

4. Ecuaciones Generales - General Equations

Ecuación de continuidad - Continuity equation

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{V_c(t)} \rho dV \right] + \int_{\Sigma_c(t)} \rho [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}] d\sigma = 0$$

Ecuación de conservación de momento lineal - Linear momentum conservation equation

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{V_c(t)} \rho \bar{v} dV \right] + \int_{\Sigma_c(t)} \rho \bar{v} [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}] d\sigma = - \int_{\Sigma_c(t)} p \bar{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} \bar{\tau} \cdot \bar{n} d\sigma + \int_{V_c(t)} \rho \bar{f}_m dV$$

Ecuación de conservación del momento angular respecto \bar{x}_0 - Angular momentum conservation equation with respect to \bar{x}_0

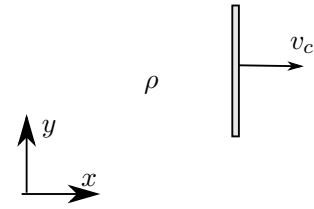
$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{V_c(t)} \rho (\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge \bar{v} dV \right] + \int_{\Sigma_c(t)} \rho [(\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge \bar{v}] [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}] d\sigma = \\ - \int_{\Sigma_c(t)} (\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge p \bar{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} (\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge (\bar{\tau} \cdot \bar{n}) d\sigma + \int_{V_c(t)} \rho (\bar{x} - \bar{x}_0) \wedge \bar{f}_m dV \end{aligned}$$

Ecuación de conservación de la energía - Energy conservation equation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\int_{V_c(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) dV \right] + \int_{\Sigma_c(t)} \rho \left(e + \frac{v^2}{2} \right) [(\bar{v} - \bar{v}_c) \cdot \bar{n}] d\sigma = \int_{V_c(t)} \rho \bar{f}_m \cdot \bar{v} dV \\ - \int_{\Sigma_c(t)} p \bar{v} \cdot \bar{n} d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} \bar{v} \cdot (\bar{\tau} \cdot \bar{n}) d\sigma + \int_{\Sigma_c(t)} k (\nabla T \cdot \bar{n}) d\sigma + \int_{V_c(t)} (\dot{q}_R + \dot{q}_Q) dV \end{aligned}$$

1. Considere el flujo uniforme, incompresible, de aire (densidad $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$) dado por el campo de velocidad $\bar{v} = (3\bar{e}_x + 4\bar{e}_y) \text{ m/s}$. Calcule el gasto másico G , el flujo convectivo de cantidad de movimiento y el flujo convectivo de energía cinética a través de una superficie plana de 3 m^2 normal al eje x que se mueve con velocidad $\bar{v}_c = (2\bar{e}_x) \text{ m/s}$.

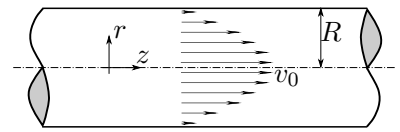
Consider the uniform, incompressible air flow (density $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$) characterized by the steady velocity field $\vec{v} = (3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y) \text{ m/s}$. Compute the mass flow rate G , the linear momentum convective flux, and the energy convective flux through a planar surface of 3 m^2 perpendicular to the x -axis that moves with velocity $\vec{v}_c = (2\vec{e}_x) \text{ m/s}$.



Sol. $G = 3.6 \text{ kg/s}$, $(10.8\vec{e}_x + 14.4\vec{e}_y) \text{ N}$, 45 J/s .

2. El flujo laminar totalmente desarrollado en un conducto circular de radio R presenta un perfil de velocidad parabólico descrito por la expresión $v_x(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$. Si la densidad del fluido es ρ , determine el gasto másico G , el flujo convectivo de cantidad de movimiento y el flujo convectivo de energía cinética a través de la sección transversal del conducto en el sentido del flujo.

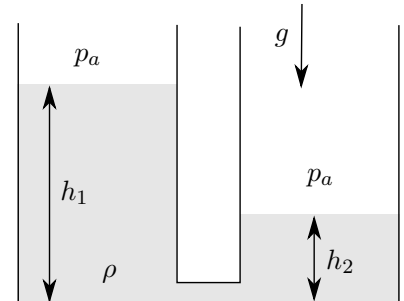
The laminar fully-developed flow produced in a cylindrical duct with radius R exhibits a parabolic velocity profile given by $v_x(r) = v_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$. If the fluid density is ρ , determine the mass flow rate G , the linear momentum convective flux, and the kinetic energy convective flux through the duct cross section pointing streamwise.



Sol. $G = \rho \frac{v_0}{2} \pi R^2$, $\rho \frac{v_0^2}{3} \pi R^2 \vec{e}_x$, $\rho \frac{v_0^3}{8} \pi R^2$.

3. Dos depósitos iguales, de área de la base A_d , están conectados por un conducto de sección transversal $A_c \ll A_d$ situado a ras del fondo de los depósitos. Suponiendo un proceso ideal y casi-estacionario, estime a) la velocidad v del agua en el conducto en el instante en que los niveles de agua en los depósitos son h_1 y h_2 y b) el tiempo t_{eq} que tardará en alcanzarse el equilibrio desde el instante inicial en que los niveles de agua en los depósitos son $h_{1,0}$ y $h_{2,0}$.

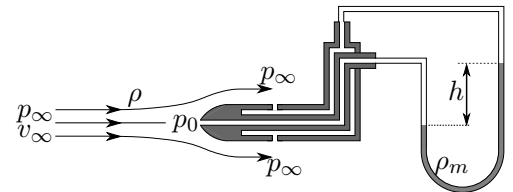
The bottom of two similar tanks, with base area A_d , are connected through the a pipe with cross-section area $A_c \ll A_d$. Assuming an ideal, quasi-steady process, determine a) the velocity v of the water flow when the tank levels are h_1 and h_2 and b) the time at which equilibrium is reached if for $t = 0$ the height levels were $h_{1,0}$ and $h_{2,0}$.



Sol. a) $v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$ **Sol. b)** $t_{\text{eq}} = \frac{A_d}{A_s} \sqrt{\frac{h_{1,0} - h_{2,0}}{2g}}$

4. El tubo de Pitot de la figura se utiliza para medir la velocidad de una corriente de aire, de densidad ρ . Las tomas de presión se conectan a un manómetro diferencial con fluido manométrico de densidad $\rho_m \gg \rho$ que mide una diferencia de alturas h . Se pide determinar fórmula para obtener la velocidad v_∞ de la corriente de aire.

