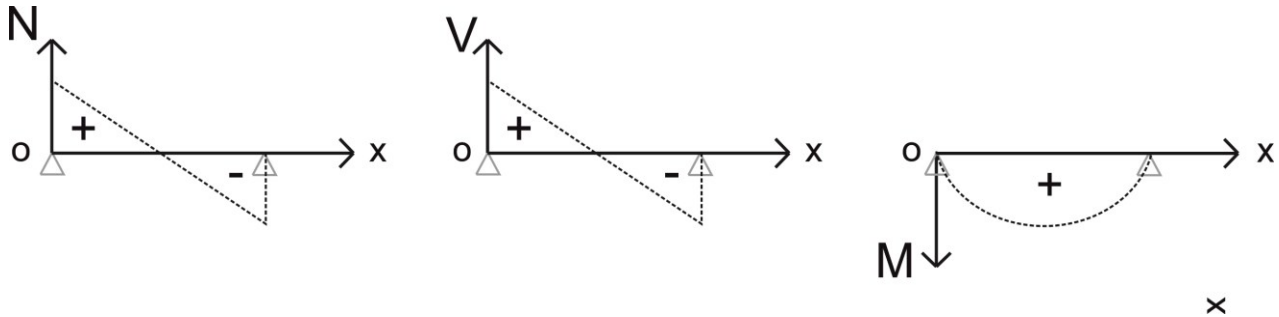
3.1. Tipos de Esfuerzos

- **Esfuerzo Axil (N):** Lo producen fuerzas en la directriz de la barra. Produce alargamiento o acortamiento en las barras.
- **Esfuerzo Cortante (V):** Lo producen fuerzas perpendiculares a la directriz de la barra. Su deformación es una distorsión angular.
- **Momento Flector (M):** Es el momento resultante de los momentos y fuerzas perpendiculares a la directriz de la barra. Deforma a la barra curvándola.

Criterio de signos

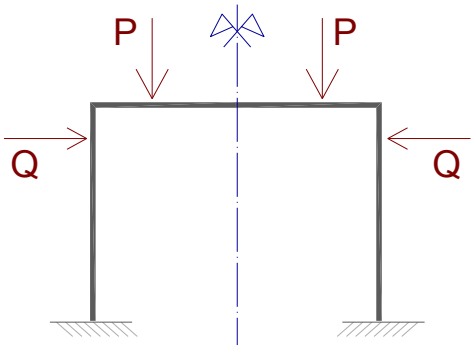


3.2. Criterios de Representación

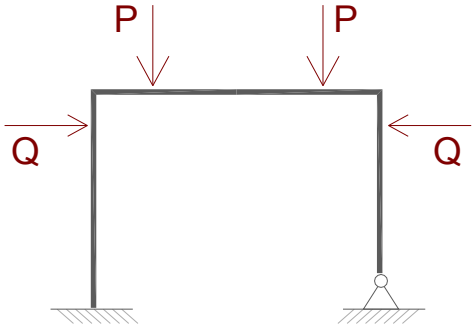


4. Simetría y antisimetría

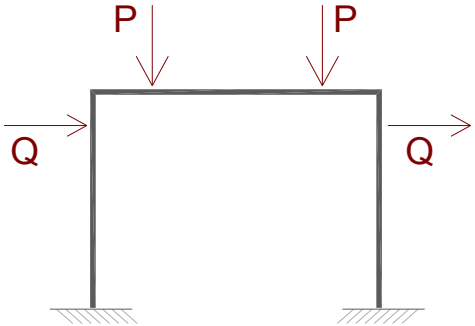
Estructuras Simétricas: una estructura es simétrica si lo es a la vez en *geometría*, *enlaces y cargas*.



Estructura simétrica



Estructura no simétrica
(no lo es en enlaces).



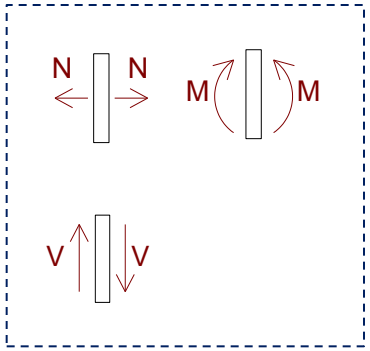
Estructura no simétrica
(no lo es en cargas).

Propiedades:

- Axil, Flector y Deformada → simétricos.
- Cortante → antisimétrico.

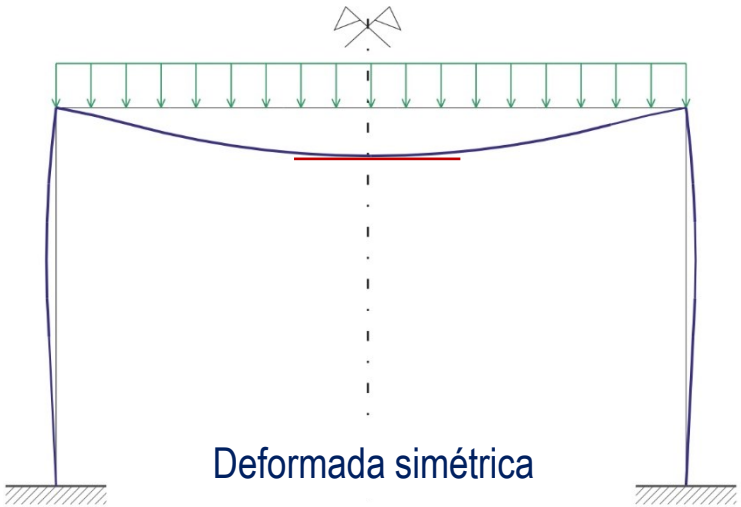
En el eje de simetría:

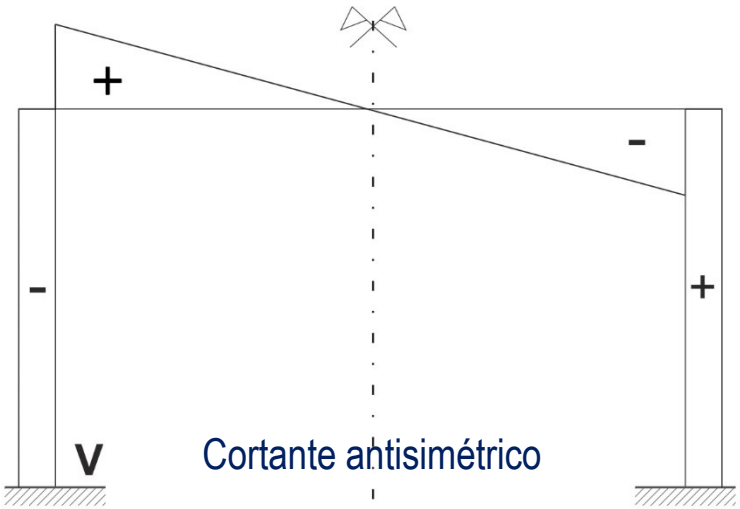
- Cortante nulo.
- Giro y desplazamiento horizontal nulo.

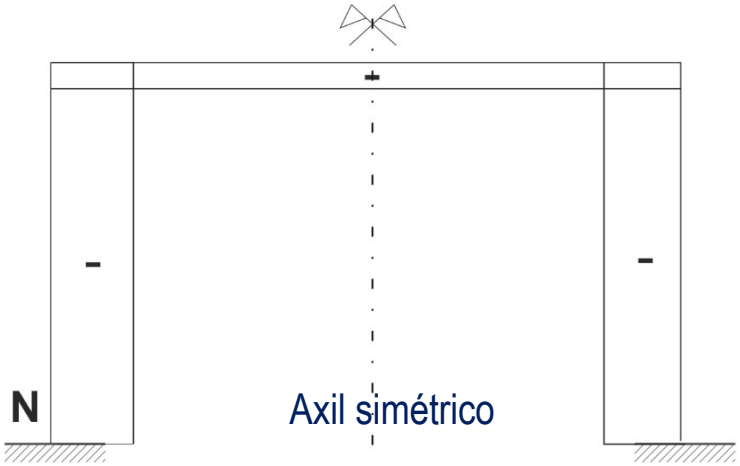


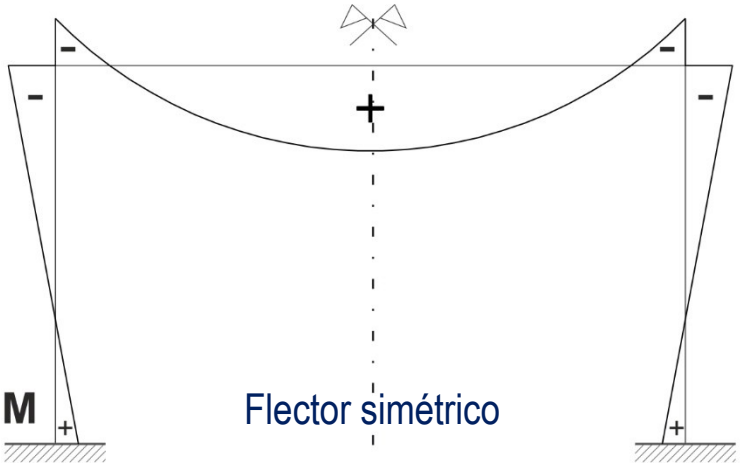
4. Simetría y antisimetría

Estructura Simétrica. Ejemplo.



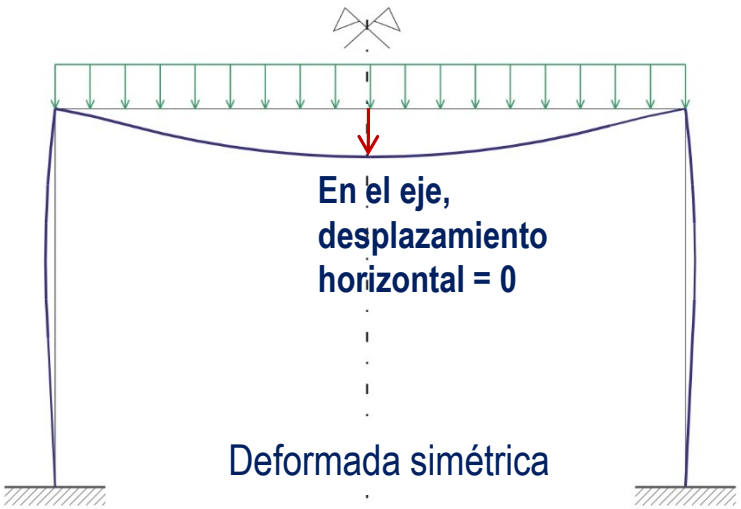




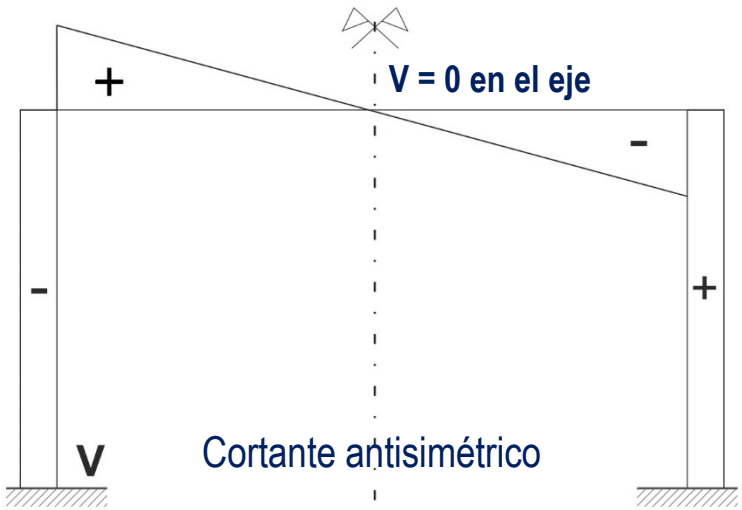


4. Simetría y antisimetría

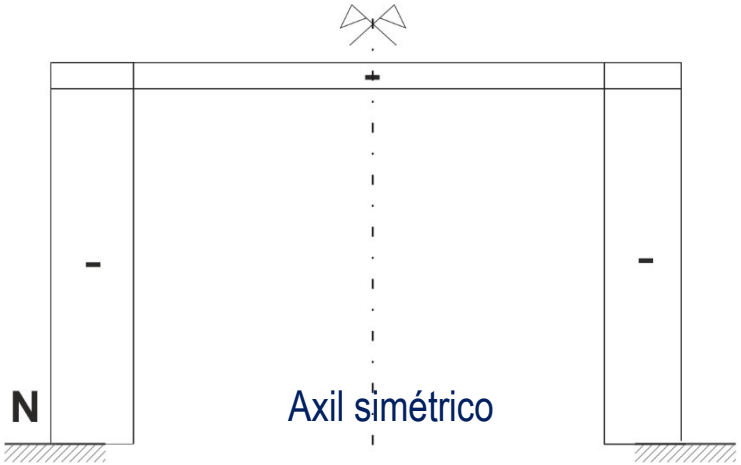
Estructura Simétrica. Ejemplo.



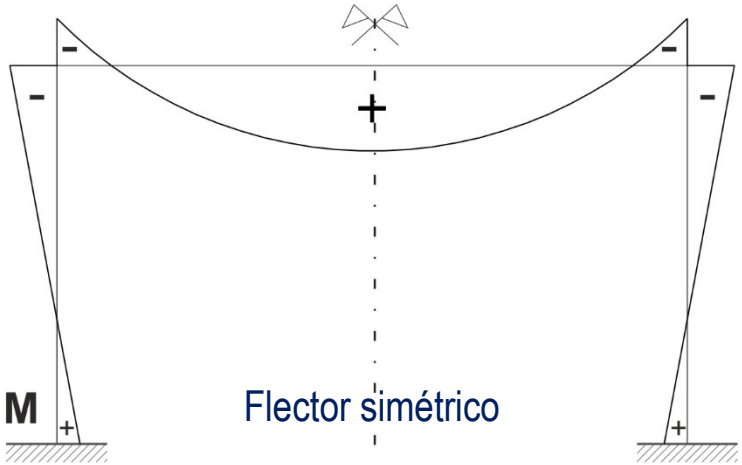
Deformada simétrica



Cortante antisimétrico



Axil simétrico



Flector simétrico

4. Simetría y antisimetría

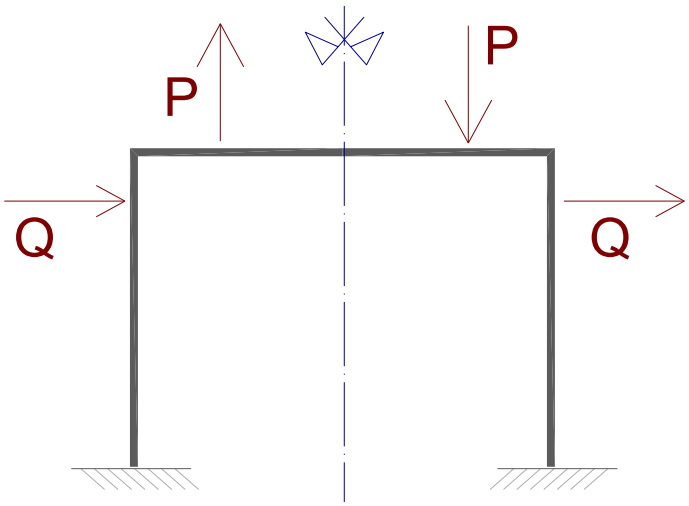
Estructuras Antisimétricas: una estructura es antisimétrica si es simétrica en *geometría y enlaces* y es antisimétrica en *cargas*.

Propiedades:

- Axil, Flector y Deformada → antisimétricos.
- Cortante → simétrico.

En el eje de simetría:

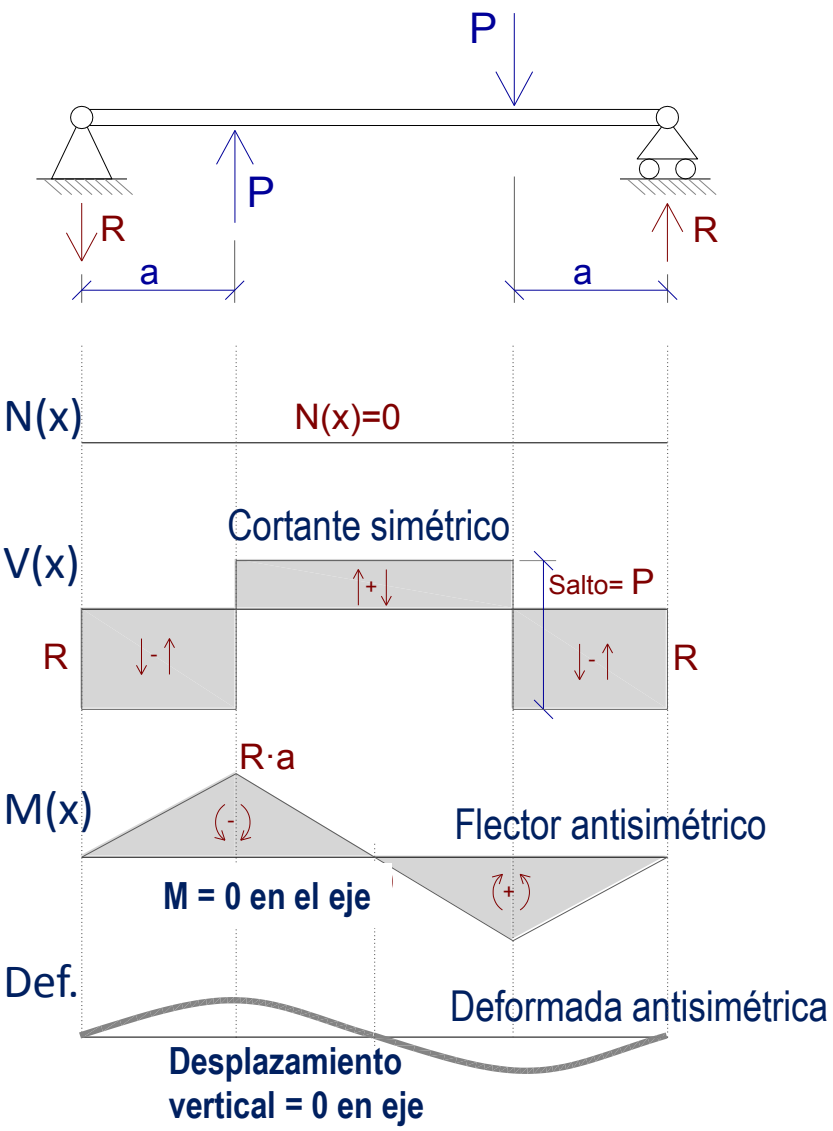
- Axil y flector nulos.
- Desplazamiento vertical nulo.



Estructura antisimétrica

4. Simetría y antisimetría

Estructura Antisimétrica. Ejemplo.



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.1. Pasos

1. Dibujar las reacciones: Calcular las reacciones aplicando las ecuaciones de equilibrio y dibujarlas con su signo correcto.

2. Dividir la viga en tramos: teniendo en cuenta principalmente la carga.

- En los puntos donde hay cambio de carga o donde se aplica una carga puntual cambia el tramo.
- Los apoyos intermedios definen un cambio de tramo, por la reacción aplicada en ese punto.

3. Comenzar los diagramas empezando siempre por los extremos de la estructura, donde los esfuerzos son conocidos

- El axil o cortante en el extremo será igual a la reacción o carga puntual aplicada en ese extremo.
- El momento Flector en el extremo será igual al momento puntual aplicado en ese extremo.

4. Dibujar los diagramas aplicando las relaciones entre q, N, V y M, teniendo en cuenta:

- El tipo de ley (cte, lineal, 2º grado).
- La pendiente (creciente, decreciente).
- Los saltos por cargas o momentos puntuales.

5. Dibujar la deformada de la estructura, aplicando la relación entre el flector y la curvatura:

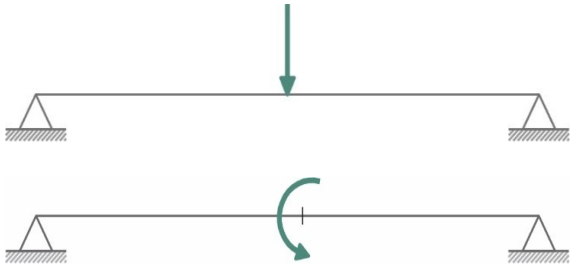
Flector positivo → Curvatura Cóncava Flector negativo→ Curvatura Convexa

Además la deformada debe cumplir las coacciones que imponen los enlaces.

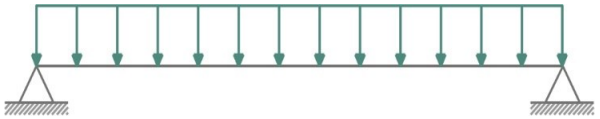
5. Método para dibujar los Diagramas: 5.1. La carga

- La carga es el **dato** inicial. A partir de la carga dibujaremos el cortante, a partir del cortante dibujaremos el flector.
- La **densidad de carga** (q) es la carga por unidad de longitud. Se mide en kN/m.
- Según la carga se definen dos **tipos** de estructuras fundamentales:

a) Estructuras con cargas o momentos puntuales → **q = 0**



b) Estructuras con carga unifome → **q = cte**



Signo de la carga →
Carga hacia arriba → signo **positivo.**
Carga hacia abajo → signo **negativo.**

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.2. Relación entre leyes

Relación entre carga, cortante y el flector:

$$q = dV/dx \rightarrow V = \int q \cdot dx$$

$$V = dM/dx \rightarrow M = \int V \cdot dx$$

- La densidad de carga (q) es la pendiente del cortante V(x).
- El Cortante (V) es la pendiente del flector M(x).

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.2. Relación entre leyes

Relación entre carga, cortante y el flector:

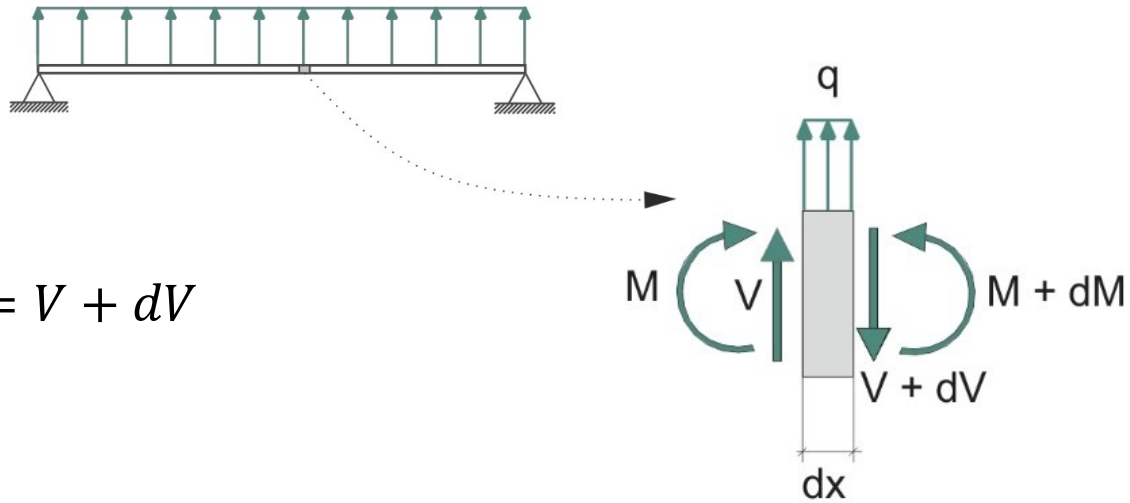
$$q = dV/dx \rightarrow V = \int q \cdot dx$$

$$V = dM/dx \rightarrow M = \int V \cdot dx$$

- La densidad de carga (q) es la pendiente del cortante V(x).
- El Cortante (V) es la pendiente del flector M(x).

Demostración:

Equilibrio en la rebanada



$$\sum F_V = 0 \rightarrow V + q \cdot dx = V + dV$$

$$\rightarrow \boldsymbol{q = dV/dx}$$

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.2. Relación entre leyes

Relación entre carga, cortante y el flector:

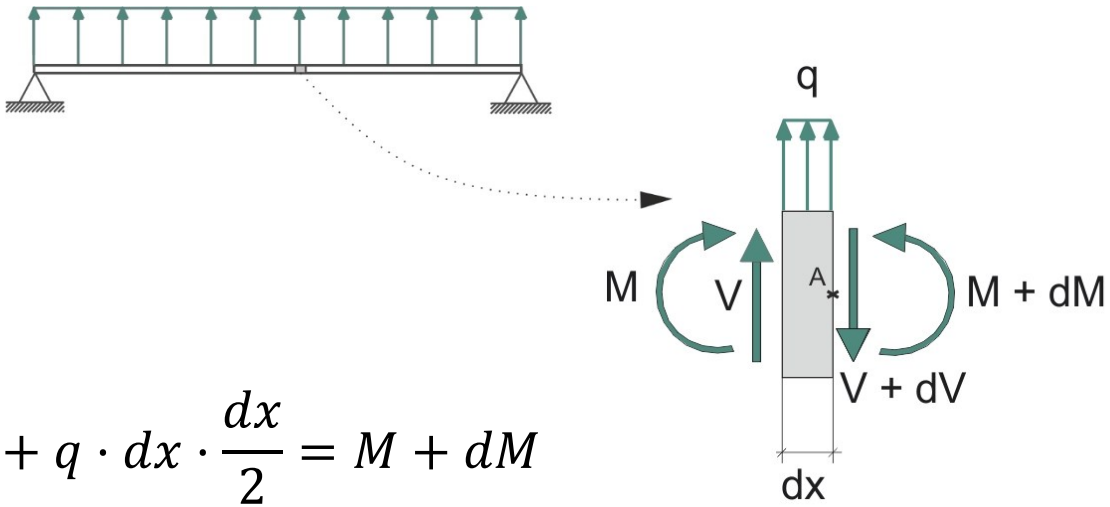
$$q = dV/dx \rightarrow V = \int q \cdot dx$$

$$V = dM/dx \rightarrow M = \int V \cdot dx$$

- La densidad de carga (q) es la pendiente del cortante V(x).
- El Cortante (V) es la pendiente del flector M(x).

Demostración:

Equilibrio en la rebanada



$$\rightarrow \boldsymbol{V} = \boldsymbol{dM/dx} \sum M_A$$

$$= 0 \rightarrow M + V \cdot dx + q \cdot dx \cdot \frac{dx}{2} = M + dM$$

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.2. Relación entre leyes

Relación entre carga, cortante y el flector:

$$q = dV/dx \rightarrow V = \int q \cdot dx$$

$$V = dM/dx \rightarrow M = \int V \cdot dx$$

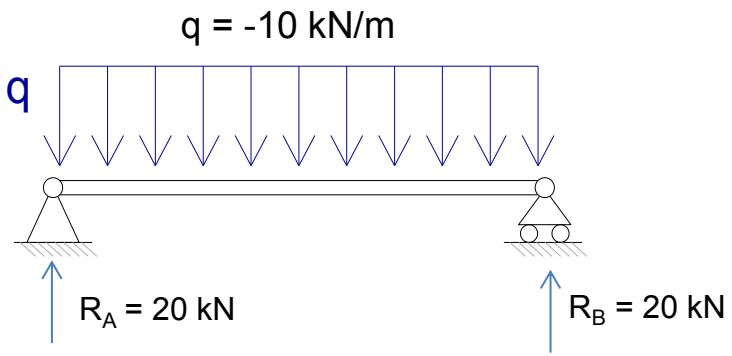
- La densidad de carga (q) es la pendiente del cortante V(x).
- El Cortante (V) es la pendiente del flector M(x).

Por ejemplo:

$$q = -10 kN/m$$

$$V(x) = -10x + 20$$

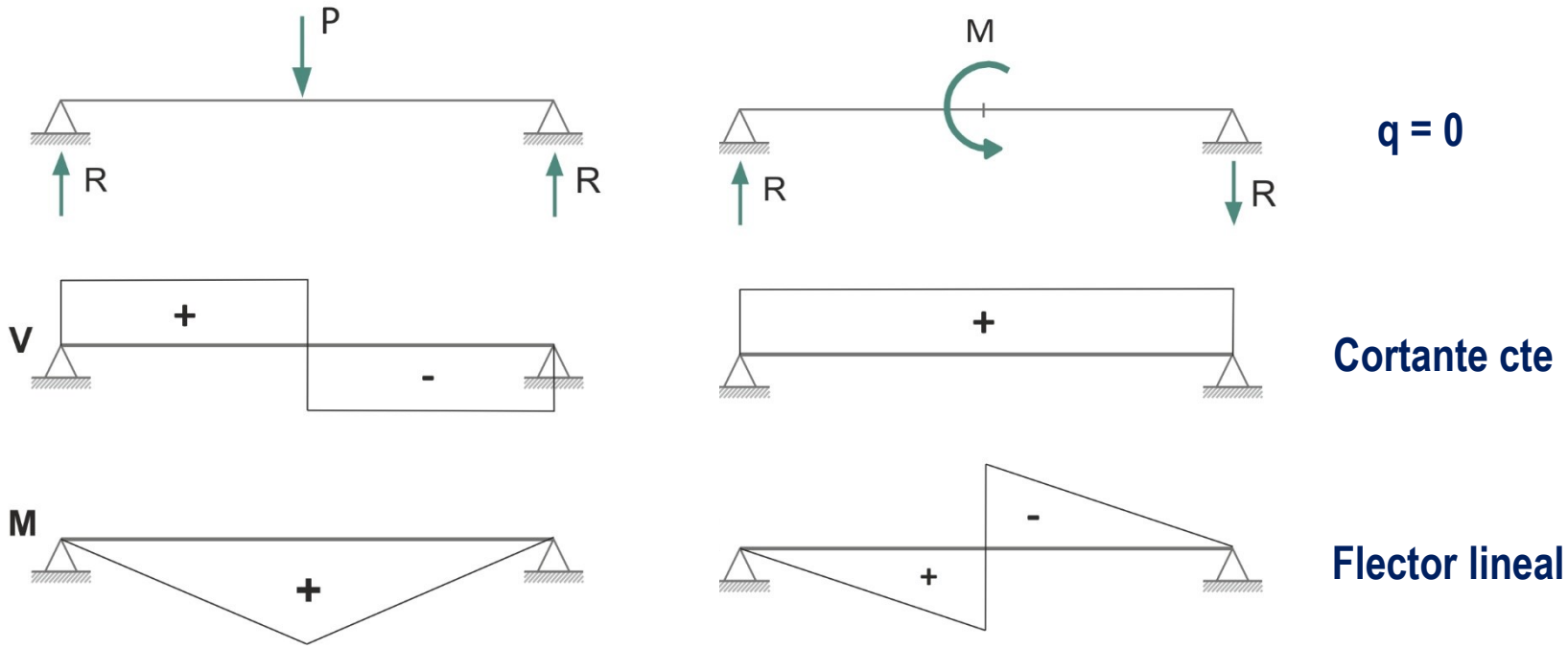
$$M(x) = -10\frac{x^2}{2} + 20x$$



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.3. Tipo de ley

a. En estructuras con cargas y momentos puntuales (q = 0)

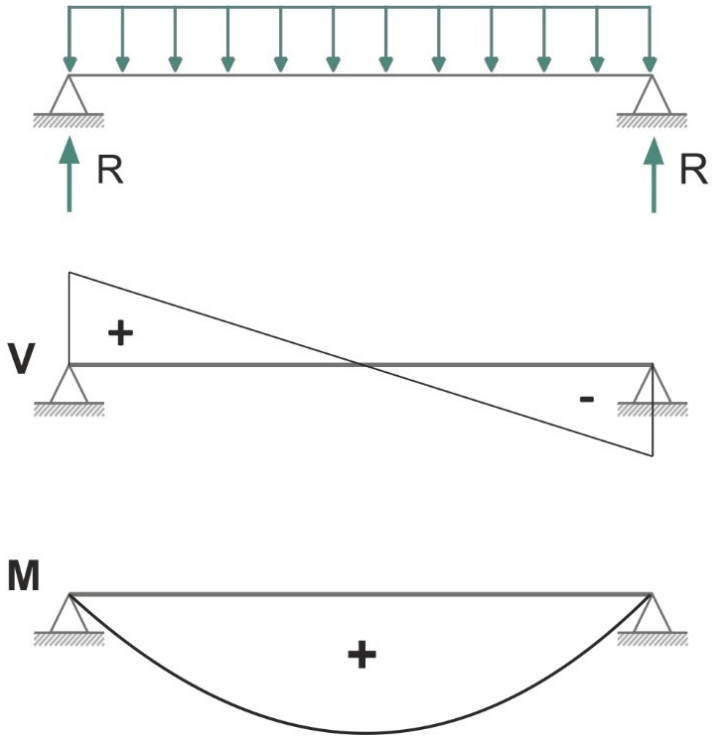
- La ley de cortante es **constante** (en cada tramo)
- La ley de flector es **lineal** (en cada tramo)