The Pitot tube shown in the figure is used to measure the velocity of the air stream with constant density ρ . A differential manometer, made of liquid with density $\rho_m \gg \rho$, shows a level difference h . Show the expression that determines the air stream velocity v_∞ .

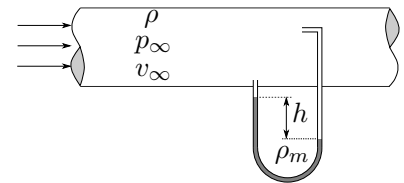


Sol. $v = \sqrt{2\rho_m g h / \rho}$

5. El manómetro de tubo en U de la figura tiene una toma de presión estática en una rama y una toma de

presión dinámica en la otra. En la configuración de la figura, con $\rho \ll \rho_m$, determine la expresión para la velocidad v_∞ del fluido en el conducto, supuesta uniforme.

The U-shaped manometer shown in the figure has a static-pressure tap on one side, and a dynamic pressure tap on the other side. Knowing that $\rho \ll \rho_m$, determine the expression for the average, streamwise velocity v_∞ of the flow in the pipe.

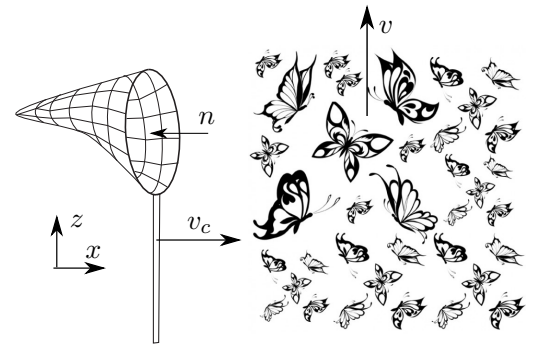


Sol. $v_\infty = \sqrt{2\rho_m g h / \rho}$

6. Supongamos que queremos cazar mariposas con un red de radio R . Para ello la colocamos en posición vertical tal que $\hat{n} = -\hat{e}_x$ y la movemos con una velocidad \bar{v}_c . Si en promedio hay $\phi = 40$ mariposas/m³ y éstas se desplazan asustadas hacia arriba con una velocidad \bar{v} , ¿cuál será el número de mariposas cazadas por segundo? Datos: $R = 0.2$ m, $\bar{v}_c = 2\hat{e}_x$ m/s, $\bar{v} = \hat{e}_z$ m/s.

Let's assume we want to catch some butterflies with a butterfly net with radius R . For that we place the net in vertical position, such that $\hat{n} = -\hat{e}_x$, and we move it with velocity \bar{v}_c . If the average butterfly population in the air is $\phi = 40$ butterflies/m³ and they move, frightened, upwards with velocity \bar{v} , what would be the number of butterflies caught per second? Data: $R = 0.2$ m, $\bar{v}_c = 2\hat{e}_x$ m/s, $\bar{v} = \hat{e}_z$ m/s.

Sol. 10 mariposas/s , 10 butterflies/s



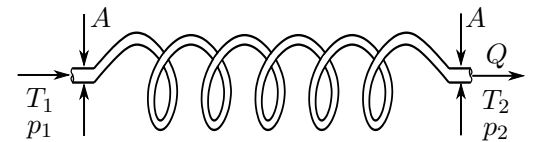
7. Considere el caso particular de un flujo ideal e incompresible que es estacionario en un sistema de referencia que gira con velocidad angular $\bar{\Omega} = \Omega\hat{e}_z$. Muestre la ecuación de Bernoulli en este sistema de referencia, donde r la distancia del punto al eje z .

Consider the particular case of an ideal, incompressible flow that is steady in a reference frame rotating with angular velocity $\bar{\Omega} = \Omega\hat{e}_z$. Show the Bernoulli equation in this reference frame, where r is the distance to the z -axis.

Sol. $p + \rho \frac{v^2}{2} + \rho g z - \rho \frac{\Omega^2 r^2}{2} = C_\ell$

8. El tubo serpentín de la figura se encuentra en un baño de agua a temperatura constante. Por el serpentín fluye un caudal Q de líquido de densidad ρ y calor específico c . El área del tubo en las secciones de entrada y salida del serpentín es A . El líquido que fluye por el serpentín experimenta un descenso de temperatura $\Delta T = T_1 - T_2$ y una caída de presión $\Delta p = p_1 - p_2$ entre las secciones de entrada y salida. Determine el flujo de calor q que el líquido del serpentín transfiere por conducción al agua del baño a través de las paredes del serpentín.

The coil tube shown in the figure is submerged into water at constant temperature. Through the coil flows a liquid with density ρ , specific heat c , and volumetric flow rate Q . The constant cross-section area of the tube is A . Through its path, the liquid experiences a temperature decrease and pressure drop, being $\Delta T = T_1 - T_2$ and $\Delta p = p_1 - p_2$ the total temperature and pressure drop, respectively, from entrance to exit.



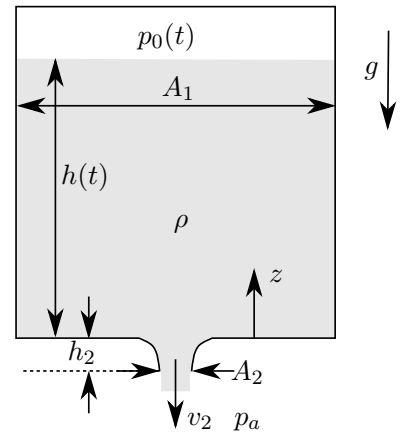
Determine the heat flux q that the fluid inside the coil transfers to the water through the tube wall.

Sol. $q = (\rho c \Delta T + \Delta p) Q$

9. El depósito de la figura, cerrado excepto por el orificio de salida, contiene agua hasta un nivel $h(t)$ y una cámara de aire a presión $p_0(t)$. Si el depósito se vacía por gravedad en un proceso que puede considerarse ideal y casi-estacionario, determine la velocidad del agua en la salida v_2 en función del resto de parámetros. Tenga en cuenta que $A_2 \ll A_1$.

The pressurized tank shown in the figure is closed except for the outflow orifice and contains water up to the variable level $h(t)$. The pressure in the air chamber is $p_0(t)$. If the tank discharge is produced by gravity effects only and it can be assumed to be ideal and quasi-steady process, determine the velocity of the water stream at the exit v_2 as a function of known parameters. Consider the limit $A_2 \ll A_1$.