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.3. Tipo de ley

b. En estructuras con carga uniforme (q = cte)

- La ley de cortante es **lineal** (recta inclinada)
- La ley de flector es **de 2º grado** (parábola)



q = cte

Cortante lineal

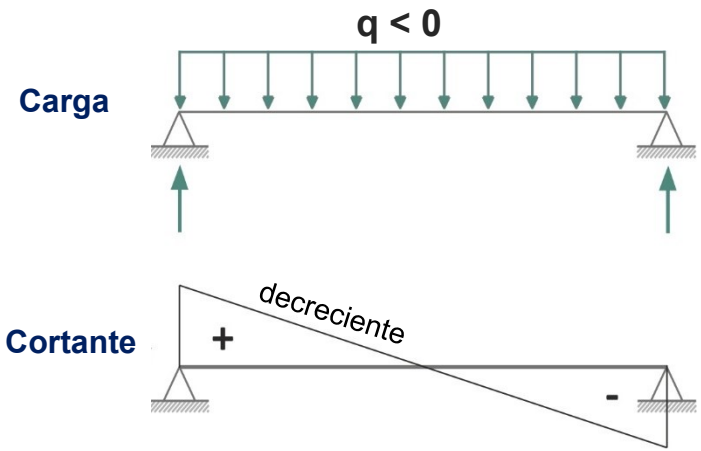
Flector 2º grado

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.4. Pendiente

Relación **carga – cortante** → q es la pendiente de V

Por ello, si:

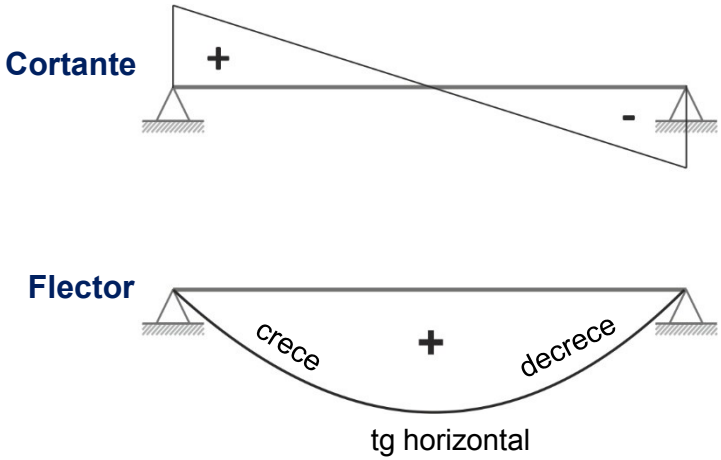
- **q > 0** → cortante **creciente**
- **q = 0** → cortante **constante**
- **q < 0** → cortante **decreciente**



Relación **cortante – flector** → V es la pendiente de M

Por ello, si:

- **V > 0** → flector **creciente**
- **V = 0** → flector con **pendiente nula**
- **V < 0** → flector **decreciente**

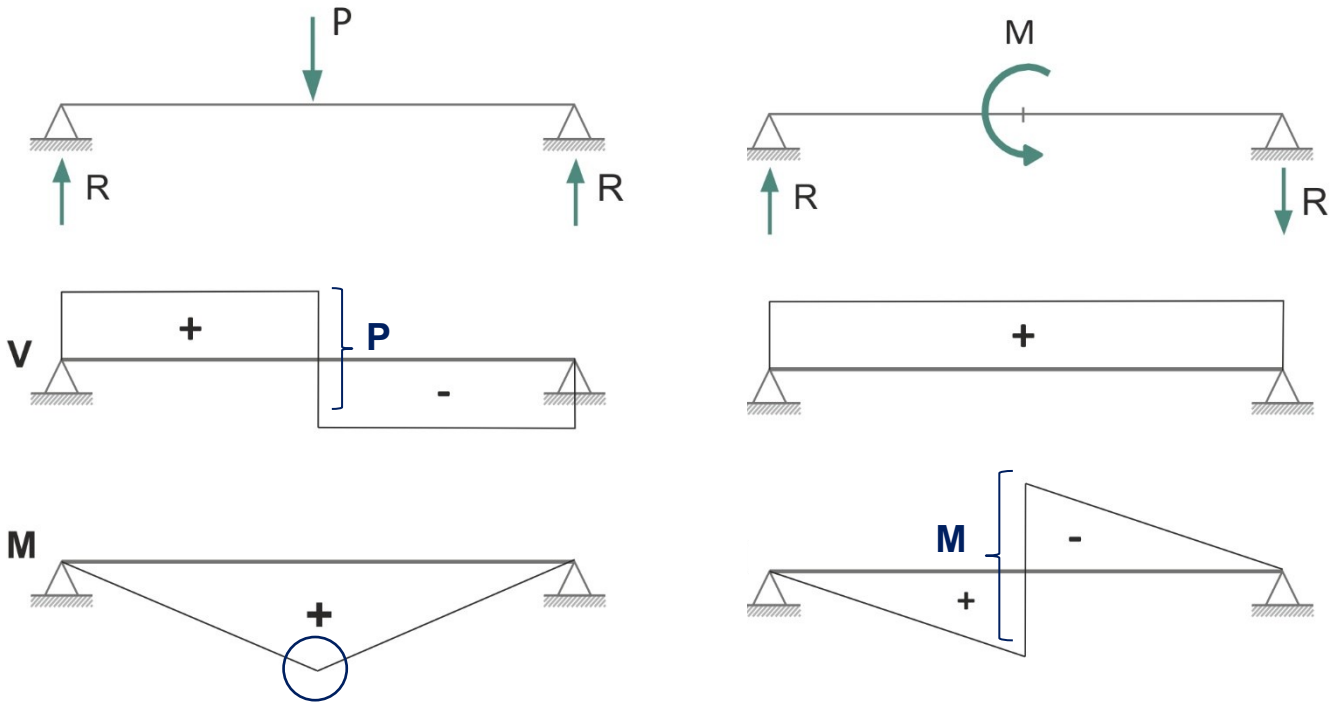


5. Método para dibujar los Diagramas: 5.5. Saltos debidos a cargas y momentos puntuales

Las **cargas puntuales** dan lugar a saltos en el diagrama de cortante, y cambios bruscos de pendiente en el de flector.

Los **momentos puntuales** dan lugar a saltos en el diagrama de flector.

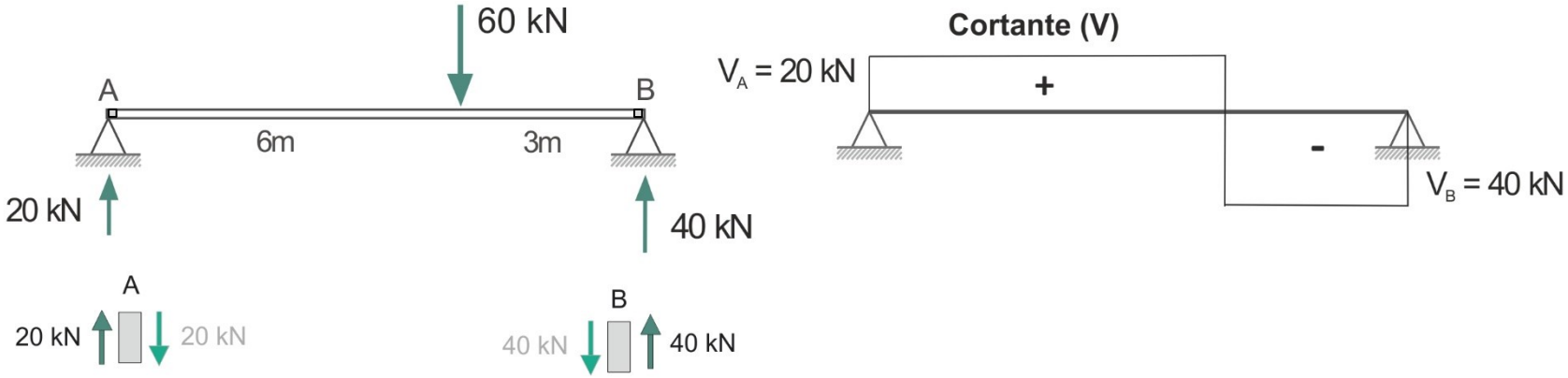
El **valor** del salto es igual al valor de la carga o momento puntual que lo provoca.



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.6. Valores extremos

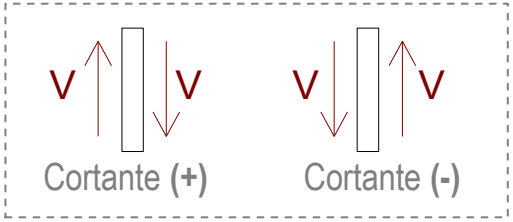
Cortante

En los extremos, el cortante es igual a la reacción o carga puntual que haya aplicada en el extremo



En **A**, el cortante por la izquierda es la reacción 20 kN. El cortante por la derecha es 60-40 = 20 hacia abajo.

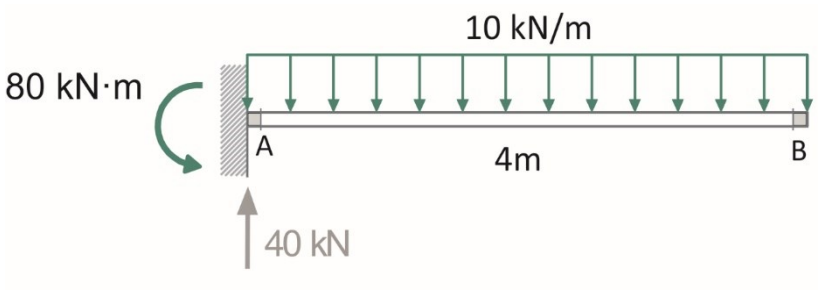
En **B**, el cortante por la derecha es la reacción 40 kN. El cortante por la izquierda es 60-20 = 40 hacia abajo.

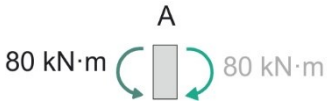


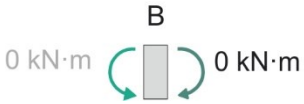
5. Método para dibujar los Diagramas: 5.6. Valores extremos

Flector

En los extremos, el momento flector es igual al momento puntual que haya aplicado en el extremo (si no hay momento puntual, el flector en el extremo es nulo).

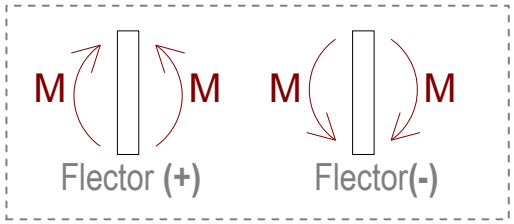






En A, flector por la izquierda es igual al momento en el empotramiento (80 mkN).
El flector por la derecha es igual y contrario.

En B, el flector por la derecha es nulo (extremo libre).
El flector por la izquierda es 40·4 – 80 – 10-·4·2 = 0.



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.7. Deformada

La **deformada** de la viga se dibuja teniendo en cuenta (a) el signo del flector y (b) las coacciones en los enlaces.

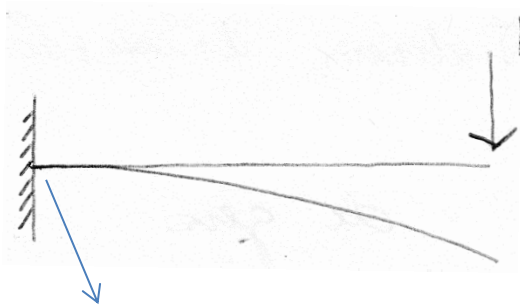
Signo del flector:

- Flector **positivo** → curvatura **cóncava**
- Flector **negativo** → curvatura **convexa**
- Flector **nulo** → **línea recta** (curvatura nula)

Coacciones en los enlaces:

- **Apoyos** → desplazamiento impedido en el plano perpendicular al apoyo.
- **Articulaciones** → todos los desplazamientos impedidos.
- **Empotramientos** → desplazamientos y giro impedidos.

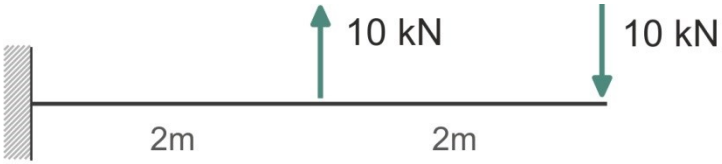
Empotramiento

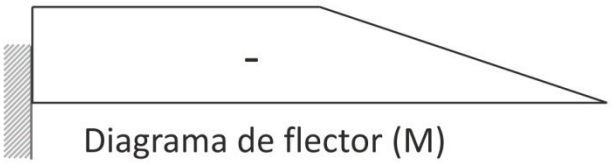


Giro = 0 (tangente horizontal)

5. Método para dibujar los Diagramas: 5.6. Deformada

Ejemplo:

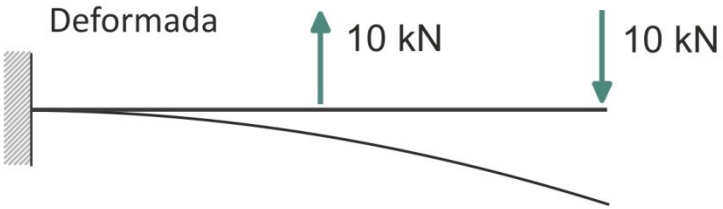




Para dibujar la deformada es necesario obtener antes el diagrama de flector.

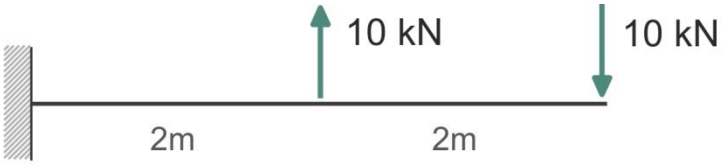
En este caso:

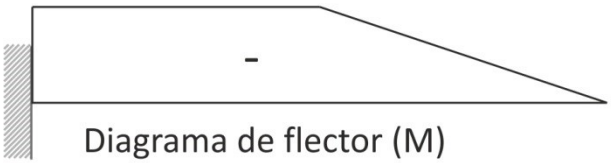
- Flector negativo → curvatura **convexa**
- Desplazamiento y giros **nulos** en el empotramiento



5. Método para dibujar los Diagramas: 5.6. Deformada

Ejemplo:



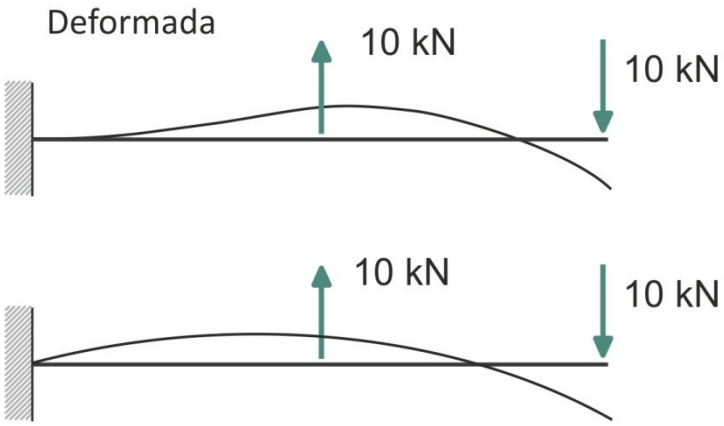


Para dibujar la deformada es necesario obtener antes el diagrama de flector.