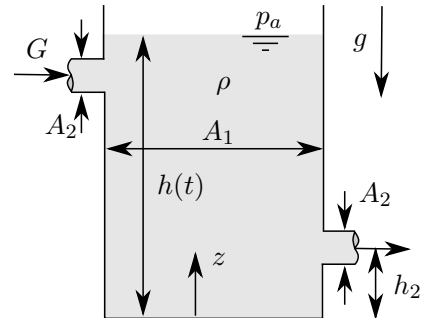
Sol. $v_s = \sqrt{2(p_0 - p_a)/\rho + 2g(h + h_s)}$



10. El depósito de agua de la figura tiene una sección circular de área A_1 . Por el conducto de entrada le está llegando un gasto de agua G constante, mientras que por el conducto de salida, de sección $A_2 \ll A_1$, se está vaciando por acción de la gravedad. Si en un instante dado, t_0 , el nivel de agua en el depósito es h_0 , determine la ecuación diferencial que permite calcular la evolución del nivel de agua $h(t)$.

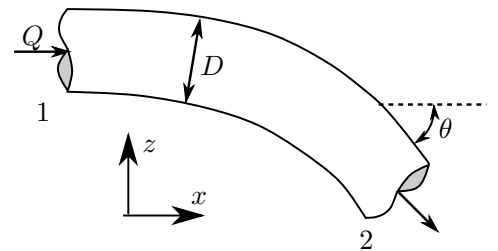
In the tank shown in the figure, with cross-section area A_1 there are one intake and one outtake (placed in a lower position). The mass inflow rate is constant, G , while the outtake discharges water by gravity effects through the cross-section area $A_2 \ll A_1$. If at a given time, t_0 , the water level is h_0 , show the differential equation that governs the variable water level in the tank $h(t)$.

Sol. $\rho A_1 \frac{dh}{dt} + \rho A_2 \sqrt{2g(h - h_s)} = G$



11. El conducto de la figura, de sección circular y área A , forma un codo de ángulo θ . Si por él fluye un líquido de densidad ρ con velocidad v y las presiones medidas antes y después del codo son p_1 y p_2 respectivamente, determine la fuerza del líquido sobre el codo entre las secciones 1 y 2.

The pipe, with circular cross-section area A , is bended an angle θ as sketched in the figure. If the liquid flowing into the pipe, with density ρ , moves with velocity v and pressure measures in sections 1 and 2 are p_1 and p_2 , respectively, determine the force that the fluid exerts on the bend between those sections.



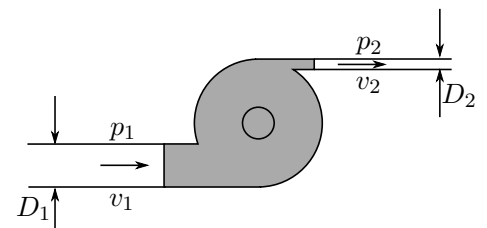
Sol. $F_x = \pi D^2 [p_1 - p_2 \cos \theta + \rho v^2 (1 - \cos \theta)] / 4$, $F_z = \pi D^2 (p_2 + \rho v^2) \sin \theta / 4$

12. La bomba horizontal de la figura descarga agua 20°C con $57 \text{ m}^3/\text{h}$. Despreciando las pérdidas, ¿qué potencia en kilovatios proporciona la bomba al agua?

Datos: $D_1 = 9 \text{ cm}$, $p_1 = 120 \text{ kPa}$, $D_2 = 3 \text{ cm}$, $p_2 = 200 \text{ kPa}$.

The pump shown in the figure discharges water 20°C with a flow rate of $57 \text{ m}^3/\text{h}$. Neglecting losses, ¿what would be the power provided by the pump?

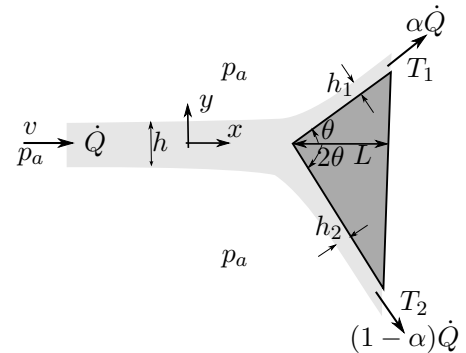
Data: $D_1 = 9 \text{ cm}$, $p_1 = 120 \text{ kPa}$, $D_2 = 3 \text{ cm}$, $p_2 = 200 \text{ kPa}$.



Sol. Ec. Masa (Mass Eq.): $Q_1 = Q_2 = Q$, $v_1 = 2.49 \text{ m/s}$, $v_2 = 22.4 \text{ m/s}$

Ec. Energía (Energy Eq.): $\Delta e = c\Delta T = 0$, $\dot{W} = \rho Q \left(\frac{v_2^2 - v_1^2}{2} + \frac{p_2 - p_1}{\rho} \right) = 8.36 \text{ kw}$

13. Un líquido de densidad ρ y calor específico c constantes forma un chorro bidimensional plano de espesor h y velocidad uniforme v que incide sobre una cuña asimétrica de forma y dimensiones mostradas en la figura. La cuña divide el chorro en dos capas de flujo desigual de modo que una fracción α del flujo volumétrico \dot{Q} (\dot{Q} es flujo volumétrico por unidad de longitud en la dirección \bar{e}_z) se desvía hacia el lado que forma ángulo θ y el resto desvía hacia el otro lado formando un ángulo 2θ . Suponiendo un proceso estacionario y que los efectos de la viscosidad y gravitatorios son despreciables: a) Determine la velocidad uniforme del fluido en cada una de las dos capas de fluido que se forman sobre la cuña, v_1 y v_2 y los espesores h_1 y h_2 . b) Determine la fuerza F (por unidad de longitud) que el líquido del chorro y el aire ambiente ejercen sobre la cuña y el momento M sobre el vértice de incidencia de la cuña. c) Conocidas la temperatura T_0 del chorro incidente y las temperaturas T_1 y T_2 de las capas de líquido cuando pierden el contacto con la cuña, determine el flujo de calor por unidad de superficie \dot{q} que se transfiere desde el líquido a la cuña. Suponga que el flujo de calor es uniforme sobre la cuña y que no hay calor transferido por conducción entre el líquido y el aire ambiente. A liquid with constant density ρ and specific heat c forms a bidimensional plane jet with thickness h a uniform velocity v impinges onto an asymmetric wedge as depicted in the figure. The wedge splits the jet into two different streams such that in the upper stream the flow is deflected and angle θ with a flow rate $(1 - \alpha)\dot{Q}$ (being \dot{Q} the incident volumetric flow rate per unit length), while in the lower stream the flow is deflected 2θ and the volumetric flow rate is $\alpha\dot{Q}$. Assuming that the process is steady and that viscous and gravitational effects can be neglected: a) Determine the speed of the two split streams on the wedge exit v_1 , and v_2 and their thickness h_1 and h_2 . b) The force F exerted on the wedge by the jet and surrounding air, and the moment M that this force produces on the wedge incident corner. c) By knowing the incident temperature T_0 and the outflow temperature T_1 and T_2 , determine the heat flux per unit area \dot{q} that liquid transfers to the wedge, assuming that \dot{q} is uniform and there is no significant heat exchange between the liquid and the surrounding air.