En este caso:

- Flector negativo → curvatura **convexa**
- Desplazamiento y giros **nulos** en el empotramiento

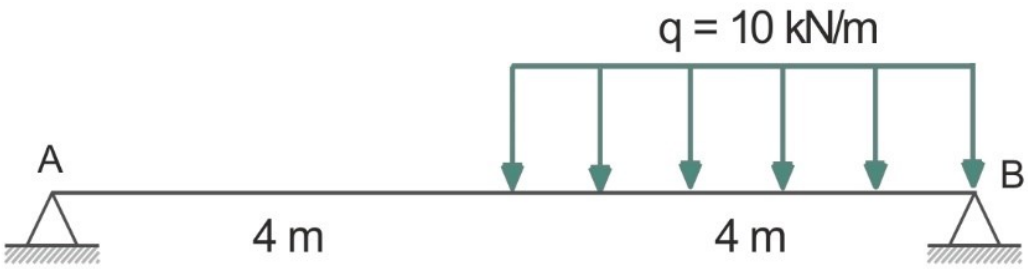
Errores más comunes:



6. Aplicación práctica

Ejemplo

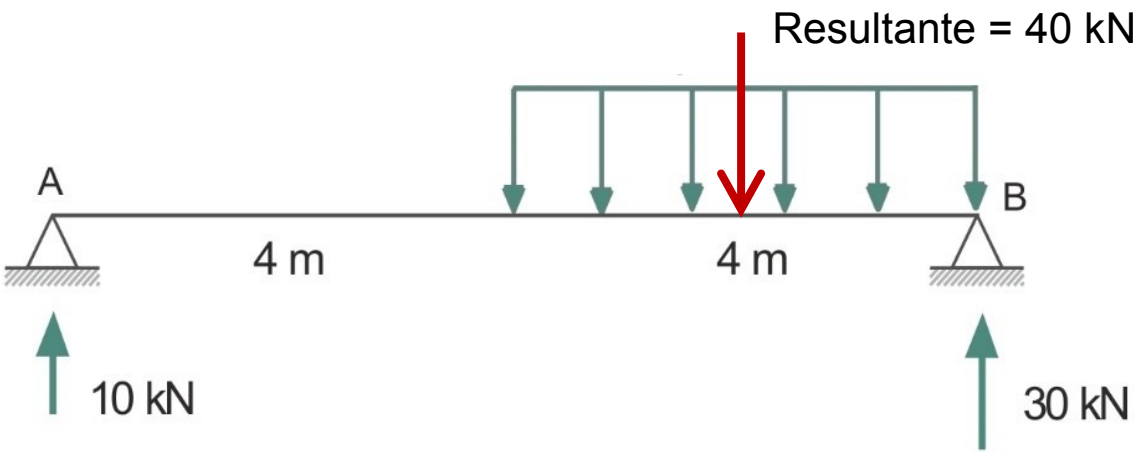
Dibujar los diagramas de esfuerzos y la deformada de una viga biapoyada con carga uniforme en mitad del vano.



6. Aplicación práctica

Paso 1. Dibujar reacciones

Las reacciones se calculan aplicando las ecuaciones de equilibrio.



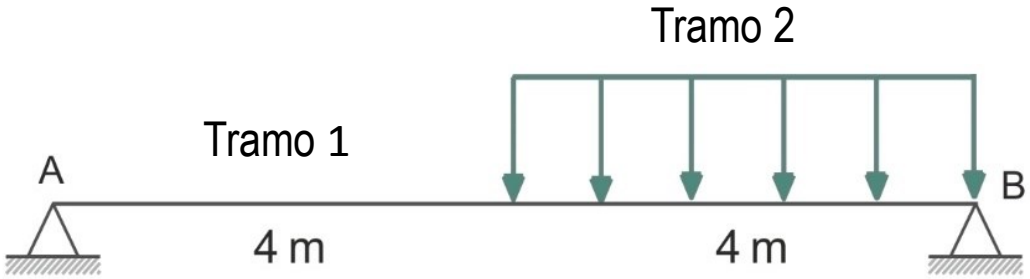
Aplicando **equilibrio de momentos** respecto a A $\rightarrow R_B$.

Aplicando **equilibrio de fuerzas verticales** $\rightarrow R_A$.

6. Aplicación práctica

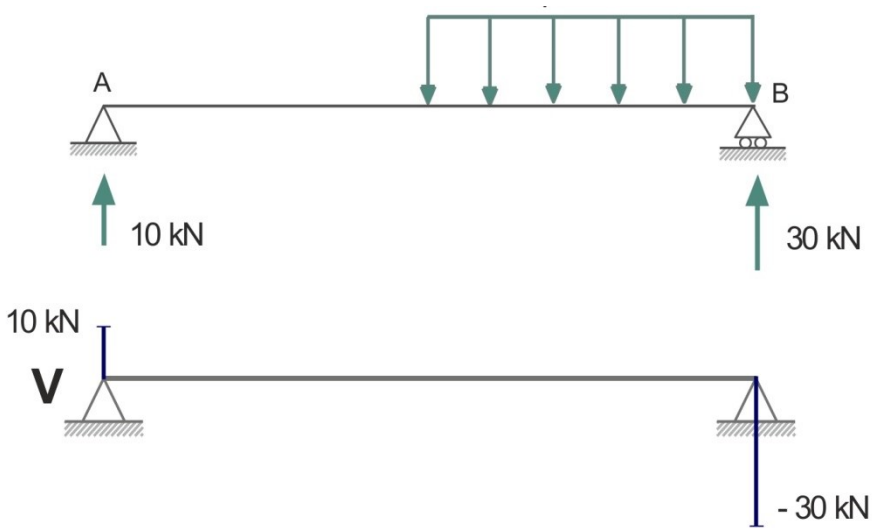
Paso 2. Definir tramos

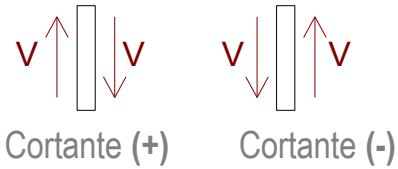
Al cambiar la carga se debe definir un nuevo tramo. La viga por tanto tiene dos tramos: uno sin carga (q = 0) y otro con carga uniforme (q = cte).