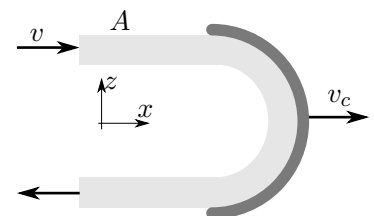
Sol. a) Bernoulli: $v_1 = v_2 = v$, Ec. Masa (Mass Eq.): $h_1 = \alpha h$, $h_2 = (1 - \alpha)h$

Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\bar{F} = \rho v^2 h [1 - \alpha \cos \theta - (1 - \alpha) \cos(2\theta)] \bar{e}_x - \rho v^2 h [\alpha \sin \theta - (1 - \alpha) \sin(2\theta)] \bar{e}_y$, Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\bar{M} = \rho v^2 \frac{h^2}{2} (2\alpha - 1) \bar{e}_z$

Sol. c) Ec. Energía (Energy Eq.): $\dot{q} = \frac{\rho c v h}{L} \left[\frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos(2\theta)} \right]^{-1} [T_0 - \alpha T_1 - (1 - \alpha) T_2]$

14. El álabe de la figura hace que el chorro de agua dé la vuelta completamente. El chorro de agua, con densidad ρ y área A , se mueve con velocidad $\bar{v} = v \bar{e}_x$. Despreciando efectos viscosos y gravitatorios, determine la fuerza del agua y el aire ambiente sobre el álabe a) si este está estático y b) si se mueve con velocidad $\bar{v}_c = v_c \bar{e}_x$ ($v_c < v$).

The mill blade shown in the figure turns the incident water beam back completely. The water beam, with density ρ and cross-section area A , moves with velocity $\bar{v} = v \bar{e}_x$. Neglecting viscous and gravity effects, determine the force that both water and surrounding air exert on the blade if a) the blade is not moving and b) if it moves with velocity $\bar{v}_c = v_c \bar{e}_x$ ($v_c < v$).

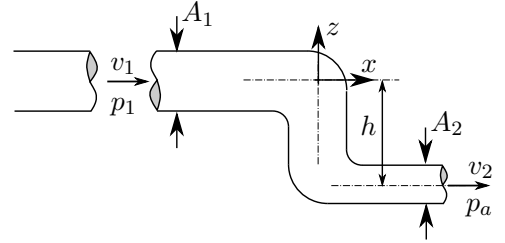


Sol. $\bar{F} = 2\rho(v - v_c)^2 A \bar{e}_x$.

15. El doble codo de la figura tiene una sección transversal de salida A_2 será instalado en el extremo de una tubería de sección transversal A_1 para redireccionar el flujo de salida de agua a la atmósfera. Una vez instalado

y operando en estado estacionario, los valores de presión y velocidad a la entrada (final de la tubería) son p_1 y v_1 respectivamente. Se pide determinar a) la velocidad del flujo a la salida v_2 , b) la fuerza ejercida sobre el doble codo y c) su correspondiente momento con respecto al origen de coordenadas.

The double-elbow mouth piece of exit cross section A_2 shown in the figure is to be installed at the end of a circular pipe of cross section A_1 to redirect the outflow of water into the open atmosphere. Once the mouth piece is installed, the uniform values v_1 and p_1 are measured for the flow velocity and the pressure at the end of the pipe (i.e., just at the entrance of the mouth piece). Find a) the value of the uniform velocity at the exit section, v_2 , b) the force exerted on the mouth piece, and c) its corresponding moment with respect to origin of the reference frame.



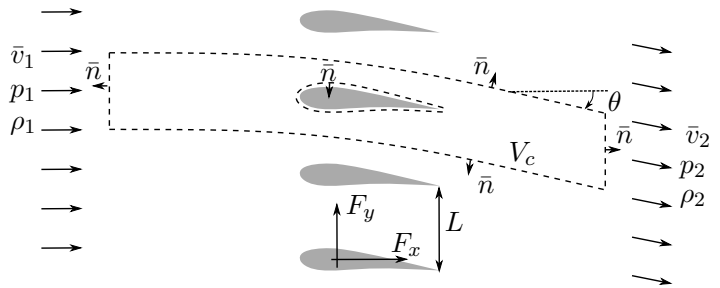
Sol. a) Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho v_1 A_1 = \rho v_2 A_2 \rightarrow v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$

Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\vec{F} = [(\rho v_1^2 + p_1 - p_a) A_1 - \rho v_2^2 A_2] \vec{e}_x$.

Sol. c) Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\vec{M} = \rho v_2^2 A_2 h \vec{e}_y$.

16. Una corriente bidimensional, gaseosa y uniforme de presión p_1 , densidad ρ_1 y velocidad $\vec{v}_1 = u_1 \vec{e}_x$ incide sobre una cascada de álabes que distan entre sí una distancia L , ejerciendo sobre cada uno de ellos una fuerza $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$. Sabiendo que el gas es caloríficamente perfecto, que los álabes están aislados térmicamente y que las fuerzas másicas no influyen en el movimiento, se pide escribir las ecuaciones que permiten calcular las condiciones uniformes de presión p_2 , densidad ρ_2 y velocidad $\vec{v}_2 = u_2 \vec{e}_x + v_2 \vec{e}_y$ que se alcanzan aguas abajo de la cascada.

A planar uniform stream of air with pressure p_1 , density ρ_1 and velocity $\vec{v}_1 = u_1 \vec{e}_x$ flows past an array of aerofoils with vertical separation L , exerting on each one a force (per unit length) given by $\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y$. Assuming that the aerofoils are thermally insulated and neglecting the effect of gravity, write the equations that determine the values of the pressure p_2 , density ρ_2 and velocity $\vec{v}_2 = u_2 \vec{e}_x + v_2 \vec{e}_y$ for the uniform stream found sufficiently far downstream.



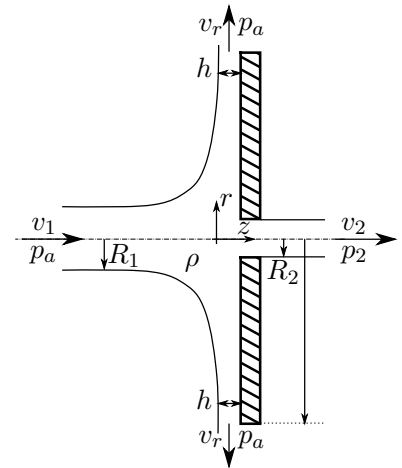
Sol. Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2$

Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $F_x = (\rho_1 u_1^2 + p_1 - \rho_2 u_2^2 - p_2) L$, $F_y = -\rho_2 u_2 v_2 L$

Ec. Energía (Energy Eq.): $\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{u_1^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2 + v_2^2}{2}$

17. Un chorro de agua de radio R_1 y velocidad v_1 incide perpendicularmente sobre una pared en la que se ha practicado un orificio de radio $R_2 < R_1$. Parte del agua escapa a través del orificio y el resto se desvía radialmente respecto del chorro en la configuración axisimétrica que se muestra en la figura. Considerando que la velocidad del chorro es suficientemente alta para poder despreciar los efectos de fricción y gravitatorios, determine a) los valores de las velocidades v_2 y v_r que representan la velocidad del líquido a la salida del orificio v_2 y de la parte deflectada radialmente v_r . Si $p_2 = p_a$, calcule b) el espesor de la película de líquido sobre la pared en función de r y c) la fuerza que el chorro de agua ejerce sobre la pared como función de ρ , v_1 , R_1 y R_2 .

A circular water jet of radius R_1 and velocity v_1 impinges perpendicularly to a wall, where there exists an orifice centered at the jet axis, as shown in the figure, so that part of the water flows through the orifice with radius $R_2 < R_1$ and part is deflected to flow next to the wall. Assuming that the flow velocity is sufficiently large so that effects of viscosity and gravity can be neglected, determine a) the values of the velocities v_2 and v_r for the secondary jet that emerges from the orifice and for the radial wall jet. If $p_2 = p_a$, determine b) the thickness $h(r)$ of the liquid film on the wall as a function of the distance r and c) the force that the jet exerts on the wall as a function of ρ , v_1 , R_1 and R_2



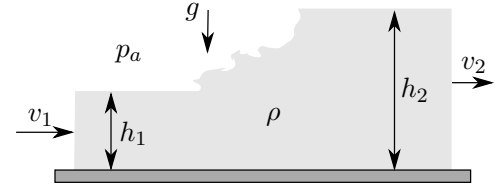
Sol. a) Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.} \rightarrow v_r = v_1, v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + v_1^2}$

Sol. b) Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho v_1 \pi R_1^2 = \rho v_2 \pi R_2^2 + \rho v_r 2\pi r h(r) \rightarrow h(r) = \frac{R_1^2 - R_2^2}{2r}$

Sol. c) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\vec{F} = \rho v_1^2 \pi (R_1^2 - R_2^2) \vec{e}_z$.

18. Al igual que se observa en el fregadero de una cocina cuando cae sobre él el agua del grifo, un canal de agua a gran velocidad (v_1, h_1) puede “saltar” a una condición de baja velocidad y baja energía (v_2, h_2) como se observa en la figura. La presión en las secciones 1 y 2 es aproximadamente la hidrostática y la fricción en la pared es despreciable. Use las relaciones de continuidad y cantidad de movimiento para obtener h_2 y v_2 en función de h_1 y v_1 .

Same as it is observed in the sink of a kitchen when water from the tap falls on it, the water in an open channel can change from high velocity regime (v_1, h_1) to a lower velocity and lower energy regime (v_2, h_2) as it is depicted in figure. Pressure in sections 1 and 2 is approximately the hydrostatic one and the friction on the wall can be considered as negligible.



Using the continuity and momentum equations, obtain h_2 and v_2 as a function of h_1 and v_1

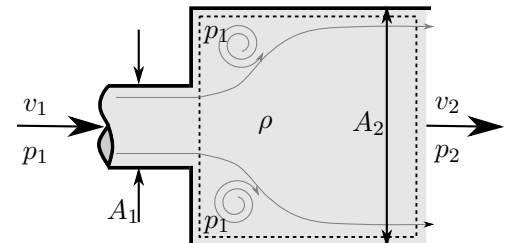
Sol. Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho v_1 h_1 = \rho v_2 h_2$

Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\rho v_1^2 h_1 + \frac{1}{2} \rho g h_1^2 = \rho v_2^2 h_2 + \frac{1}{2} \rho g h_2^2$

$\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 + \frac{8v_1^2}{gh_1}} - 1 \right) = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + 8 \text{Fr}} - 1)$, Fr= número de Foude (Froude number).

19. Cuando el flujo en un conducto se expande súbitamente de A_1 a A_2 , como se indica en la figura, aparecen torbellinos de baja velocidad y baja fricción en las esquinas y el flujo se expande de forma gradual hasta A_2 aguas abajo. Empleando el volumen de control sugerido para flujo estacionario y suponiendo que $p \approx p_1$ en la esquina anular, como se muestra en la figura, demuestre que la presión aguas abajo está dada por $p_2 = p_1 + \rho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)$. Desprecie la fricción en la pared.

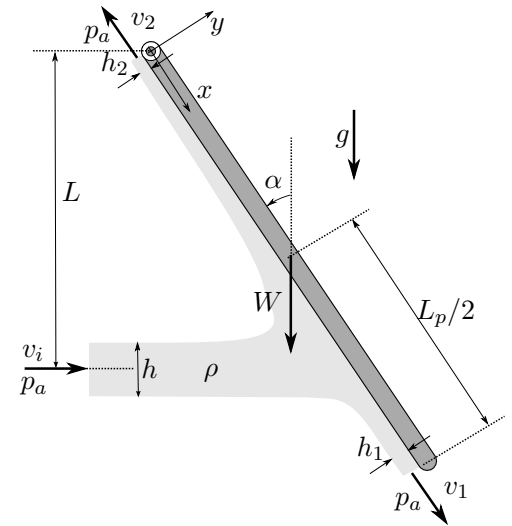
When the flow in a duct suddenly expands from A_1 to A_2 , as it is shown in the picture, low speed and low friction eddies appear at the corners and the flow gradually expands downstream up to A_2 . Using the suggested control volume for a steady flow and assuming $p \approx p_1$ in A_1 , proof that the pressure downstream is given by $p_2 = p_1 + \rho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)$.