6. Aplicación práctica

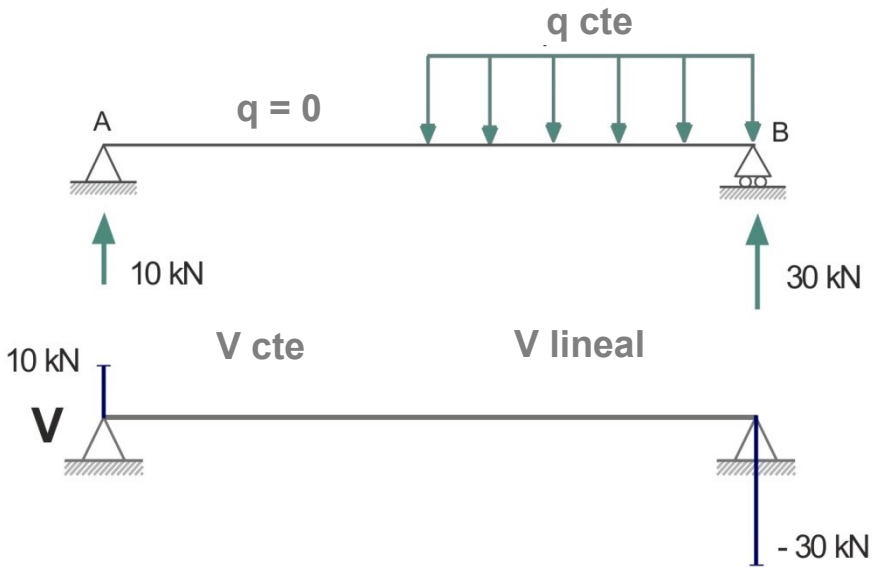
3. Cortante: extremos

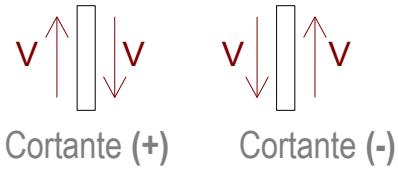




6. Aplicación práctica

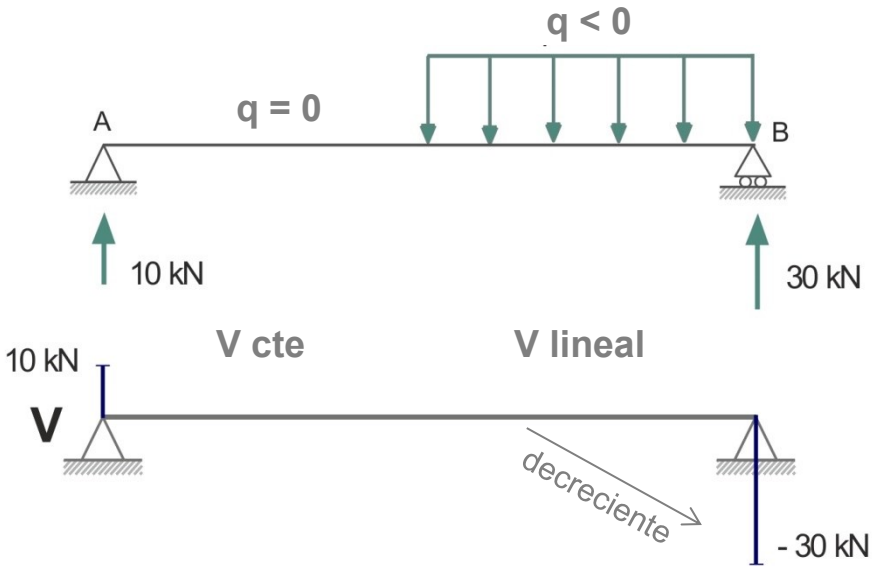
4. Cortante: tipo de ley

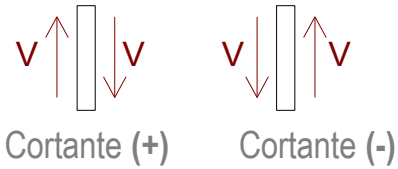




6. Aplicación práctica

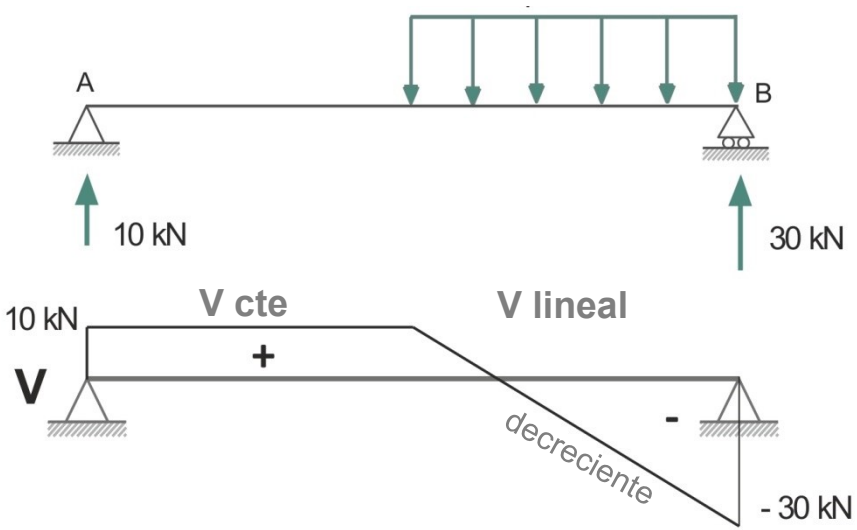
5. Cortante: pendiente

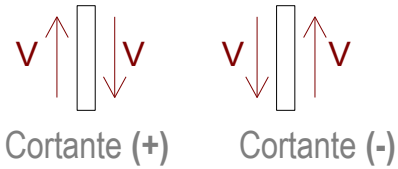




6. Aplicación práctica

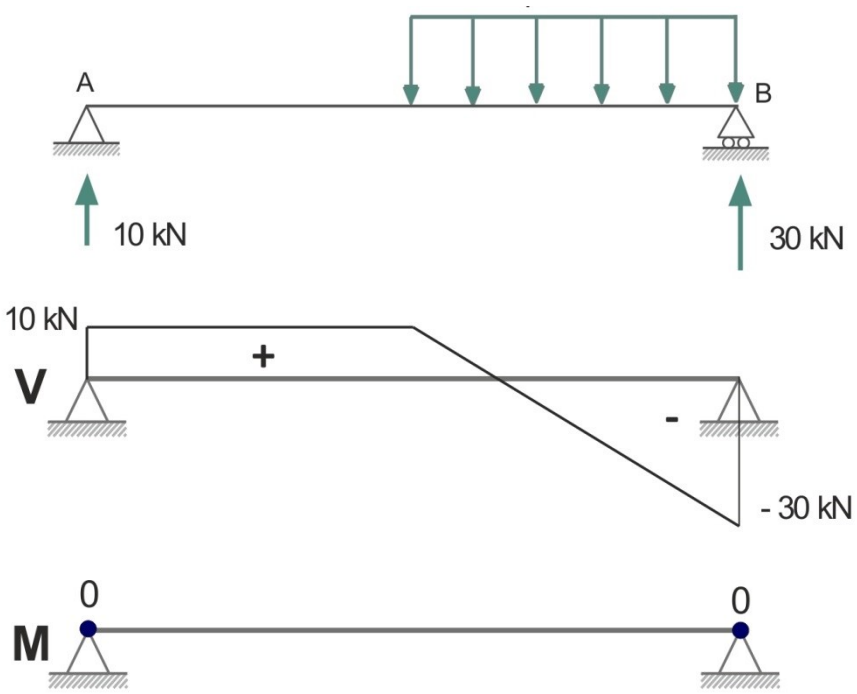
6. Cortante: diagrama

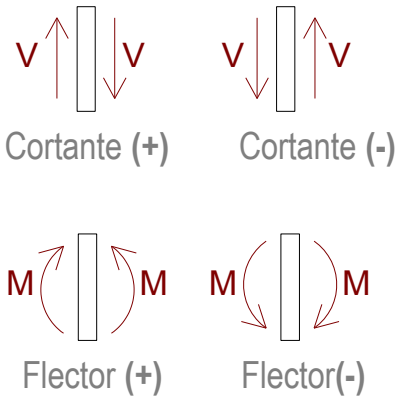




6. Aplicación práctica

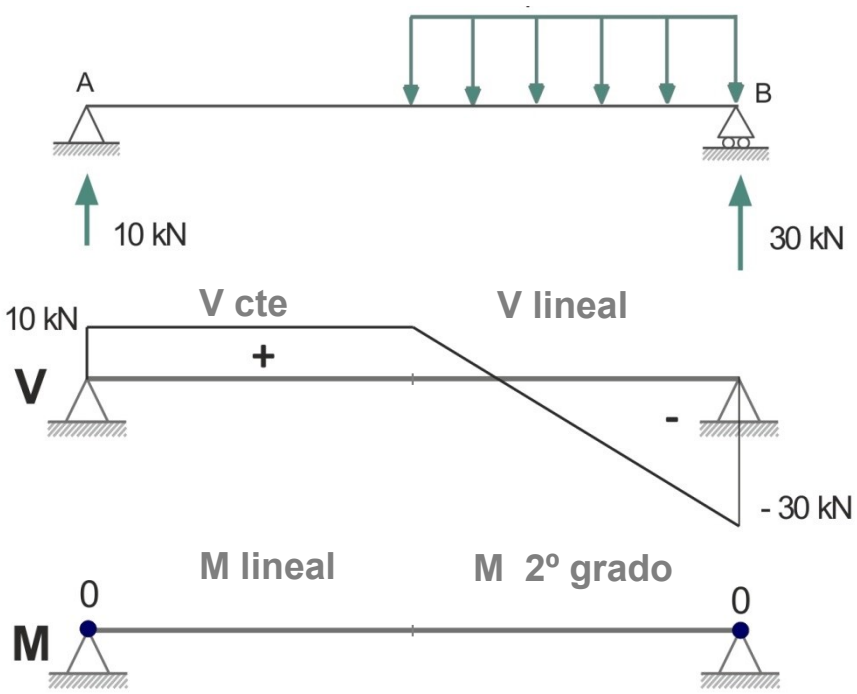
7. Flector: extremos

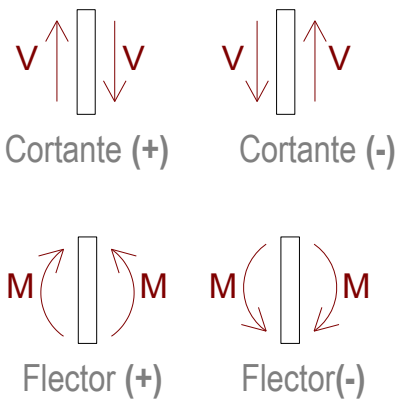




6. Aplicación práctica

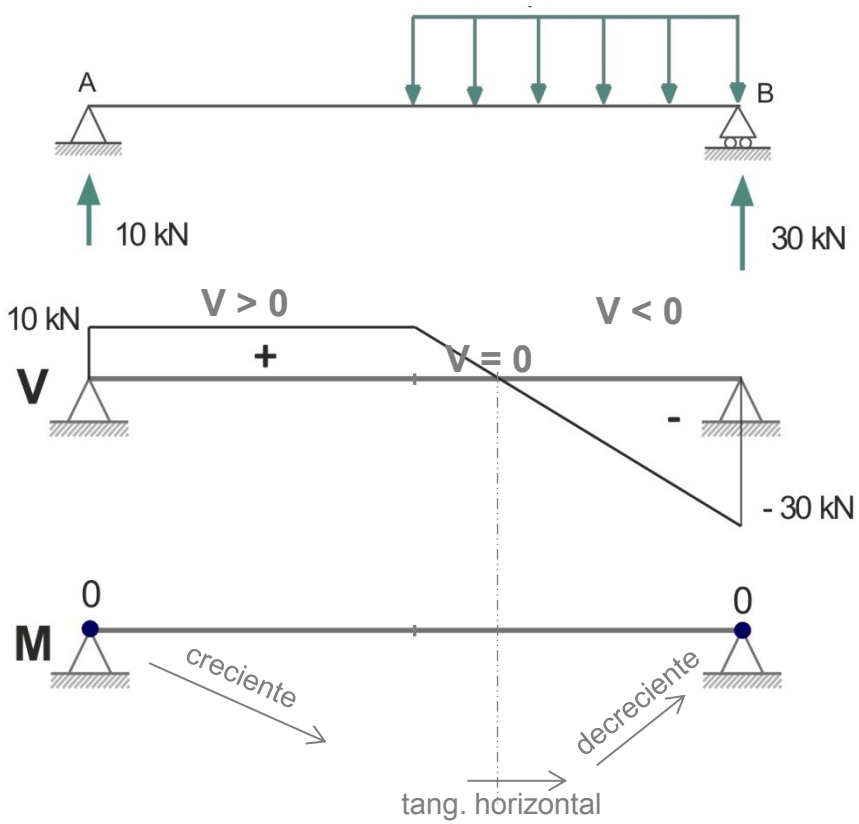
8. Flector: tipo de ley

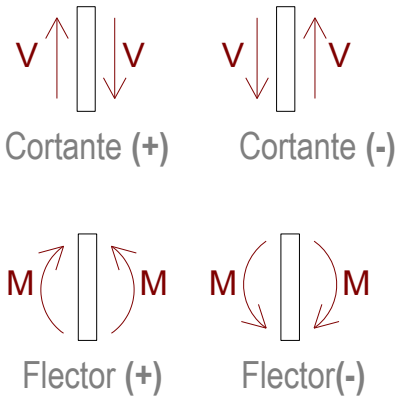




6. Aplicación práctica

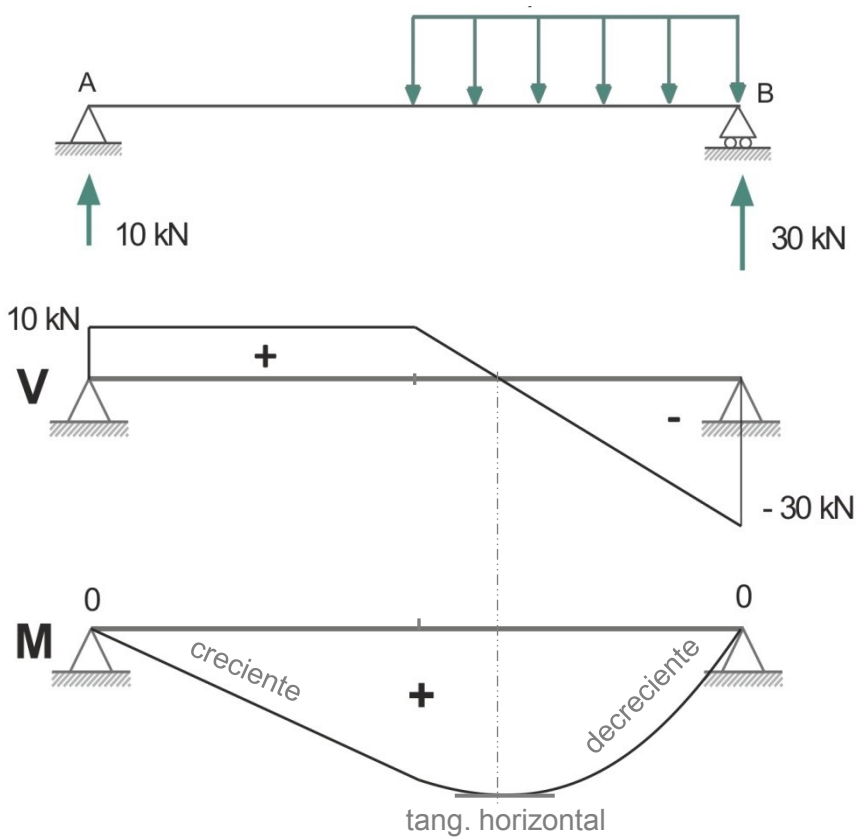
9. Flector: pendiente

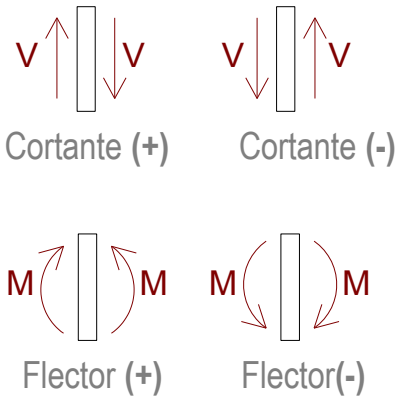




6. Aplicación práctica

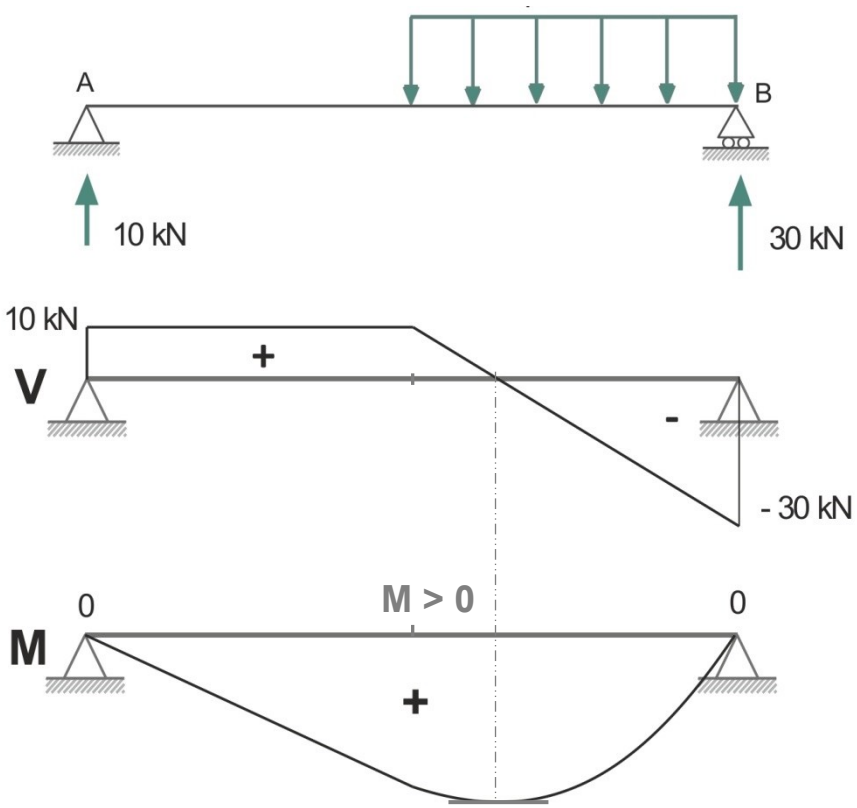
10. Flector: diagrama

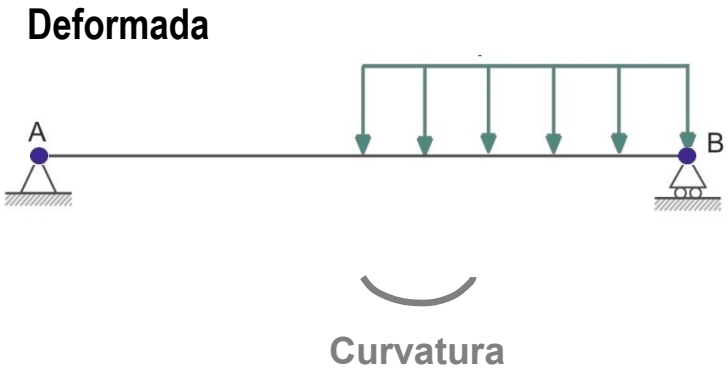




6. Aplicación práctica

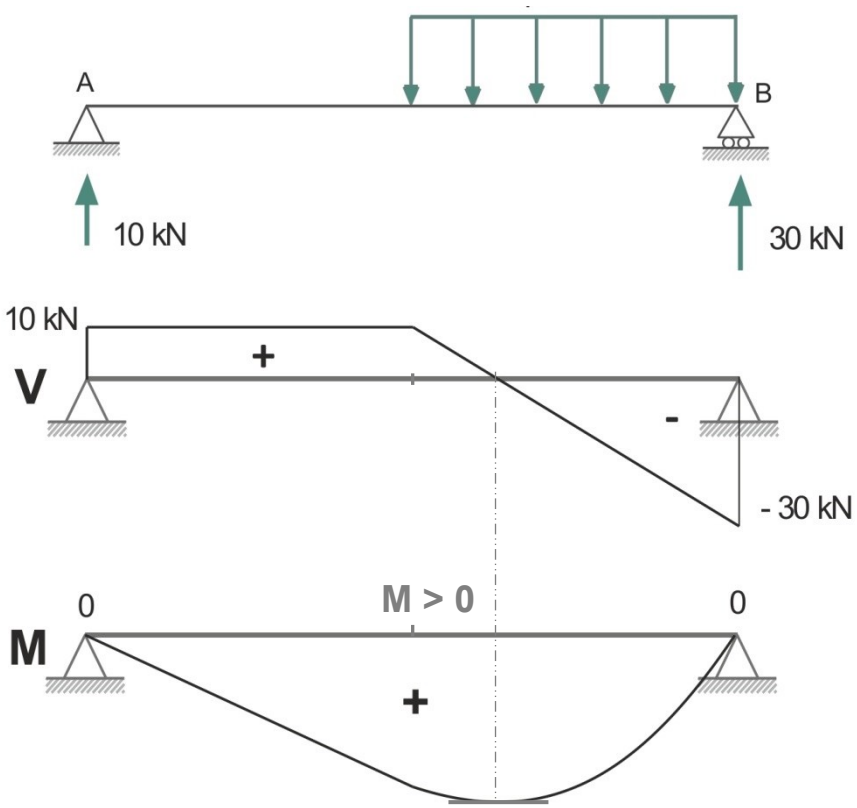
11. Deformada

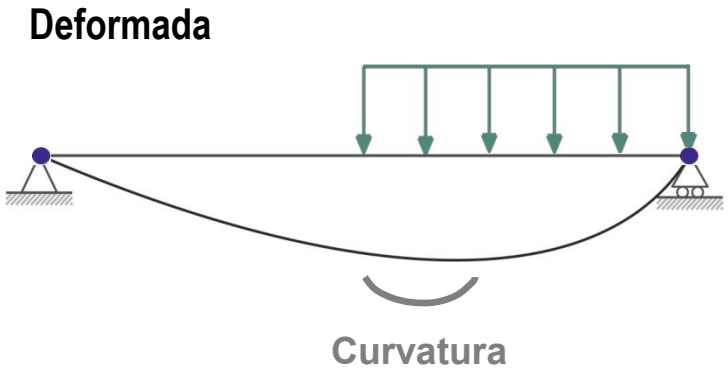




6. Aplicación práctica

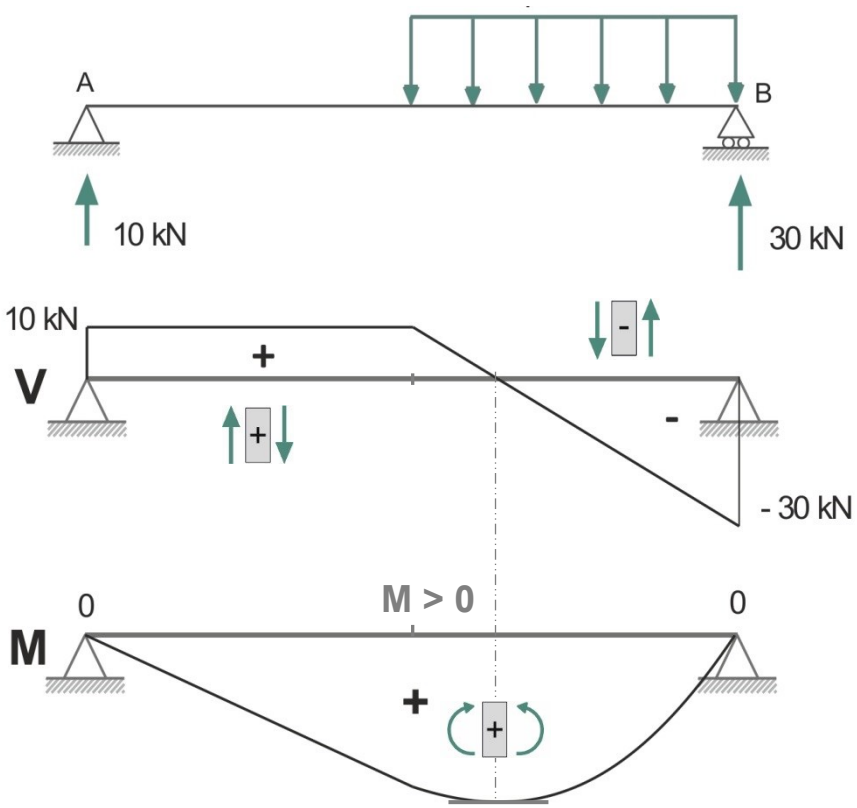
11. Deformada



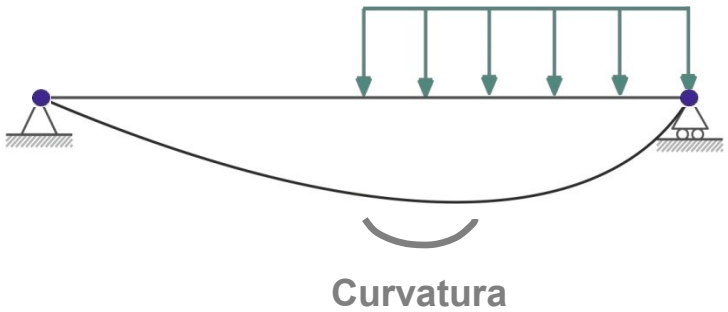


6. Aplicación práctica

12. Interpretación de resultados

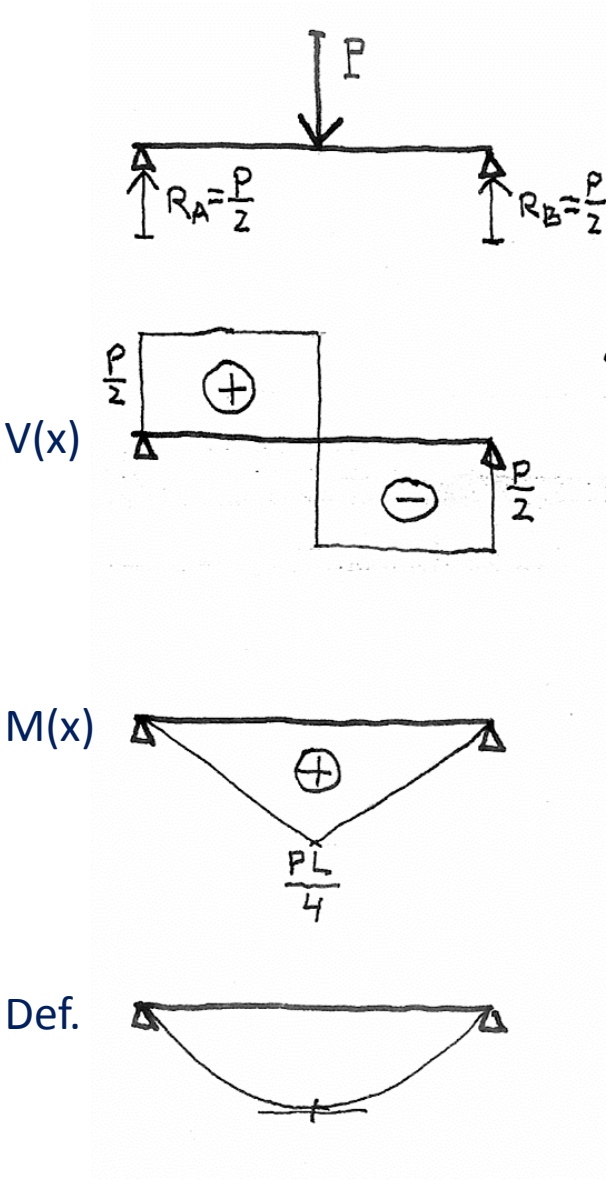


Deformada



7. Ejercicios resueltos

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 01

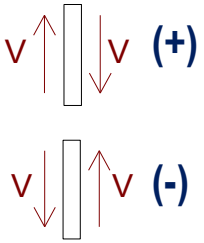


Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

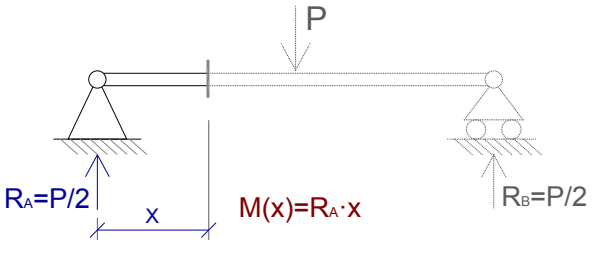
1. Hallar las reacciones: Estructura simétrica, las reacciones en ambos apoyos deben ser iguales. Por tanto, para que se cumpla $\Sigma F_v=0$, ambas reacciones deben valer P/2. Comprobar cómo también se cumple el equilibrio de momentos en cualquiera de los apoyos ($\Sigma M=0$).

2. Diagrama de Cortantes (V): Si comenzamos a analizar la estructura por el extremo izquierdo, tenemos una fuerza de valor $R_A=P/2$ → Cortante de valor positivo (recordamos el criterio de signos). Desde este extremo izquierdo hasta el centro de la viga no actúan más cargas por lo que la ley de Cortantes es constante de valor V(x) = +P/2.

Por el extremo derecho, aplicando el mismo criterio, obtenemos un Cortante de valor V(x) = -P/2 (recordar el criterio de signos: carga ascendente por la derecha, cortante negativo). En el centro del vano, donde se aplica la carga P, se produce el salto en el diagrama de cortantes (de valor P). El diagrama es antimétrico.

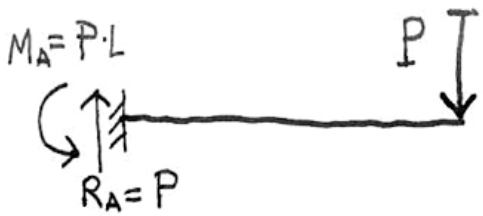


3. Diagrama de Flectores (M): También analizamos la viga desde los extremos hacia el centro. En los extremos M(x)=0, ya que el brazo (x=0). A medida que nos movemos hacia el centro, el Flector aumenta linealmente. El Flector máximo se da en la sección central: $M=R_A \cdot L/2$

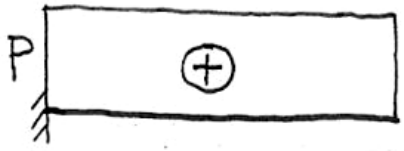


4. Deformada: Toda la viga sometida a flector positivo: curvatura cóncava. Estructura simétrica → en la sección central el giro = 0 (tg. horiz).

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 02



V(x)



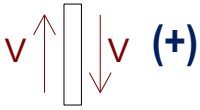
M(x)

Def.

Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

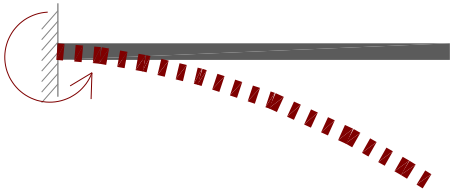
1. Hallar las reacciones: Empotramiento (3 coacciones): aplicamos cond. de equilibrio: debe haber una reacción vertical que compense la fuerza P ($\Sigma F_v=0$). P también produce un momento en el empotramiento (P·L), que produce una reacción de momento del mismo valor y signo contrario ($\Sigma M_A=0$).

2. Diagrama de Cortantes (V): Comenzando el análisis tanto por la izquierda como por la derecha, obtenemos un valor de V(x) =+P en ambos extremos (carga puntual P en el extremo de la ménsula, y reacción R_A=P en el empotramiento).