Sol. $v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1$, $\rho A_1 v_1^2 \vec{e}_x - \rho A_2 v_2^2 \vec{e}_x = (p_1 - p_2) A_2 \vec{e}_x \rightarrow p_2 = p_1 + \rho v_1^2 \frac{A_1}{A_2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)$

20. Un chorro plano de un líquido con densidad ρ , espesor h y velocidad uniforme v_i , incide sobre una placa plana de longitud L_p y peso (por unidad de longitud) W , la cual está articulada en la parte superior. Debido a la fuerza que el chorro ejerce sobre la placa, ésta rota libremente sobre la articulación situada a una distancia vertical L del chorro. Una vez alcanzado el equilibrio, la placa queda inclinada con un ángulo α con respecto al eje vertical. El chorro incidente queda dividido en dos chorros a la salida que viajan paralelos a la superficie de la placa y escapan con espesores h_1 y h_2 . Se pide obtener a) el valor de los espesores h_1 y h_2 y b) el ángulo de equilibrio final α como función de los datos iniciales (ρ , h , v_i , L_p , W y L). Desprecie las fuerzas másicas y los esfuerzos viscosos.

A plane jet of a liquid of density ρ , thickness h and uniform velocity v_i , strikes on an flat plate of length L_p and weight per unit length W which is articulated in its top edge. Due to the force exerted by the jet, the plate freely rotates around its articulation point, placed at a vertical distance L over the symmetry plane of the jet. Once the equilibrium is reached, the plate is inclined an angle α with respect to the vertical axis. After striking on the plate, the jet is divided into two jets which move parallel to the plate with constant thickness h_1 and h_2 . Determine split streams thicknesses h_1 and h_2 and b) the expression for the equilibrium angle α as a function of the initial data (ρ , h , v_i , L_p , W and L). Neglect body forces in the fluid conservation equations and assume negligible viscous forces.



Sol. a) Bernoulli: $p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const.} \rightarrow v_1 = v_2 = v_i$

Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho v_i h = \rho v_1 h_1 + \rho v_2 h_2 \rightarrow h = h_1 + h_2$.

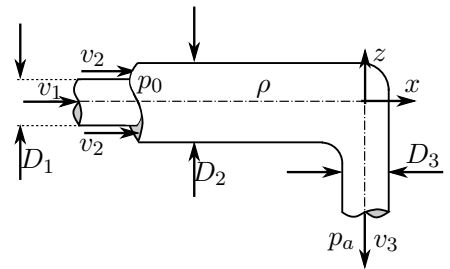
Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\int \bar{r} \cdot \bar{n} d\sigma \sim 0 \rightarrow \bar{F}_p = F_p \bar{n} = F_p \bar{e}_y = \rho v_i^2 h \cos \alpha \bar{e}_y$
 $F_p \bar{e}_x = 0 \rightarrow h \sin \alpha = h_1 - h_2 \rightarrow h_1 = \frac{h}{2}(1 + \sin \alpha)$, $h_2 = \frac{h}{2}(1 - \sin \alpha)$

Sol. b) Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\sum \bar{M} = 0 \rightarrow \bar{M}_p = L_p W \sin \alpha / 2 \bar{e}_z$

$\bar{M}_p = \rho v_i^2 L h \bar{e}_z - \frac{1}{2} \rho v_i^2 h_1^2 \bar{e}_z + \frac{1}{2} \rho v_i^2 h_2^2 \bar{e}_z = \rho v_i^2 h (L - \frac{h}{2} \sin \alpha) \bar{e}_z \rightarrow \sin \alpha = \frac{2 \rho v_i^2 h L}{W L_p + \rho v_i^2 h L}$

21. Dos corrientes concéntricas del mismo líquido con densidad ρ y con diámetros D_1 y D_2 , entran en una tubería en forma de codo con sección de entrada e , con velocidades v_1 y v_2 , respectivamente. Dentro del codo ambas corrientes se mezclan y son redirigidas con un ángulo de 90° antes de salir a la atmósfera a través de un conducto de diámetro D_3 . Despreciando las fuerzas másicas, si la presión de entrada es p_0 y la presión atmosférica es p_a : a) obtener la velocidad a la salida v_3 , b) determinar la fuerza neta ejercida sobre el codo, $\bar{F} = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y$ y c) el momento ejercido con respecto al origen del sistema de referencia, situado a la intersección del eje de entrada y de salida.

Two concentric streams, with diameters D_1 and D_2 , of a liquid with density ρ enter the pipe bend through section e , at velocities v_1 and v_2 respectively, as sketched below. Inside the pipe bend, both streams get mixed and turn 90 degrees before the exit to the atmosphere through the exit duct with diameter D_3 . Neglecting body forces, if the pressure at the inlet is p_0 and the atmospheric pressure is p_a : a) obtain the velocity at the exit section, v_3 , b) determine the net force exerted on the tube, $\bar{F} = F_x \bar{e}_x + F_y \bar{e}_y$, and c) determine the moment exerted on the tube, with respect to origin of the reference frame, located at the intersection of the axis of the entry and exit ducts.



Sol. a) Ec. Masa (Mass Eq.): $v_3 = \frac{v_1 D_1^2 + v_2 (D_2^2 - D_1^2)}{D_3^2}$

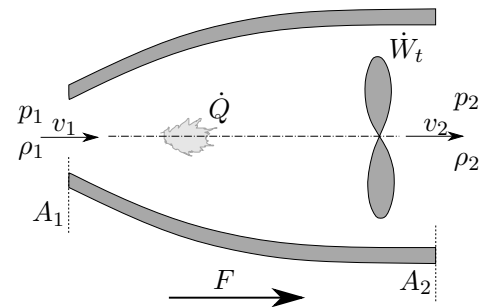
Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.):

$$F_x = \frac{\pi}{4} [\rho v_1^2 D_1^2 + \rho v_2^2 (D_2^2 - D_1^2) + (p_0 - p_a) D_2^2] , \quad F_y = \rho v_3^2 \frac{\pi}{4} D_3^2$$

Sol. c) Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\vec{M}_O = \vec{F}_x \times 0 + \vec{F}_y \times 0 = 0$.

22. Las áreas de las secciones de la turbomáquina axial de la figura son, respectivamente A_1 y A_2 . Además de la carcasa fija exterior, la turbomáquina contiene partes móviles en su interior a través de las que se extrae del fluido un trabajo \dot{W}_t por unidad de tiempo. La reacción química en la cámara de combustión y la transmisión de calor a través de las paredes dan lugar a una aportación conjunta de calor al fluido por unidad de tiempo \dot{Q} . Se conoce el valor de la fuerza axial F que ejerce el gas sobre la turbomáquina. Suponiendo que en la entrada y la salida el movimiento es en dirección axial con propiedades uniformes, se pide obtener el valor de la densidad ρ_2 , la presión p_2 y la velocidad u_2 a la salida en función de las condiciones ρ_1 , p_1 y u_1 en la entrada y de los valores \dot{W}_t , \dot{Q} y F .

The entrance and exit sections of the turboreactor sketched in the figure have areas A_1 and A_2 . Besides the outer fixed frame, the machine has mobile components in its interior that provide an amount of work \dot{W}_t per unit time. The combined effects of chemical reaction in the combustion chamber and heat transfer through the walls give a heat transfer per unit time \dot{Q} to the fluid stream. The axial force on the turboreactor measured on the testbench is F . Assuming that at the entrance and exit sections the flow properties are uniform, obtain the values of the density ρ_2 , pressure p_2 and velocity u_2 in terms of their values ρ_1 , p_1 and u_1 at the entrance and the known values of \dot{W}_t , \dot{Q} and F .



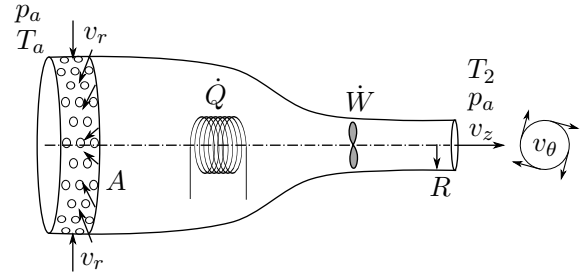
Sol. Ec. Masa (Mass Eq.): $\rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2 = G$

Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $F = p_1 A_1 - p_2 A_2 + G(v_1 - v_2)$

Ec. Energía (Energy Eq.): $\dot{Q} - \dot{W}_t = G \left(\frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_1}{\rho_1} - \frac{1}{2} v_1^2 \right)$

23. El secador de pelo con simetría axisimétrica de la figura debe proporcionar de manera estacionaria un gasto másico de aire G a una temperatura T_2 y a presión atmosférica p_a a través de una sección circular de salida de radio R . El aire entra radialmente en el dispositivo a presión p_a y temperatura T_a a través de una entrada lateral de área A . Se sabe que en el interior del secador existe una resistencia eléctrica que proporciona una cantidad de calor \dot{Q} por unidad de tiempo y un ventilador que transmite una potencia al fluido \dot{W} . Debido a la presencia del ventilador, la velocidad del fluido a la salida tiene tanto componente axial como azimutal, con cociente $v_\theta/v_z \sim \beta$ conocido. Suponiendo para simplificar el cálculo que las paredes interiores fijas del dispositivo y las paredes del ventilador son adiabáticas, que el aire se comporta como un gas ideal de constante R_g y calor específico a presión constante c_p , que el efecto de la gravedad es despreciable en el movimiento y que las propiedades del fluido son uniformes en las secciones de entrada y salida, se pide determinar en función de G , T_2 , T_a , p_a , A , R , R_g , c_p y β : a) la velocidad en la sección de entrada v_r , así como las componentes v_θ y v_z de la velocidad en la sección de salida, b) la fuerza que se ejerce sobre el secador, F , indicando claramente su dirección y sentido, c) la potencia total que el secador transmite al fluido $\dot{Q} + \dot{W}$, d) el par que el fluido ejerce sobre el secador.

The axisymmetric industrial dryer of the figure is designed to provide a steady hot jet of radius R , mass flux G , and temperature T_2 . Air enters the dryer from the ambient, at temperature and pressure T_a and p_a , through a radial inlet of surface A . Inside the dryer there exists an electric resistance that releases an amount of heat \dot{Q} per unit time, as well as a fan of power \dot{W} (work per unit time). Because of the presence of the fan, the air velocity at the exit has both azimuthal and axial components, v_θ and v_z , such that $v_\theta/v_z \sim \beta$.



In the analysis, assume that the fan and the inner walls of the dryer are thermally insulated, that the air behaves as an ideal gas with constant R_g and specific heat at constant pressure c_p , that gravity has a negligible effect on the fluid motion, and that the flow properties are uniform at the inlet and outlet sections. For given values of G , T_2 , T_a , p_a , A , R , R_g , c_p and β , determine: a) the velocity at the entrance section v_r as well as the two velocity components at the exit v_θ and v_z , b) the force acting on the dryer, indicating clearly its magnitude and direction, c) the total power required to run the dryer $\dot{Q} + \dot{W}$, d) the torque acting on the dryer.

Sol. a) Ec. Masa (Mass Eq.): $G = \frac{p_a}{R_g T_a} v_r A = \frac{p_a}{R_g T_2} v_z \pi R^2 \rightarrow v_r = \frac{G R_g T_a}{p_a A}$, $v_z = \frac{G R_g T_2}{p_a \pi R^2}$, $v_\theta = \frac{G R_g T_2}{p_a \pi R^2} \beta$

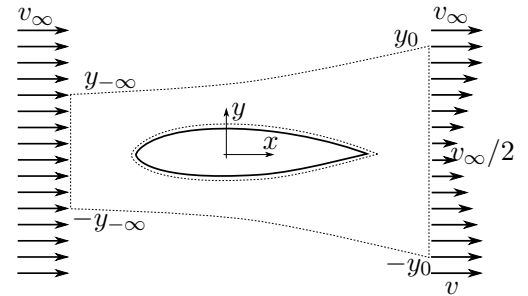
Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\vec{F} = F_x \bar{e}_x = -\frac{G^2 R_g T_2}{p_a \pi R^2} \bar{e}_z$