Recordar según el criterio de signos del Cortante, que ambos son positivos aunque ambas fuerzas tienen signos contrarios. A lo largo de toda la viga no existen otras fuerzas, por lo que el V(x) no varía. Recordemos: estado de cargas con sólo cargas puntuales → V(x)=cte → M(x)=lineal.

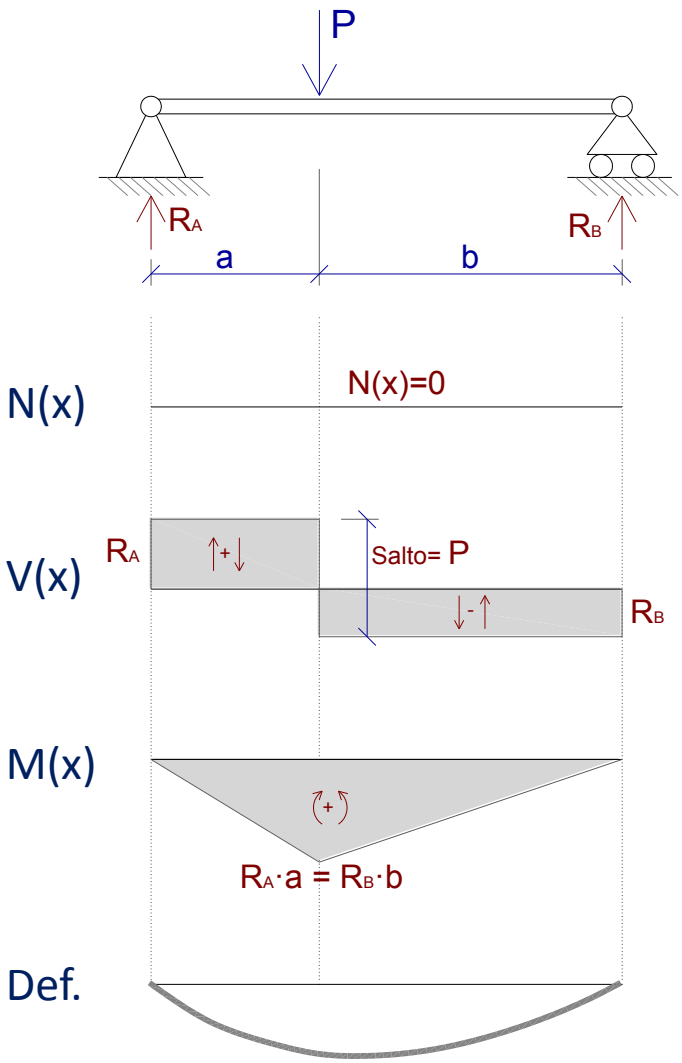
3. Diagrama de Flectores (M): Será lineal (recta inclinada) y en el extremo de la ménsula será 0 (ya que no hay Momento aplicado). En el extremo del empotramiento tendremos una reacción de Mto. de valor M_A=P·L ($\Sigma M_A=0$). Su signo será contrario al Momento P·L producido por la carga en el extremo de la ménsula para compensarlo.



Existe una reglilla para comprobar que es correcto el signo del Momento en el empotramiento: *"La punta de la flecha siempre encontrará antes a la deformada que a la viga".*

4. Deformada: En el empotramiento no hay giro (sale con tg. horiz) describiendo una parábola. Al estar toda la viga sometida a un Flector negativo, la curvatura será toda ella convexa. M(x) = negat. →

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 03



1. Hallar las reacciones: Estamos ante una estructura no simétrica, por lo que las reacciones: $R_A \neq R_B$. Si tomamos $\Sigma M=0$ por donde pasa la fuerza P (para que ésta no nos produzca momento), podemos deducir fácilmente que $R_A > R_B$ (ya que $a < b$). Aunque estamos en casos de resolución a estima, y no tenemos porqué calcular numéricamente las reacciones, sí debemos saber que $R_A > R_B$.

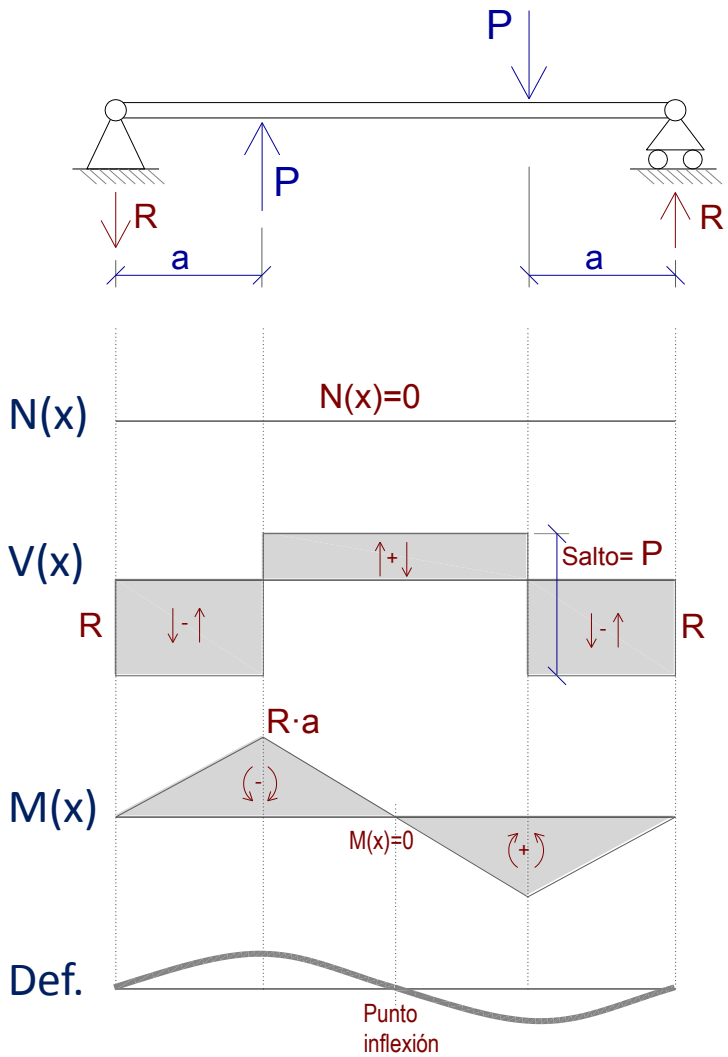
2. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: $N(x) = 0$.

3. Diagrama de Cortantes (V): Comenzando el análisis por los extremos: por el extremo izquierdo, V tiene el valor de la fuerza aplicada R_A (fuerza perpendicular a la barra, produce un Cortante del mismo valor). Igualmente, comenzamos a analizar la estructura por el extremo derecho, sabemos que $V = R_B$. Desde estos extremos hasta el punto interior de la barra donde está aplicada P, no hay más cargas, por lo que el Cortante mantendrá esos valores constantes R_A por al izquierda y R_B por la derecha. En el punto de aplicación de la carga P se produce un salto de ese valor.

4. Diagrama de Flectores (M): Será lineal (recta inclinada) y en ambos apoyos será 0. Si analizamos por la izquierda, en la sección donde pasa P, el flector valdrá $M=R_A \cdot a$. De igual modo, por la derecha, en esa misma sección el flector valdrá $M=R_B \cdot b$. Ambos valores deben ser iguales: condición de $\Sigma M_C=0$ (al no haber momento aplicado, también sabemos que no puede haber salto en la ley de Flectores). Comprobamos efectivamente cómo un salto en la ley V(x) produce un punto anguloso en la ley de M(x).

5. Deformada: Flector positivo → curvatura cóncava: La estructura no es simétrica, por lo que no sabremos donde está la tg.horiz (giro 0).

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 04



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Estructura antisimétrica: Estamos ante una estructura antisimétrica, por lo que podemos saber que: N(x), M(x) y Def serán antisimétricas. V(x) será simétrica. Las reacciones también serán antisimétricas.

2. Hallar las reacciones: Las 2 fuerzas P aplicadas se anulan al establecer el equilibrio $\Sigma F_V=0$. Pero no hay que olvidar que también provocan un par de fuerzas (giro en la barra) que debemos compensarlo con otro par de fuerzas con las reacciones de los apoyos.
De aquí se deduce que R < P, ya que los momentos que producen ambos pares de fuerzas deben ser iguales para que se establezca el equilibrio, y podemos ver que el brazo del par R es mayor al brazo del par P.

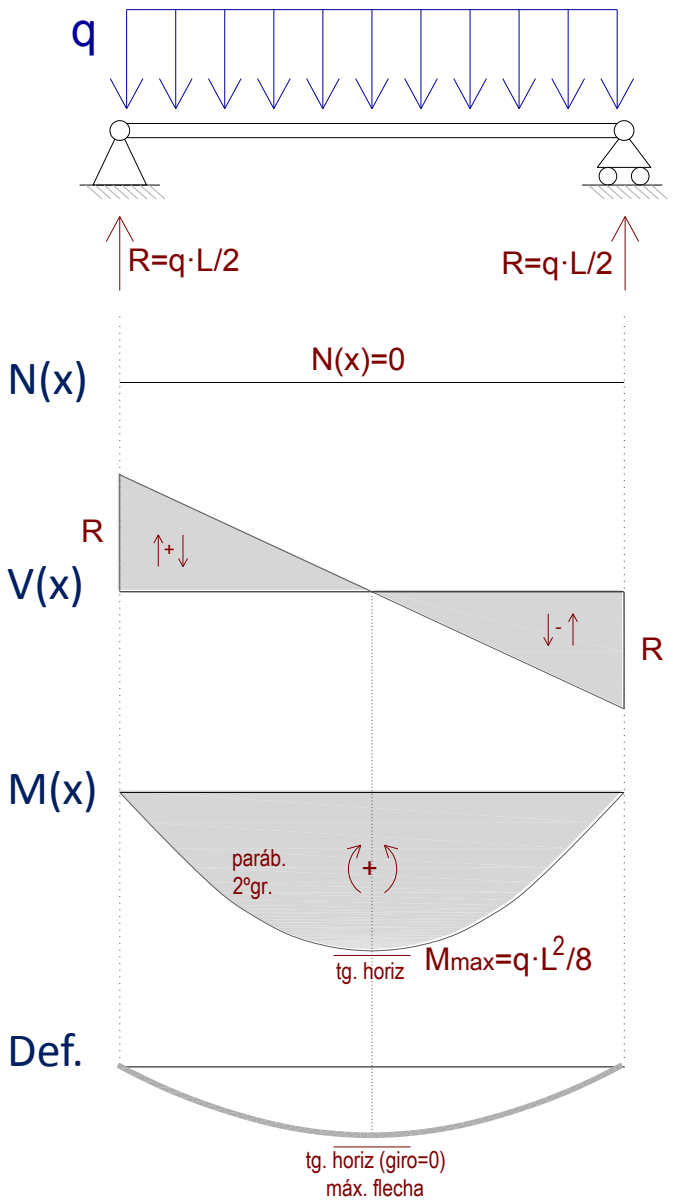
3. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

4. Diagrama de Cortantes (V): Ley simétrica, formada por tramos de valor constante (rectas horizontales), ya que lo producen cargas puntuales. En el punto de aplicación de cada carga, tenemos un salto en V(x) del valor de esa carga.