Sol. c) Ec. Energía (Energy Eq.): $\dot{Q} + \dot{W} = G [c_p(T_2 - T_a) + \frac{1}{2}v_z^2(1 + \beta^2) - \frac{1}{2}v_r^2]$

Sol. c) Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\vec{M} = M_z \bar{e}_z = -\frac{2}{3} G R v_\theta \bar{e}_z$

24. Los ensayos de un álabe bidimensional en un túnel aerodinámico muestran que el perfil de velocidad aguas arriba permanece uniforme, mientras que aguas abajo se identifica claramente una estela de espesor creciente donde existe un déficit de velocidad, tal y como se indica en la figura adjunta. En particular, las medidas realizadas en una cierta posición $x = x_0$ aguas abajo revelan que el perfil de velocidad en la estela varía de forma lineal desde el valor $v = v_\infty/2$ en $y = 0$ hasta alcanzar el valor $v = v_\infty$ en el borde de la estela, situado en $y = \pm y_0$. Para analizar el problema, considere el volumen de control limitado lateralmente por las dos líneas de corriente que se extienden desde $x \rightarrow -\infty$, $y = \pm y_\infty$ ($y_\infty < y_0$) hasta $x = x_0$, $y = \pm y_0$ y limitado interiormente por la superficie del álabe. Suponiendo que el aire se comporta como un fluido incompresible con densidad constante ρ y que los esfuerzos viscosos son despreciables en la estela y a lo largo de las líneas de corriente, se pide a) obtener el valor de y_∞ en función de y_0 y b) determine el valor de la fuerza de resistencia sobre el álabe como función de ρ , y_0 y v_∞ . Para el análisis asuma que la presión en todo el contorno exterior del volumen de control considerado es constante e igual a p_∞ y desprecie el efecto de las fuerzas másicas.

The experimental tests of an airfoil in a wind tunnel indicate that the velocity profile upstream remains uniform, whereas behind the airfoil there exists a wake region with significant velocity deficit whose thickness increases downstream, resulting in the flow field sketched in the figure below. For the airfoil tested, the velocity measurements at a given downstream location reveal that the velocity in the wake varies linearly from the value $v = v_\infty/2$ at the centerline to reach the value $v = v_\infty$ at the edge of the wake, located at $y = y_0$. To analyze the problem, consider a control volume limited laterally by the streamlines that extend from $x \rightarrow -\infty$, $y = \pm y_\infty$ ($y_\infty < y_0$) to $x = x_0$, $y = \pm y_0$ and internally by the surface of the airfoil.



Assuming that the air behaves as an incompressible fluid with density ρ and that viscous stresses are negligible

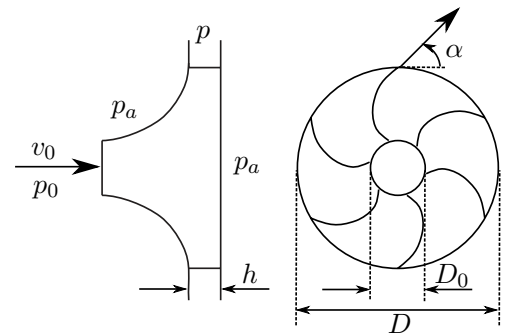
both in the wake and along the bounding streamlines, obtain a) the value of $y_{-\infty}$ as a function of y_0 and b) the value of the drag on the airfoil as a function of ρ , y_0 and v_{∞} . In the analysis, assume that on the outer boundary of the control volume the pressure differences from the ambient value p_{∞} are negligible, and so is the effect of gravity on the air flow.

Sol. a) Ec. Masa (Mass Eq.): $\int_{-y_{\infty}}^{y_{\infty}} v_{\infty} dy = \int_{-y_0}^{y_0} v_x(x_0, y) dy = \int_{-y_0}^{y_0} \frac{v_{\infty}}{2} \left(1 + \frac{y}{y_0}\right) dy \rightarrow y_{\infty} = \frac{3}{4}y_0$

Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\bar{F} = \left[- \int_{\Sigma_a} p \bar{n} d\sigma \cdot + \int_{\Sigma_a} \bar{\tau} \cdot \bar{n} d\sigma \right] \bar{e}_x$
 $- \int_{-y_{\infty}}^{y_{\infty}} \rho v_{\infty}^2 dy + \int_{-y_0}^{y_0} \rho \frac{v_{\infty}^2}{4} \left(1 + \frac{y}{y_0}\right)^2 dy = -F_x \rightarrow F_x = \frac{\rho v_{\infty}^2 y_0}{3}$.

25. La figura adjunta representa una bomba centrífuga de geometría conocida por la que circula agua con velocidad y presión a la entrada v_0 y p_0 uniformes. Sabiendo que, debido a la geometría interna, la velocidad a la salida, donde las condiciones también son uniformes con $p \neq p_a$, forma un ángulo α con la dirección tangencial local, se pide determinar: a) la velocidad radial a la salida de la bomba, b) la fuerza axial a la que está sometida la bomba, c) el par que se comunica al agua en este proceso, d) la potencia que debe tener el motor que arrastra a la bomba en el supuesto de que el rendimiento sea la unidad.

The sketch below shows a centrifugal pump. The fluid enters the pump impeller along the rotating axis and is accelerated by the impeller, flowing radially outward. The uniform velocity and pressure at the entrance are v_0 and p_0 , respectively. At the exit, the conditions are also uniform with $p \neq p_a$, and the exit velocity forms an angle α with the local azimuthal direction. Obtain: a) the radial velocity at the pump exit, b) the axial force on the pump, c) the torque exerted by the pump on the water, d) the power needed to drive the pump, assuming engine efficiency to be unity.



Sol. a) Ec. Masa (Mass Eq.): $v_s \sin \alpha = \frac{1}{4} \frac{D_0^2}{D h} v_0$

Sol. b) Ec. Momento Lineal (Linear Momentum Eq.): $\bar{F} = F_x \bar{e}_x = \frac{\pi D_0^2}{4} (p_0 - p_a + \rho v_0^2) \bar{e}_x$

Sol. c) Ec. Momento Angular (Angular Momentum Eq.): $\bar{M} = M_x \bar{e}_x = \frac{1}{2} \rho v_s^2 D^2 h \cos \alpha \sin \alpha \bar{e}_x$

Sol. d) Ec. Energía (Energy Eq.): $T_0 \sim T_s$, $W = \frac{\pi}{4} \rho v_0 D_0^2 \left(\frac{v_s^2 - v_0^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} \right)$