5. Diagrama de Flectores (M): Será lineal (rectas inclinadas) y antisimétrica. De esto último se deduce que en el eje de antisimetría su valor es 0. En los puntos de aplicación de la carga (salto en el Cortante), se produce un cambio de pendiente (punto anguloso) en los Flectores.

6. Deformada: Donde el Flector es positivo → curvatura cóncava: ⌣
Donde el Flector es negativo→ curvatura convexa: ⌢. Lógicamente donde el Flector =0 se produce el punto de inflexión (cambio de curvatura de cóncava a convexa). La deformada será antisimétrica.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 05



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Estructura simétrica: Estamos ante una estructura simétrica, por lo que podemos saber que: las Reacciones, N(x), M(x) y la Deformada serán simétricas. V(x) será antisimétrica.

2. Hallar las reacciones: Por simetría, sabemos que ambas reacciones serán iguales, por lo que sólo tenemos una incógnita (R); estableciendo equilibrio de $\Sigma F_V=0$, se deduce de inmediato que $\rightarrow R+R=q\cdot L$.

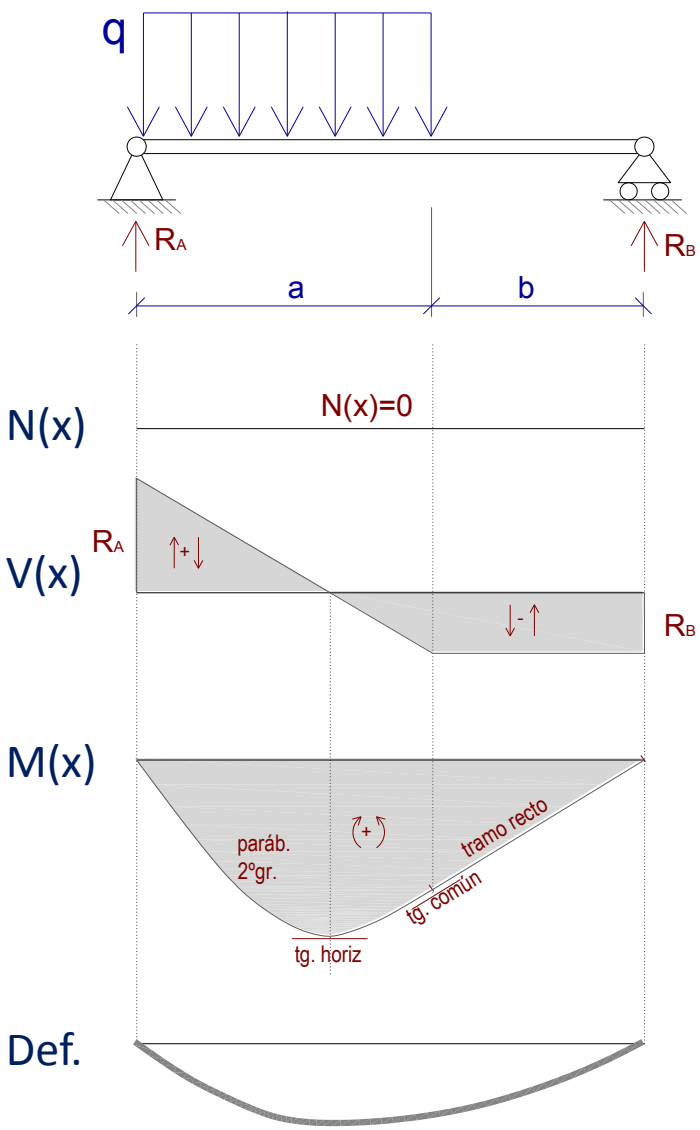
3. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

4. Diagrama de Cortantes (V): Ley antisimétrica de tipo lineal (recta inclinada), ya que tenemos una carga continua. Como esta carga continua tiene el mismo valor "q" para toda la barra, la pendiente de V(x) será también la misma para toda la barra. El valor de V en los extremos de la viga es igual al valor de la carga puntual aplicada (reacción R). Al ser una ley antisimétrica, se deduce que en el eje de simetría V=0.

5. Diagrama de Flectores (M): Al ser V(x) lineal, M(x) será una ley parabólica de 2º grado. En los extremos M(x) es cero, ya que nos encontramos con apoyos donde no hay momento puntual aplicado. En el eje de simetría, donde V=0, tendremos en la ley M(x) una tg. horizontal (giro=0); al ser éste el vértice de la parábola, será el flector máximo.

6. Deformada: Todo el flector es positivo → curvatura cóncava: ⌣. La deformada será simétrica: en el eje de simetría, el giro de la deformada es 0, por lo que tendremos ahí el punto de flecha máxima.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 06



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: Al no ser la estructura simétrica, las reacciones: $R_A \neq R_B$. Si tomamos $\Sigma M=0$ en el ficticio punto de aplicación de la resultante de la carga continua (a una distancia a/2 del apoyo izquierdo, para que "q" no nos produzca momento), podemos deducir fácilmente que $R_A>R_B$. También sería fácil suponerlo, ya que R_A está mucho más cerca de la carga "q", por lo que es fácil pensar que ese apoyo se llevará más carga.

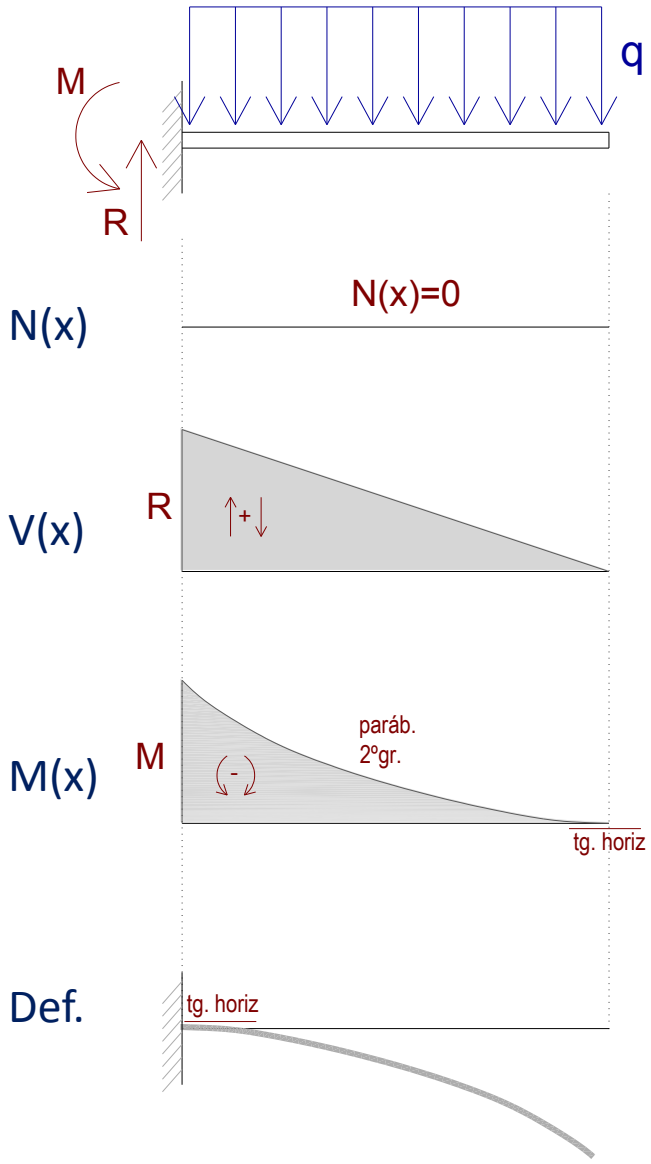
2. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

3. Diagrama de Cortantes (V): El tramo donde actúa la carga "q" (q=cte), la ley V(x) será lineal (recta inclinada). El tramo donde no actúa la carga continua, sabemos que V(x) tendrá un valor cte.
Si empezamos a leer por los extremos, vemos como el Cortante por la izquierda valdrá R_A (+) y enseguida decrece porque empieza a actuar la carga "q". Por la derecha valdrá R_B (-), siendo este valor constante en el tramo donde no actúa otra carga. A lo largo de la viga no habrá salto en V(x), ya que no hay cargas puntuales.

4. Diagrama de Flectores (M): El tramo donde V(x) es lineal, M(x) será parábola de 2º grado. El tramo donde V(x) es cte, M(x) será lineal (recta inclinada). Donde el Cortante es 0 se produce una tg. horizontal en M(x) (pendiente=0). Donde la ley V(x) pasa de cte a lineal, al no haber salto, significa que en M(x) habrá tg. común (entra con la misma pte.).

5. Deformada: El Flector es positivo → curvatura cóncava en todo el tramo de la viga: ⌣. La deformada no será simétrica, ya que no lo es la estructura.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 07



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: Aplicamos condición de equilibrio: debe haber una reacción vertical que compense la carga "q" ($\Sigma F_v=0$) → se deduce que R = q·L. Esta carga "q" también produce un momento en el empotramiento de valor M=q·L·L/2 ($\Sigma M_E=0$). No hay reacción horizontal en el empotramiento ya que no existen cargas horizontales.

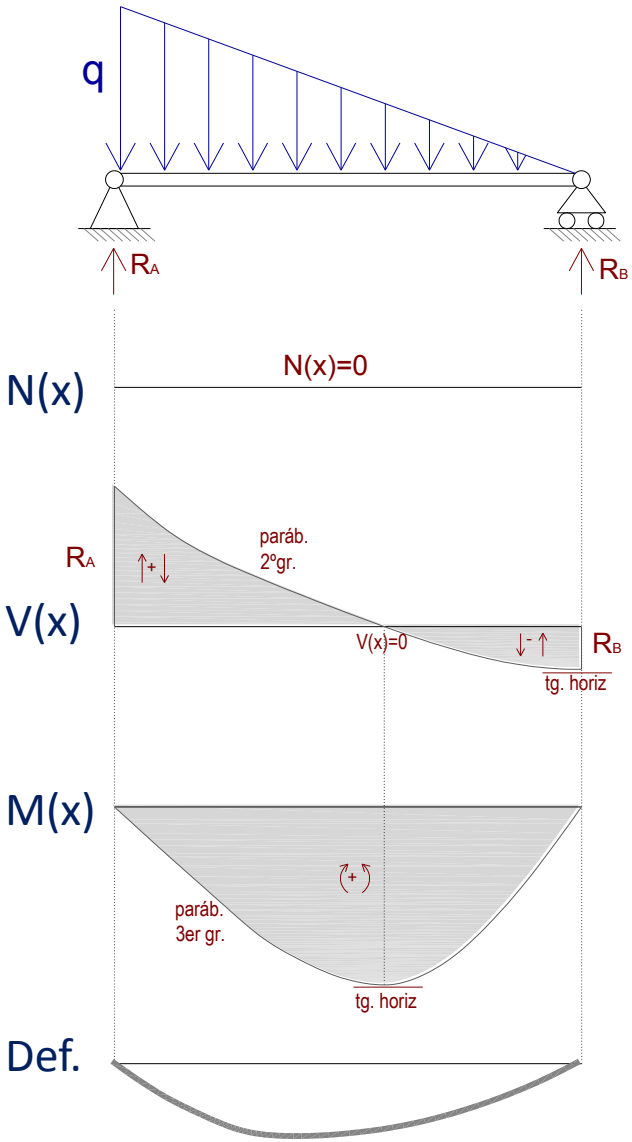
2. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

3. Diagrama de Cortantes (V): Como la ley de cargas es uniforme, sabemos que V(x) será lineal (recta inclinada). En el extremo de la ménsula V(x)=0, ya que leyendo por la derecha, en la rebanada última del extremo de la ménsula no actúa la carga "q" (carga resultante=q·x, y $x_{extremo}=0$). A medida que nos alejamos del extremo, V(x) comienza a crecer linealmente, ya que comienza a crecer el valor de x.
Leyendo por la izquierda, en el empotramiento tenemos una carga puntual de valor R, que producirá un Cortante de ese valor. A medida que nos distanciamos del empotramiento, comienza a actuar la carga "q" (x empieza a crecer), por lo que tendremos un decrecimiento lineal de V(x).

4. Diagrama de Flectores (M): Como V(x) es lineal, la ley de Flectores M(x) será parabólica de 2º grado. También sabemos que donde V(x)=0 (extremo de la ménsula) se produce una tg. horizontal en M(x) (pte=0).
Leyendo por la derecha, en el extremo de la ménsula M(x)=0, ya que no hay Momento puntual aplicado. Leyendo por la izquierda, M(x) tendrá el valor de la reacción de Momento (M) en el empotramiento.

5. Deformada: En el empotramiento no hay giro (sale con tg. horizontal). El Flector es negativo en toda la barra → curvatura convexa:

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 08



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: Al no ser la estructura simétrica, las reacciones: $R_A \neq R_B$. Si tomamos $\Sigma M=0$ en el ficticio punto de aplicación de la resultante de la carga trangular (a una distancia L/3 del apoyo izquierdo, para que "q" no nos produzca momento), podemos deducir fácilmente que $R_A>R_B$. También sería fácil suponerlo, ya que R_A está mucho más cerca de la resultante de la carga "q", por lo que es fácil pensar que ese apoyo se llevará más carga.

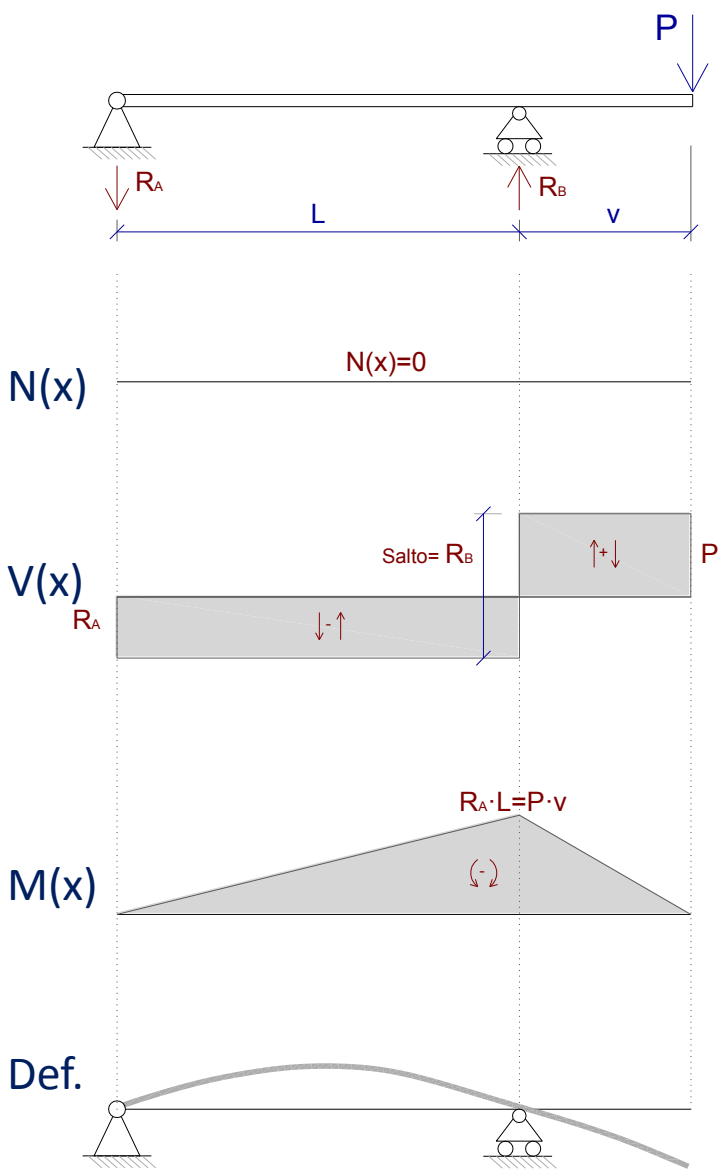
2. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

3. Diagrama de Cortantes (V): Como tenemos una ley de cargas triangular (lineal), la ley V(x) será parabólica de 2º grado. Donde la ley triangular vale 0 (en el apoyo derecho), quiere decir que pendiente de V(x) es nula, es decir, que tendremos una tangente horizontal en V(x).
Si empezamos a leer por los extremos, vemos como el Cortante por la izquierda valdrá R_A (+) y enseguida decrece porque empieza a actuar la carga "q". Por la derecha valdrá R_B (-), y crecería igualmente por efecto de la carga "q". A lo largo de la viga no habrá salto en V(x), ya que no hay cargas puntuales.

4. Diagrama de Flectores (M): Como V(x) es parabólica de 2º grado, M(x) será parabólica de 3er grado en toda su longitud. Donde el Cortante es 0 se produce una tg. horizontal en M(x) (pendiente=0).

5. Deformada: El Flector es positivo → curvatura cóncava en todo el tramo de la viga: ⌣. La deformada no será simétrica, ya que no lo es la estructura.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 09



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: Si tomamos $\Sigma M_B=0$, rápidamente nos podemos dar cuenta que R_A debe ser hacia abajo, y de menor valor que P (ya que L>v). Una vez conocido esto, estableciendo el equilibrio $\Sigma F_V=0$, igualmente deducimos que $R_B=R_A+P$. Por tanto, $R_A<P<R_B$.

Quizás la mayor dificultad de este diagrama, se encuentra en hallar correctamente las reacciones: vemos cómo si aplicamos las ecuaciones de equilibrio sistemáticamente, es fácil no equivocarse.

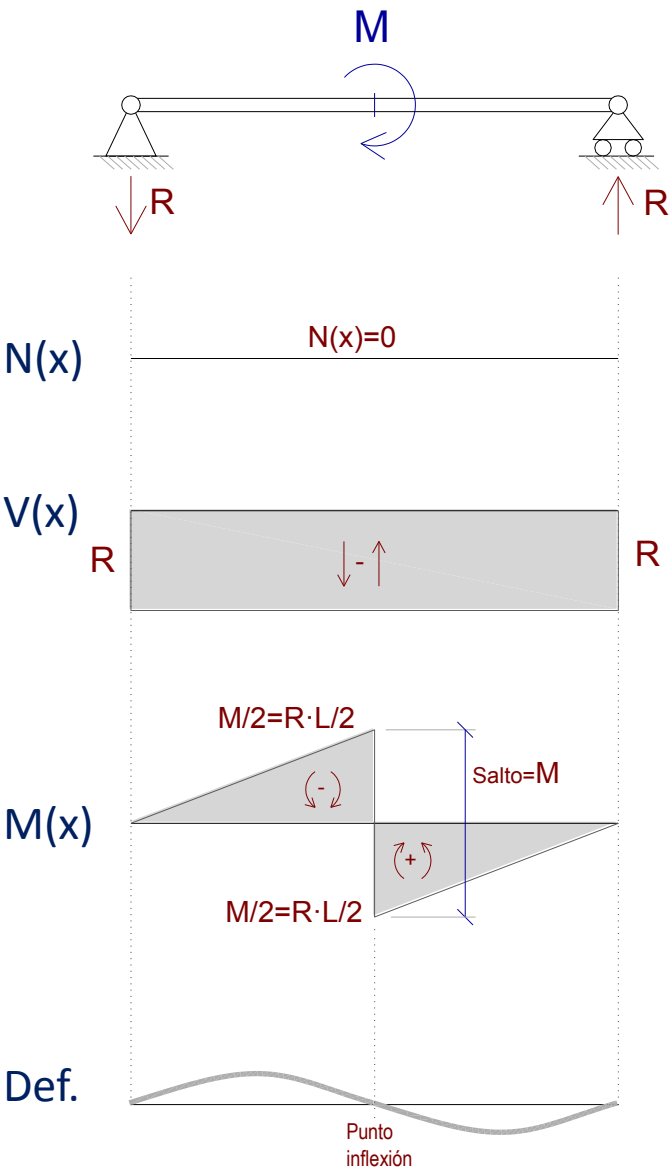
2. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

3. Diagrama de Cortantes (V): Como tenemos una ley de cargas sólo con cargas puntuales, la ley de Cortantes estará formada por tramos de valor constante (rectas horizontales). Leyendo por los extremos, sabemos que el valor de V(x) será el de la carga aplicada (aplicando el criterio de signos del Cortante), y en el punto B, tendremos un salto de valor R_B (valor de la carga aplicada en ese punto).

4. Diagrama de Flectores (M): Como V(x) es constante (recta horizontal), M(x) será lineal (rectas inclinadas) con distintas pendientes según el valor de V(x). El valor máximo de M(x) se dará en B, siendo éste $R_A \cdot L$ (si leemos por la izquierda), ó $P \cdot v$ (si leemos por la derecha). Ambos deben ser iguales, ya que no puede haber salto en la ley de M(x), ya que no hay Momento puntual aplicado que lo provoque.

5. Deformada: El Flector es negativo en toda la barra → curvatura convexa en todo el tramo de la viga: . La deformada no será simétrica, ya que no lo es la estructura.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 10



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: La única forma de equilibrar el Momento aplicado en el centro de la viga es mediante un par de fuerzas en los apoyos → M=R·L. Estas reacciones R, además de crear el equilibrio de ΣM=0, se compensan ambas y también mantienen el equilibrio $\Sigma F_V=0$.

2. Estructura antisimétrica: La estructura es antisimétrica, ya que el Momento se considera una fuerza antisimétrica. Por tanto, N(x), M(x) y la Deformada serán antisimétricos, mientras que V(x) será simétrico.

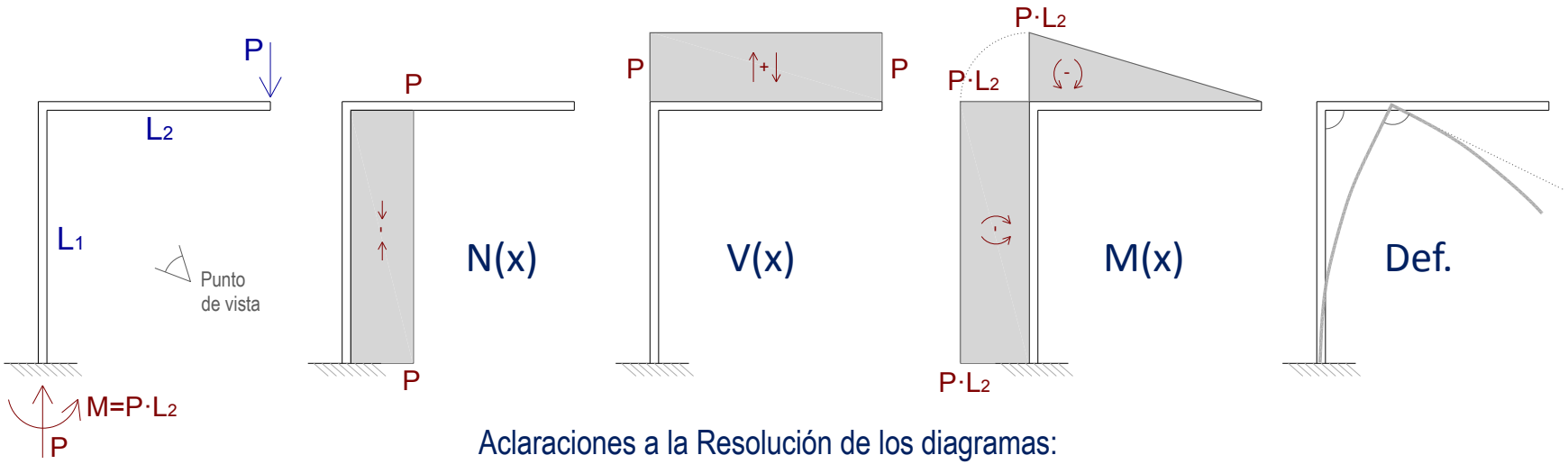
3. Diagrama de Axiles (N): No existen fuerzas ni componentes de fuerzas horizontales, por lo que no habrá Axiles: N(x) = 0.

4. Diagrama de Cortantes (V): Sobre la estructura sólo actúan cargas puntuales, por lo que la ley V(x) será constante (recta horizontal). Tanto si comenzamos a leer por la izquierda como por la derecha de la viga, tenemos un valor de V(x) de la carga puntual aplicada (reacciones en los apoyos) V(x)=-R. El Momento puntual aplicado en el centro del vano no produce salto, ya que sólo afecta a la ley de Flectores.

5. Diagrama de Flectores (M): Será lineal (rectas inclinadas), ya que la ley de Cortantes es constante. En los extremos M(x)=0, ya que no hay momento aplicado en los apoyos. Por la izquierda, R provoca un flector negativo, y por la derecha uno positivo. En el centro de la viga hay un momento puntual aplicado M, que provocará en la ley M(x) un salto de valor M.

6. Deformada: Donde el Flector es positivo → curvatura cóncava: Donde el Flector es negativo→ curvatura convexa: . Donde el Flector cambia de (+) a (-), se produce el punto de inflexión (cambio de curvatura de cóncava a convexa). La deformada será antisimétrica.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 11



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: La reacción vertical equilibra la fuerza P ($\Sigma F_V=0$). Esta fuerza P también produce un Momento de valor $P \cdot L_2$, que debe ser equilibrado con un momento en el empotramiento del mismo valor y sentido contrario.

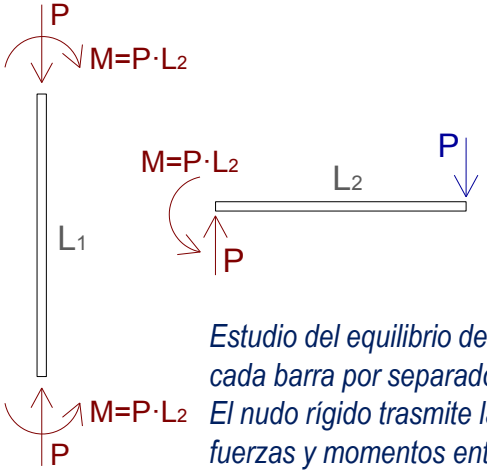
2. Diagrama de Axiles (N): La fuerza P en el extremo de la barra L_2 se trasmite a la barra L_1 en forma de Axil de compresión. La barra L_2 no soporta axil.

3. Diagrama de Cortantes (V): La barra L_2 soporta un Cortante de valor P (este cortante es el que se trasmite a la barra L_1 en forma de compresión). La barra L_1 no soporta Cortante, ya que no soporta cargas perpendiculares a dicha barra.

4. Diagrama de Flectores (M): El flector en el empotramiento vale $M=P \cdot L_2$. En la barra L_1 no hay cortante, por lo que M(x) será una ley constante de valor M.

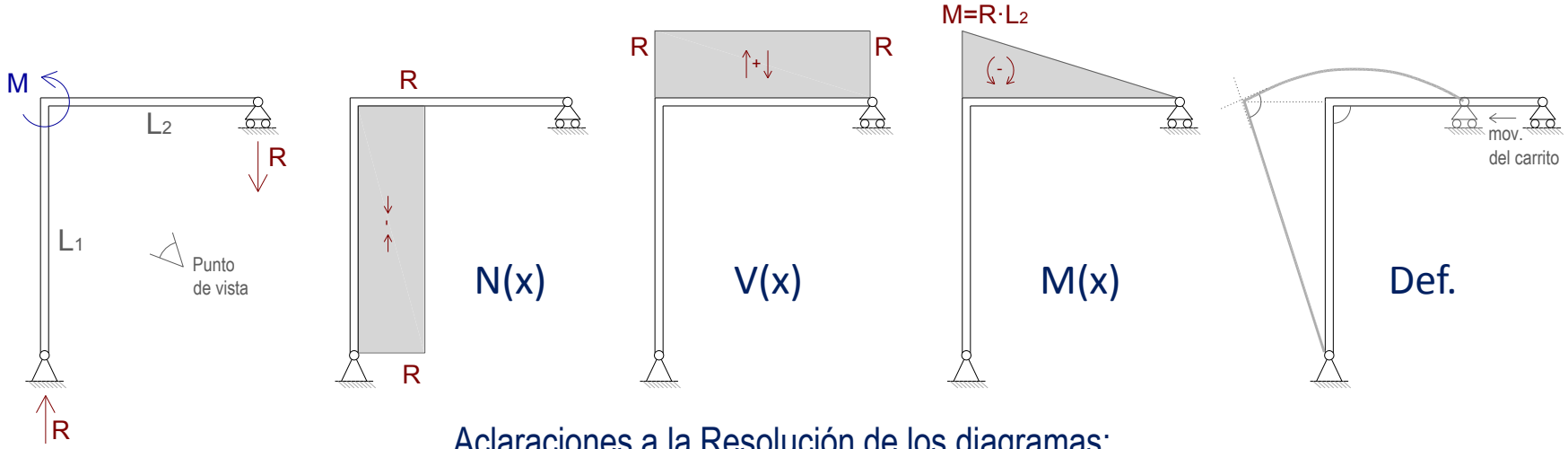
Leyendo la barra L_2 por la derecha, el extremo en ménsula tiene Flector=0. La carga P produce un flector negativo creciente a medida que nos alejamos del extremo. Como la barra L_2 tiene un Cortante de valor constante, el flector será lineal.

5. Deformada: Las 2 barras están sometidas a Flector negativo → curvatura convexa: . En el empotramiento, la deformada sale tangente a la barra. En el nudo rígido que une L_1 y L_2 se mantiene el ángulo de 90º.



Estudio del equilibrio de cada barra por separado. El nudo rígido trasmite las fuerzas y momentos entre las barras.

7. Ejercicios resueltos de diagramas a estima: Diagrama nº 12



Aclaraciones a la Resolución de los diagramas:

1. Hallar las reacciones: Las reacciones en los apoyos deben equilibrar el momento puntual M aplicado en el nudo. No puede haber reacción horizontal en la articulación porque se rompería el equilibrio de $\Sigma F_H=0$. Las reacciones verticales deben formar un par que compense el momento M → $R \cdot L_2=M$.

2. Diagrama de Axiles (N): La reacción R produce un axil en la barra L_1 que se trasmite a la barra L_2 en forma de Cortante.

3. Diagrama de Cortantes (V): La barra L_2 soporta un Cortante de valor R (este cortante es el que se trasmite a la barra L_1 en forma de compresión). La barra L_1 no soporta Cortante, ya que no soporta cargas perpendiculares a ella. El momento puntual no afecta ni a la ley N(x) ni a V(x).

4. Diagrama de Flectores (M): Si comenzamos a leer la estructura por el extremo inferior de la barra L_1, sólo tenemos una reacción en la dirección de la barra, por lo que no producirá esfuerzo Cortante ni Flector (en toda la longitud de la barra). Al llegar al nudo, tenemos un salto de valor M (momento aplicado). Leyendo L_2 por la derecha, en el carrito el Flector es 0, pero la carga R (perpendicular a la barra), crea un Flector negativo lineal creciente a medida que nos distanciamos de la reacción. Al llegar al nudo por la barra L_2 el Flector vale $R \cdot L_2$ que se equilibra con el Momento puntual M.

5. Deformada: La barra L_2 está sometida a Flector negativo → curvatura convexa: ⌒. La barra L_1 no está sometida a Flector, por lo que no se curvará, pero sí puede girar en la articulación. En el nudo rígido se mantiene el ángulo de 90º.